

Análisis de la anisotropía y la orientación preferente en materiales geológicos mediante el Método de Descriptores de Fourier

CRISTINA DE SANTIAGO BUEY (*)

RESUMEN El presente estudio constituye una aplicación del método denominado *Descriptores de Fourier* en el análisis digital de imágenes de materiales geológicos para la descripción cuantitativa de la morfología y grado de anisotropía de sus unidades morfológicas constituyentes, ya sean partículas individuales, agregados de partículas o poros. Este método permite medir y describir en términos cuantitativos la morfología general de partículas y poros, su anisotropía descrita en términos de elongación, así como valorar la presencia o no de posibles orientaciones preferentes. Se describen los fundamentos matemáticos en los que se basa el método y a continuación se hace una demostración de las posibilidades de su aplicación. Para ello se ha creado una sección teórica de una roca, compuesta por partículas geométricas (elipses y rectángulos de diferente relación de ejes) que muestran diferentes orientaciones. La aplicación del Método de Descriptores de Fourier (MDF) ha permitido describir la morfología de cada una de las partículas, cuantificar su elongación y su orientación y construir una rosa de direcciones que represente la distribución de orientaciones con el fin de detectar la presencia de posibles orientaciones preferentes.

FOURIER DESCRIPTORS ANALYSIS OF ANISOTROPY AND PREFERRED ORIENTATION IN GEOLOGICAL SAMPLES

ABSTRACT *This study focuses on the use of Fourier descriptors to evaluate and quantify two specific fabric characteristics of geological materials: anisotropy of particles or voids morphologies and particle orientation. To this end, a theoretical section of a rock was created, made of ellipses and rectangles of different axes ratios and different orientations. The Fourier descriptors method was applied to calculate the anisotropy and orientation of each particle and, finally, a rose diagram was constructed to represent the particles orientations distribution and to observe the presence or not of any preferred orientation.*

Palabras clave: Anisotropía, Orientación preferente, Descriptores de Fourier.

Keywords: Anisotropy, Preferred orientation, Fourier descriptors.

1. INTRODUCCIÓN

Desde siempre se ha aceptado la fuerte influencia que la morfología de las partículas, así como su distribución geométrica tridimensional, pueden ejercer en el comportamiento geotécnico de los materiales geológicos. Por ello, desde el nacimiento de la microscopía y del análisis digital de imágenes se han propuesto y desarrollado numerosas técnicas con el fin de describir, con la mayor precisión y rigor posibles, la morfología de los objetos estudiados. En el caso de los materiales geológicos estos objetos generalmente son partículas, agregados minerales, poros, fracturas, signos de disolución o alteración, etc. En los últimos años

se han venido desarrollando con mayor intensidad métodos de descripción morfológica basados en series de Fourier. Dentro de este conjunto de métodos, el utilizado en este trabajo es el denominado método de los descriptores de Fourier.

2. ANISOTROPÍA Y ORIENTACIÓN PREFERENTE

En geología se estudian los conceptos de isotropía-anisotropía asociados de una manera muy íntima a los conceptos de propiedad escalar y propiedad vectorial.

Gallego (1992), define en su artículo de una forma muy didáctica la relación existente entre las propiedades escalares y vectoriales y la isotropía-anisotropía presente en un material geológico. Las definiciones que propone para estos términos son las siguientes:

- **Isotropía:** Distribución homogénea de las partículas materiales en un sólido por la que cualquier línea o plano que

(*) Doctora en Ciencias Geológicas. Jefe de Sección Técnica. Laboratorio de Geotecnia. E-mail: Cristina.deSantiago@cedex.es

se considere contendrá siempre, estadísticamente, el mismo número de partículas y de la misma naturaleza.

- Anisotropía: Distribución de las partículas materiales en un cuerpo por la que cualquier línea o plano que se considere contendrá siempre, estadísticamente, distinto número o tipo de partículas.
- Propiedad escalar: Propiedad física (respuesta de la materia a un estímulo físico) cuyo valor no depende de la dirección en la que se mida.
- Propiedad vectorial: Propiedad física cuyo valor depende de la dirección en la que se mida.

Históricamente, fue previa la observación de que había propiedades cuyo valor no dependía de la dirección en que se midieran (densidad, temperaturas de cambio de estado, radiactividad, etc.), mientras otras sí mostraban diferencias más o menos acusadas en direcciones distintas. Así se diferenciaron las propiedades escalares de las vectoriales. Entonces se consideró la materia "isótropa" cuando sus propiedades no mostraban dependencia de la dirección, y "anisótropa" en el caso contrario. La isotropía o anisotropía es una cualidad inherente a la materia, relacionada con la distribución de partículas en el espacio. Si esta distribución es al azar, no hay razón alguna para que ninguna propiedad muestre diferencias entre direcciones o planos distintos porque en todos ellos se encontrarán estadísticamente el mismo tipo de partículas y el mismo número de ellas. Sin embargo, si hay un cierto orden, por mínimo que éste sea, aparecerán direcciones o planos preferentes.

El carácter más o menos anisótropo de una roca o sedimento geológico puede ser reconocido a partir de sus propiedades físicas, su comportamiento geotécnico o simplemente mediante el estudio de su fábrica. La fábrica de suelos y rocas se puede observar, describir y estudiar en términos cualitativos y cuantitativos mediante microscopía óptica o electrónica seguida de un análisis digital de imágenes. Desde el punto de vista de su fábrica, la anisotropía de un material geológico comprende dos conceptos claramente diferenciados: la morfología de las partículas y su disposición espacial en el conjunto del suelo o roca.

2.1. ANISOTROPÍA EN LA MORFOLOGÍA DE LAS PARTÍCULAS

Una partícula isótropa es totalmente equidimensional, de iguales dimensiones en todas las direcciones. A medida que la morfología de la partícula se aleja de la esfera o el cubo, mayor es su anisotropía. Este es el caso de las partículas laminares, como las micas, o fibrosas, como la sepiolita. El mismo razonamiento es aplicable a la morfología de los poros y huecos existentes entre las partículas.

2.2. ANISOTROPÍA EN LA DISPOSICIÓN DE LAS PARTÍCULAS: ORIENTACIÓN PREFERENTE

La fábrica se puede definir como la disposición espacial de las partículas y los poros existentes entre ellas.

Cuando las partículas son isótropas, como algunas arenas compuestas por granos cuarzcíticos prácticamente esféricos, no existen muchas posibilidades de mostrar comportamiento anisótropo a escala macroscópica. Sin embargo, las partículas anisótropas de morfología laminar o fibrosa, tienen infinitas posibilidades de orientación y distribución espacial. Una fábrica al azar donde las partículas anisótropas muestren todas las posibles orientaciones sin seguir un patrón de orientación, dará lugar a un material isótropo compuesto por partículas anisótropas. Finalmente, si estas partículas se orientan paralelamente unas a otras, guiadas por condicionantes externos

(esfuerzos tectónicos, consolidación debido al peso del material suprayacente, compactación en laboratorio) o internos (fuerzas físico-químicas de atracción o repulsión entre las partículas en función del entorno electroquímico), la fábrica resultante será en conjunto anisótropa y estará definida por la existencia de direcciones preferentes que condicionarán el comportamiento del material.

En la naturaleza existen pocas posibilidades de existencia de materiales geológicos totalmente isótropos debido fundamentalmente a la presencia de fuerzas de todo tipo actuando durante el proceso de creación del suelo o roca y condicionando la generación de partículas anisótropas y orientaciones preferentes. Aún en el caso de que la roca o el sedimento en su origen fuera isótropo hasta un cierto punto, ésta puede verse posteriormente modificada por la acción de los fenómenos postdeposicionales como esfuerzos direccionales de origen tectónico, consolidación y diagénesis debido a un enterramiento geológico, metamorfismo, etc.

Esta fábrica resultante ejerce una fuerte influencia en el comportamiento mecánico del material geológico.

3. ANÁLISIS DIGITAL DE IMÁGENES TRADICIONAL

Como se ha dicho anteriormente, el estudio de la fábrica de un suelo o roca se realiza mediante su observación al microscopio óptico o electrónico, seguido de un análisis digital de imágenes.

El análisis de imagen se ha definido como la cuantificación de algunos parámetros que forman parte de una imagen dando una respuesta en términos de no imagen, generalmente numéricos. El análisis de imagen también se ha definido como el análisis cuantitativo de datos numéricos, geométricos a partir de un objeto microscópico o macroscópico.

Estudiar la homegenidad de un suelo o roca implica definir tres parámetros: la morfología de las partículas y poros, su orientación y el porcentaje de ambas fases⁹. En materiales definidos por partículas minerales como suelos, sedimentos o rocas sedimentarias, su fábrica viene definida en términos de morfología de granos o partículas y su orientación (Lafeber, 1966; Oda, 1972; Mahmood and Mitchell, 1974).

La forma de las partículas es una característica fundamental que determina el comportamiento geotécnico de suelos y rocas. La mayoría de los minerales, a excepción de los arcillosos, presentan una forma que tiende a ser equidimensional, aunque pueden mostrar una cierta anisotropía hacia morfologías tabulares o elongadas. De entre todos los posibles parámetros, el «aspecto» ha sido considerado siempre el parámetro que mejor describe la anisotropía de los granos.

Se define «Aspecto» como la relación entre eje máximo y el eje mínimo de la elipse de área equivalente a la partícula.

Por otro lado, el comportamiento geotécnico global del material geológico depende no solamente de la morfología de las partículas, sino de su orientación relativa con respecto a la dirección de aplicación de los esfuerzos actuantes, así como del cambio de dicha orientación a lo largo del proceso. Asumiendo que las partículas presentan en general una mayor o menor anisotropía, su orientación se puede describir como el ángulo existente entre el eje máximo de su elipse equivalente y un cierto sistema de coordenadas. En estudios bidimensionales, se fabrican láminas delgadas del suelo o roca y se analizan las orientaciones de las partículas, representándolas en rosas de direcciones. Los análisis tridimensionales requieren fabricar series de secciones paralelas equidistantes. El análisis de estas secciones se representan en proyecciones estereográficas.

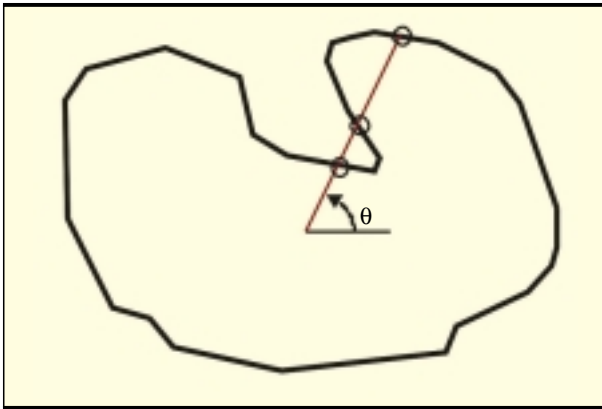


FIGURA 1. Inconveniencia de la aplicación del método $R(\theta)$ en figuras con entalladuras: tres puntos diferentes del contorno tienen el mismo valor de ángulo θ .

4. EL MÉTODO DE LOS DESCRIPTORES DE FOURIER

4.1. INTRODUCCIÓN

El estudio morfológico de partículas ha sido objeto de análisis desde hace mucho tiempo. Tradicionalmente se ha realizado mediante la comparación de partículas individuales con plantillas modelo de formas normalizadas, pero estos métodos son lentos y suelen introducir elementos subjetivos en los resultados. La aplicación del análisis digital de imágenes ha permitido introducir técnicas matemáticas en la descripción de morfologías que eliminan esta indeseada subjetividad.

Una de las técnicas matemáticas que permiten definir formas numéricamente es la aplicación de la transformada de Fourier. Ehrlich y Weinberg (1970) la utilizaron para obtener un índice objetivo que identificara la forma de partículas a todas las escalas, desde su macroforma hasta la microtextura. Otros autores continuaron utilizando esta herramienta matemática para caracterizar numéricamente el contorno de formas individuales (Clark, 1981; Bowman et al. 2001). Su principal ventaja reside en su invariancia frente a la traslación, rotación y tamaño de la forma analizada.

4.2. DISCRETIZACIÓN DE CONTORNOS EN LOS ANÁLISIS DE FOURIER

El primer paso a realizar para la aplicación de la transformada de Fourier al análisis de formas es la obtención de las

coordenadas de su contorno. El método de Fourier exige además que dicho contorno se discretice en coordenadas equiespaciadas respecto de una variable. Inicialmente se empleó el método de Fourier en la forma analítica " $R(\theta)$ " (Ehrlich y Weinberg, 1970), en la que la discretización del contorno se realiza definiendo la distancia R entre sus puntos y el centroide, para diferentes ángulos θ equiespaciados que cubren los 360° del plano. De esta forma, la ecuación que define el contorno resulta:

$$R(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (1)$$

donde $R(\theta)$ es el radio para el ángulo θ , N es el número total de armónicos, n es el número de armónico considerado y a , b son coeficientes que definen el módulo y la fase de cada armónico. Sin embargo este método resulta inaplicable cuando las formas tienen entalladuras en las que existen distintos puntos del perímetro con el mismo ángulo θ (Figura 1).

Una forma de salvar este problema es aplicar el método de los descriptores de Fourier. Este método fue presentado por Clark (1981) en su revisión de análisis cuantitativo de formas, y utilizado posteriormente por Thomas et al. (1995) y Bowman et al. (2001) en el campo de la investigación geológica, aplicándolo a la clasificación de partículas y de poblaciones de suelos respectivamente. En este método, el contorno de la figura se discretiza en puntos equiespaciados a lo largo de todo su perímetro (Figura 2), eliminando la posibilidad de duplicidad de valores en formas complicadas, como ocurría con el método $R(\theta)$.

4.3. DEFINICIÓN DEL MÉTODO DE DESCRIPTORES DE FOURIER

Los descriptores de Fourier son una herramienta matemática muy útil para describir la forma de cualquier objeto que pueda ser definido por una línea de contorno cerrada (partículas, poros, grietas, manchas, etc.). Un ejemplo de las posibilidades de la técnica puede mostrarse a partir del contorno mostrado en la Figura 2. El primer paso es obtener los pares de coordenadas (x,y) que puedan definir numéricamente el contorno con una precisión suficiente (Figura 2a). A continuación se discretiza el contorno mediante puntos equiespaciados a lo largo de su perímetro (Figura 2b). El número de puntos debe ser potencia de 2, y limita el número máximo de descriptores que se obtendrán. De esta forma, la línea que define el borde del objeto se considera perteneciente al plano complejo y es recorrida a velocidad constante. El tamaño de paso debe ser seleccionado de tal forma que la circunnavegación com-

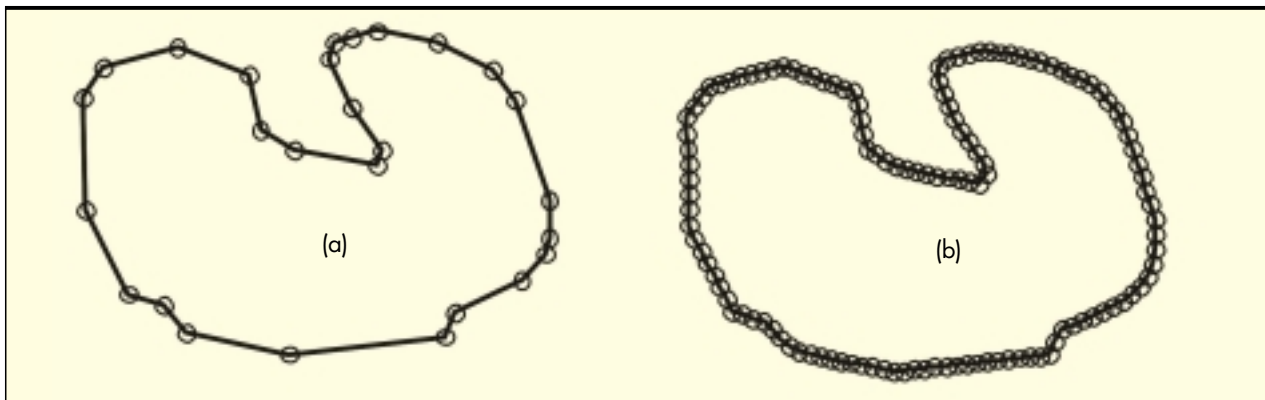


FIGURA 2. A) Discretización del perímetro de una forma mediante puntos representativos. B) mediante puntos equiespaciados.

pleta del perímetro suponga un número de pasos 2^k . En este estudio el número de pasos seleccionado ha sido $2^7 = 128$ puntos equiespaciados para definir cada contorno. Puede obtenerse así una función compleja que define al contorno mediante la aplicación de la transformada de Fourier en el plano complejo a esta serie de coordenadas:

$$x_m + iy_m = \sum_{n=-N/2+1}^{+N/2} Z_n \exp\left(\frac{-i2\pi nm}{M}\right) \quad (2)$$

donde:

x, y son las coordenadas de los puntos o nodos que definen el contorno de la figura,

N es el número total de descriptores utilizados,

n es el número de descriptor,

Z_n es el descriptor de Fourier (número complejo),

M es el número total de puntos que definen el contorno de la figura,

m es el número de punto del contorno considerado,

i denota que se trata de un número imaginario.

Esta transformación puede realizarse fácilmente con una gran variedad de programas informáticos comerciales en los que ya viene implementada, o puede elaborarse un programa propio a medida. En este trabajo se ha utilizado una hoja de cálculo en un programa comercial, que incluye el cálculo de la transformada rápida de Fourier (FFT) entre sus herramientas.

El número de puntos M elegido para definir el contorno determina el número máximo de descriptores N que se pueden obtener y, por tanto, el nivel de detalle alcanzable. En general $N \leq M$, aunque debe recordarse que la regla de Nyquist (Nyquist, 1928) indica que, si lo que se pretende no es volver a reproducir la forma sino analizar sus propiedades, solo deben considerarse los descriptores $n \leq M/2$. Es decir, si el contorno se define con $M = 128$ puntos, se podrán obtener

un máximo de $N = 128$ descriptores ($-63 \leq n \leq +64$), pero en su análisis solo deberían tenerse en cuenta los 64 iniciales ($-31 \leq n \leq +32$).

La influencia del número de descriptores considerado sobre la información de un contorno puede mostrarse gráficamente reconstruyendo la forma de la Figura 2, empleando sucesivamente un número creciente de descriptores. La reconstrucción se hace aplicando la ecuación (2) a los descriptores seleccionados en cada caso de la serie completa de 128 valores. Se obtienen así diferentes conjuntos de 128 coordenadas, que definen contornos que se van aproximando gradualmente al original (Figura 3). Lógicamente, cuando se utilice la serie completa de 128 descriptores en la reconstrucción se obtiene la figura original.

4.4. VENTAJAS DEL MÉTODO DE LOS DESCRIPTORES DE FOURIER

La aplicación del método de los descriptores de Fourier al análisis morfológico de formas presenta dos ventajas importantes sobre el método analítico "R(θ)": evita los problemas de duplicidad de valores en formas con entalladuras (Figura 1) y no necesita la determinación precisa del centroide que sirve como origen de referencia. Pero la gran ventaja de este método consiste en que el análisis de formas mediante descriptores de Fourier puede hacerse fácilmente invariante a la traslación, a la rotación y al tamaño o escala del objeto, es decir: describe su morfología independientemente de su situación, orientación y tamaño.

Como se detalla posteriormente, cada descriptor tiene un significado concreto sobre la forma analizada, pero puede adelantarse ya la manera en que se logra cada invariancia:

- La invariancia con respecto a la traslación se obtiene simplemente eliminando el primer elemento de la serie de armónicos (Z_0), que es el que define la posición del centroide del contorno del objeto.

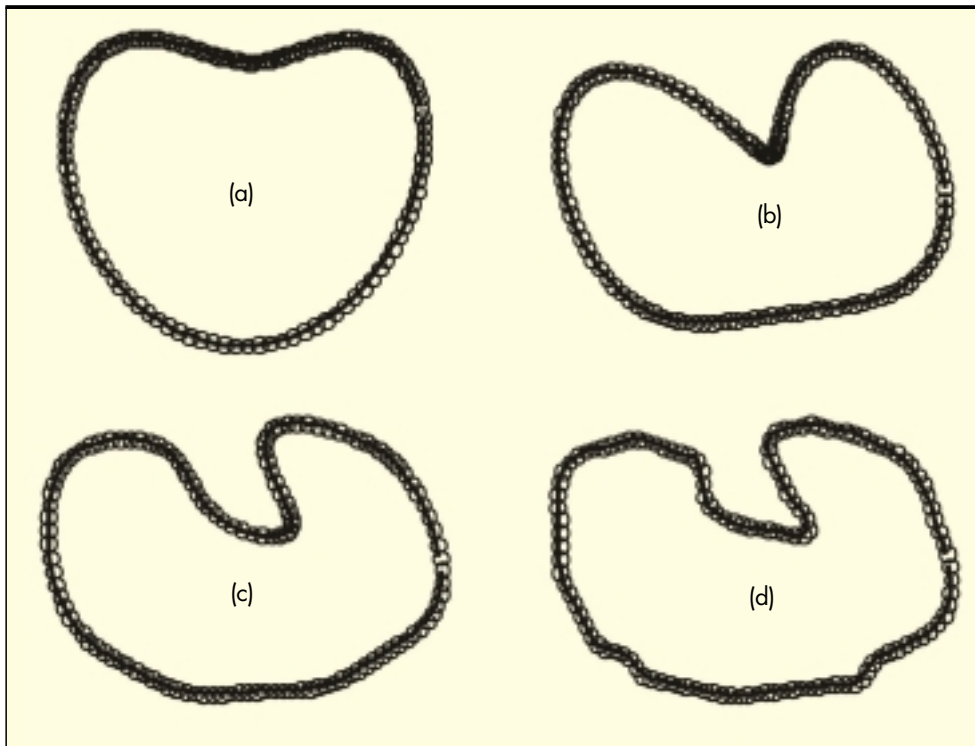


FIGURA 3. Reconstrucción de la Figura 2 con un número creciente de descriptores: $n: -1 \leq n \leq +2$ (a), $-3 \leq n \leq +4$ (b), $-7 \leq n \leq +8$ (c), $-31 \leq n \leq +32$ (d).

Nº de descriptor, n	Significado morfológico
0	Posición (no considerado)
+1	Tamaño (Utilizado para normalizar)
-1	Elongación
+2	Asimetría
-2	Triangularidad
+3	Elongación secundaria
-3	Cuadratura
+4	Triangularidad secundaria
-4	Simetría pentagonal
+5	Cuadratura secundaria
-5	Simetría hexagonal

TABLA 1. Significado morfológico de los descriptores de Fourier de bajo orden.

- Para conseguir la independencia del ángulo de rotación basta con considerar únicamente el valor absoluto o módulo de cada descriptor, ya que la información relativa a la rotación se encuentra en la fase del descriptor. Recuérdese que los descriptores son números complejos y, como tales, pueden ser denominados en términos de un módulo y una fase.
- Finalmente, la invariancia con respecto a la escala se consigue normalizando los descriptores, dividiendo cada uno entre el módulo de Z_{+1} que es el que define el tamaño del objeto.

4.5. SIGNIFICADO MORFOLÓGICO DE LOS DESCRIPTORES DE FOURIER

Cada armónico proporciona una contribución específica a la descripción morfológica total del objeto (Bowman et al., 2001). Los armónicos de bajo orden o primeros armónicos resumen su forma general (Tabla 1), mientras que los armónicos de alto orden describen sus características superficiales o texturales más finas. Sonka et al. (1993) propusieron que los primeros 10 a 15 descriptores eran suficientes para definir formas de gran complejidad, mientras que Bowman et al. (2001) encontraron que tan solo con tres descriptores bastaba para definir partículas de arena.

Puede comprobarse que el punto del contorno elegido como origen de la serie de valores no influye en el resultado de los descriptores obtenidos mediante aplicación de la transformada de Fourier, pero sí su sentido de avance. Si la serie de coordenadas del contorno es recorrida en sentido horario proporcionará unos resultados simétricos a los obtenidos si se recorriera en sentido antihorario, es decir, el descriptor Z_{+n} en un caso pasa a ser el Z_{-n} en el otro. En este trabajo se adopta el criterio de selección de sentido de avance tal que proporcione mayor módulo en el descriptor Z_{+1} que en el Z_{-1} . Este criterio no solo sirve para fijar la metodología de análisis, sino que además permite adimensionalizar fácilmente los resultados. Dado que el descriptor Z_{+1} es el que define el tamaño del objeto, es conveniente que su módulo sea el mayor de todos, puesto que la adimensionalización de la escala de la forma se consigue dividiendo por este módulo.

Para demostrar la variación de los valores de los primeros descriptores de Fourier en función de la morfología, se exponen en la Tablas 2 y 3 los módulos adimensionalizados de los primeros descriptores de algunas figuras geométricas. En la Tabla 2 se muestran los valores de diversas figuras regulares (es decir, cuyos vértices son equidistantes de su centro), que ayudan a valorar la relación entre el módulo de cada descriptor y su significado morfológico; y en la Tabla 3 los valores de elipses, triángulos y rectángulos con diferentes relaciones de ejes.

Significado	Nº de descriptor	Círculo	Triángulo equilátero	Cuadrado	Pentágono regular	Hexágono regular
Tamaño	+1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Elongación	-1	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001
Asimetría	+2	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
Triangularidad	-2	0,0000	0,2500	0,0000	0,0001	0,0000
Elongación secundaria	+3	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001
Cuadratura	-3	0,0000	0,0001	0,1113	0,0000	0,0001
Triangularidad secundaria	+4	0,0000	0,0625	0,0000	0,0001	0,0000
Simetría pentagonal	-4	0,0000	0,0001	0,0000	0,0625	0,0000
Cuadratura secundaria	+5	0,0000	0,0001	0,0402	0,0000	0,0001
Simetría hexagonal	-5	0,0000	0,0400	0,0000	0,0000	0,0400

TABLA 2. Módulos normalizados de descriptores de Fourier de figuras geométricas regulares.

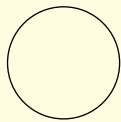
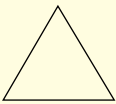
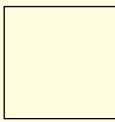






Figura	Nº descriptor	Coef.	Figura	Nº descriptor	Coef.	Figura	Nº descriptor	Coef.
	+1	1,0000		+1	1,0000		+1	1,0000
	-1	0,0000		-1	0,0001		-1	0,0000
	+2	0,0000		+2	0,0001		+2	0,0000
	-2	0,0000		-2	0,2500		-2	0,0000
	+3	0,0000		+3	0,0001		+3	0,0000
-3	0,0000	-3	0,0001	-3	0,1113			
 a = 2b	+1	1,0000	 h = 2b	+1	1,0000	 a = 2b	+1	1,0000
	-1	0,2604		-1	0,4229		-1	0,2680
	+2	0,0000		+2	0,0533		+2	0,0000
	-2	0,0000		-2	0,1828		-2	0,0000
	+3	0,0752		+3	0,0857		+3	0,0814
-3	0,0137	-3	0,0219	-3	0,0814			
 a = 4b	+1	1,0000	 h = 4b	+1	1,0000	 a = 4b	+1	1,0000
	-1	0,5092		-1	0,6690		-1	0,5095
	+2	0,0000		+2	0,0530		+2	0,0000
	-2	0,0000		-2	0,1027		-2	0,0000
	+3	0,1088		+3	0,1188		+3	0,1233
-3	0,0429	-3	0,0253	-3	0,0195			

TABLA 3. Módulos normalizados de descriptores de Fourier de figuras geométricas con diferentes relaciones de ejes.

De los valores de la Tabla 3 destaca comprobar que la relación entre el descriptor -1, que define la elongación, y la razón de ejes principales de las figuras geométricas no es proporcional e, incluso, que depende de la forma de la figura analizada. La relación entre estos parámetros se muestra en la Figura 4 con elipses, rectángulos, rombos (formas geométricas con claros ejes principales) y triángulos isósceles. Estos

últimos se han clasificado en función de su relación altura/base, motivo por el que su valor inicial correspondiente a la figura regular (triángulo equilátero) no es 1,0 como en las otras figuras, sino 0,866; y es además un aspecto que debe ser considerado cuando se compare su curva con las de las otras figuras. De esta comparación entre las curvas se constata la gran similitud entre la de elipses y la de rectángulos.

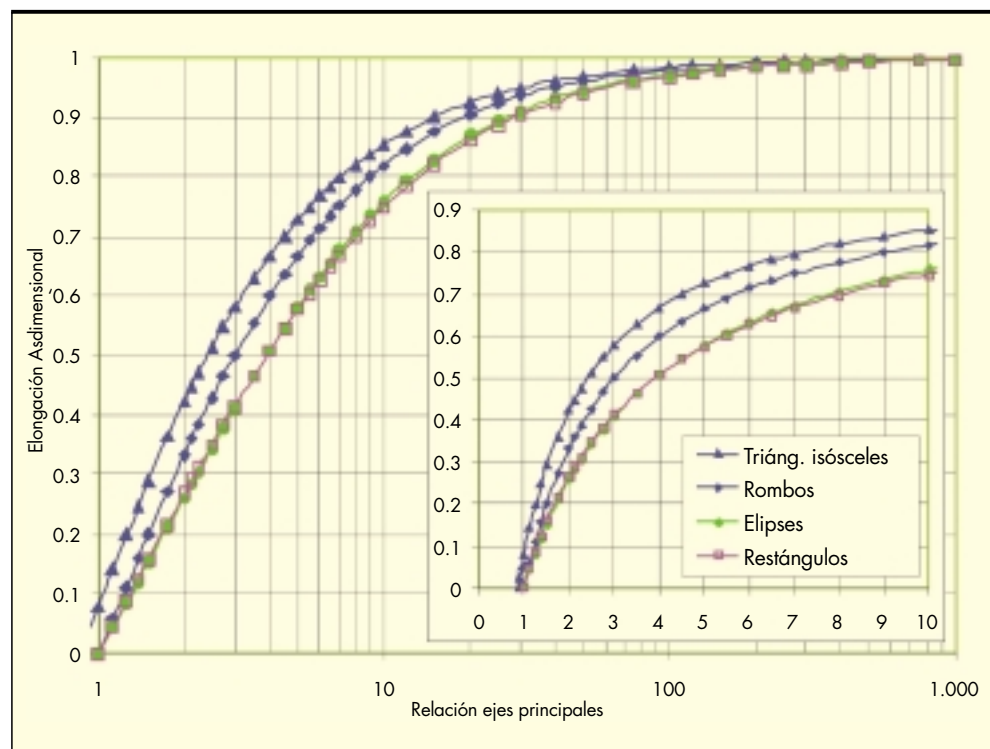


FIGURA 4. Relación entre la elongación adimensional mediante descriptores de Fourier y la razón entre ejes principales de elipses, rectángulos y rombos, y la razón altura/base de triángulos isósceles.

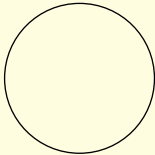
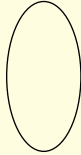
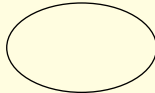
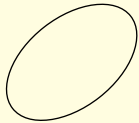
Figura	Descriptor No.	Valor (número complejo)	Valor absoluto normalizado	Fase (Grados)	Fase promedio (grados)
 Círculo	1	9,9880 + i0,4907	1,0000	2,812	—
	-1	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	
	2	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	0,000
	-2	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	
	3	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	0,000
	-3	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	
 Elipse (a)	1	14,4751 + i0,9226	1,0000	3,647	89,999
	-1	-3,7691 + i0,2404	0,2604	176,350	
	2	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	0,000
	-2	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	
	3	-1,0707 - i0,2071	0,0752	-169,053	-90,004
	-3	0,1947 - i0,0377	0,0137	-10,955	
 Elipse (b)	1	14,4971 + i0,4621	1,0000	1,826	0,001
	-1	3,7749 - i0,1202	0,2604	-1,824	
	2	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	0,000
	-2	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	
	3	1,0855 + i0,1040	0,0752	5,473	0,003
	-3	0,1975 - i0,0189	0,0137	-5,468	
 Elipse (c)	1	11,1393 + i9,2895	1,0000	39,826	38,001
	-1	3,0487 + i2,2293	0,2604	36,176	
	2	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	0,000
	-2	0,0000 + i0,0000	0,0000	0,000	
	3	0,7914 + i0,7503	0,0752	43,473	38,003
	-3	0,1673 + i0,1067	0,0137	32,532	

TABLA 4. Descriptores normalizados de Fourier de un círculo y tres elipses mostrando tres orientaciones diferentes: a) vertical, b) horizontal y c) oblicua (38°).

5. APLICACIÓN AL ESTUDIO DE ANISOTROPÍA DE SUELOS Y ROCAS

Dado que las figuras geométricas que más se asemejan a las partículas minerales presentes en los suelos entran en la familia de la esfera y sus elipses derivadas, se exponen en la tabla un círculo y tres elipses donde se puede observar como varían los módulos de los descriptores en función de la elongación de las elipses, como medida de cuánto se aleja la figura de la del círculo. Por otro lado, analizando las fases, se observa que el promedio de los dos descriptores +1 y -1, relativos al tamaño y la elongación respectivamente, proporciona el ángulo entre el eje máximo del objeto y la vertical.

Aplicando este método a un número suficientemente amplio de partículas de un suelo o cristales de una roca, se puede construir una rosa de direcciones con los ángulos definidos anteriormente, con el fin de estudiar la distribución de orientaciones e identificar la posible presencia de orientaciones preferentes en la fábrica.

5.1. UN CASO TEÓRICO

Con el fin de comprender cómo funciona el método de los descriptores de Fourier y qué tipo de información puede obtenerse de sus resultados, se ha creado una sección teórica de una roca compuesta por elipses y rectángulos de diferentes relaciones de ejes, tamaños y orientaciones (Figura 5).

5.2. ANISOTROPÍA: DESCRIPTOR N° 1 "ELONGACIÓN"

La Figura 5 muestra un modelo de partículas de una sección teórica de un material geológico que sugiere un cierto grado de orientación preferente. Se ha creado para esta sección un código de colores (Tabla V) con el fin de reconocer fácilmente la relación de ejes, también denominado aspecto (eje máximo/eje mínimo), de cada una de las "partículas". Según este código, todas las partículas con el mismo color, ya sean elipse o rectángulo, presentan el mismo aspecto, aunque su tamaño en términos absolutos sea diferente.

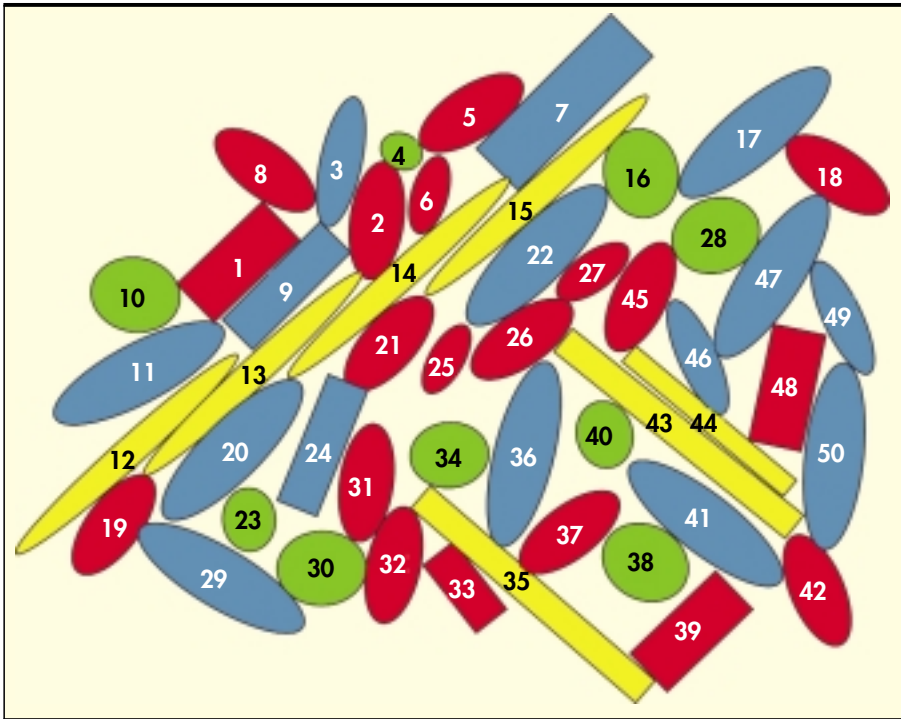


FIGURA 5. Sección teórica de una roca o suelo, compuesta por elipses y rectángulos de diferentes tamaños, relaciones de ejes y orientaciones.

Color	Relación de ejes (a/b)	Descriptor de Fourier normalizado "Elongación"
Verde	1,2	0,070
Rojo	2,2	0,300
Azul	3,2	0,433
Amarillo	10	0,759

TABLA 5. Código de colores de las partículas de la Figura 5.

Se ha calculado el descriptor de Fourier normalizado -1 "Elongación" en cada partícula de la sección teórica. Como muestra la Figura 6, los resultados obtenidos de este descriptor resultaron ser exactamente los mismos en todas las partículas del mismo color, es decir, que presentaban el mismo aspecto o relación de ejes, independientemente de su forma, tamaño u orientación.

Se ha calculado la relación entre el aspecto o relación de ejes y el descriptor de Fourier -1 "Elongación" para todos los posibles valores de relación de ejes comprendidos en el rango entre 1 y 12. En la Figura 7 se observa esta relación, destacándose los valores concretos analizados en este trabajo.

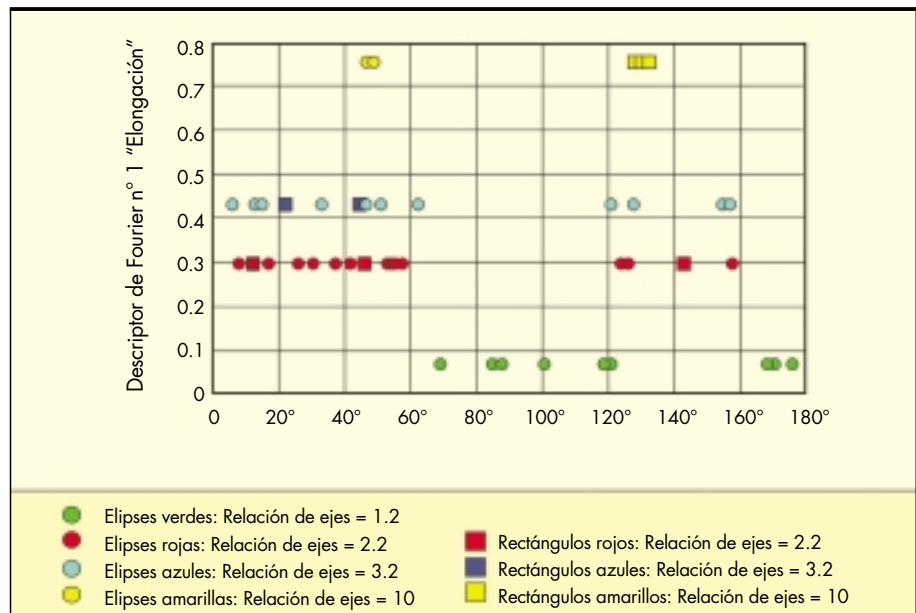


FIGURA 6. Independencia de los valores del descriptor de Fourier -1 "Elongación" de la morfología, tamaño u orientación.

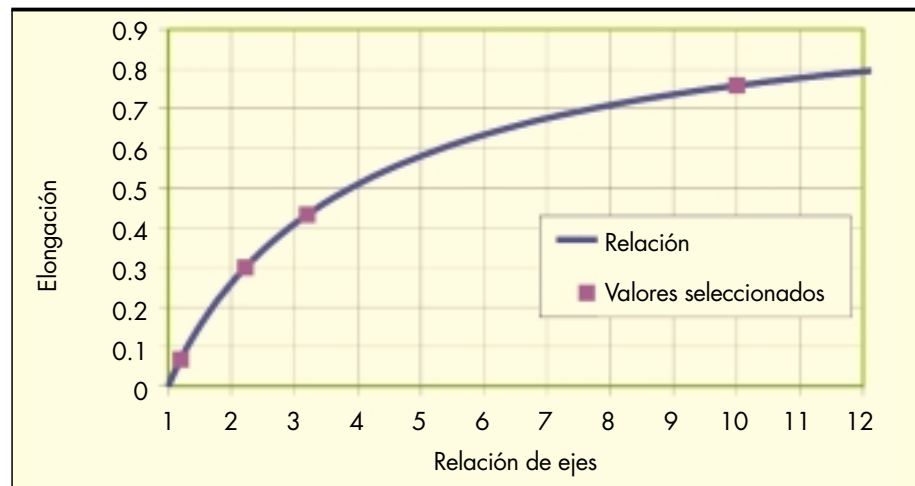


FIGURA 7. Relación entre el descriptor de Fourier normalizado -1 "Elongación" y la relación de ejes. En rosa, destacados, los valores estudiados en este trabajo.

5.3. ORIENTACIÓN DE LAS PARTÍCULAS

Como segundo paso, se puede estudiar la orientación de las partículas a partir de los resultados del análisis de Fourier de la sección teórica de la Figura 5.

Como se ha comentado anteriormente, el valor promedio de las fases de los descriptores +1 (tamaño) y -1 (elongación) coincide con la orientación del ángulo que forma el eje máximo de la partícula con un eje horizontal de referencia, φ (Figura 8). Con este sistema de ejes de coordenadas, los ángulos positivos aumentan en el sentido contrario a las agujas del reloj, mientras los ángulos negativos aumentan en sentido horario. Sin embargo, en estudios de naturaleza geológica, resulta más conveniente que los ángulos se midan a partir de la vertical (0°) y evolucionen en sentido horario hacia los 180° . Por esta razón los ángulos obtenidos mediante Fourier se han transformado según la siguiente ecuación: $\alpha = 90 - \varphi$.

En la Tabla 6 se exponen los valores de la fase de los descriptores +1 (tamaño), -1 (elongación), su promedio, expresado como φ , y su equivalente expresado como α .

Es posible construir una rosa de direcciones con los valores de orientación de las 50 partículas de la Figura 5 (Figura 9). Para ello, se han agrupado los 50 valores en barras radiales cada 5 grados entre 0° y 180° . Dado que la rosa de direcciones es simétrica, no es necesario representar más que una mitad.

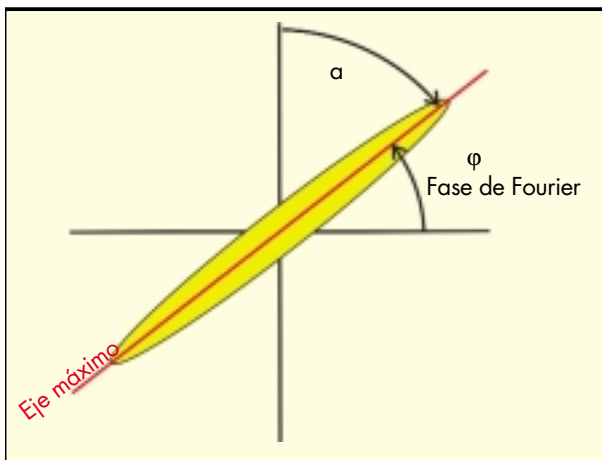


FIGURA 8. Orientación de una partícula.

Este diagrama permite representar un amplio número de medidas de orientación e identificar fácilmente no sólo la presencia de posibles orientaciones preferentes en el material geológico estudiado, sino la distribución estadística de las orientaciones de los elementos de la fábrica analizados en cada caso: partículas individuales, agregados de partículas, poros, grietas, calcificaciones, etc.

En este caso se puede observar la presencia de tres orientaciones más destacadas, de entre las cuales la más intensa o preferente es la orientación $40-50^\circ$.

Cabe destacar que aunque este estudio se ha realizado a partir de las orientaciones de todos los elementos de la sección teórica de roca (mezclando elipses y rectángulos), también podría realizarse separadamente para cada una de las familias de elementos de la fábrica de la roca estudiada, dando lugar a diferentes análisis microestructurales.

6. CONCLUSIONES

El método de los descriptores de Fourier constituye una poderosa herramienta matemática que permite describir matemáticamente la morfología de partículas individuales, agregados de partículas, poros, grietas, etc.

Con el fin de analizar el significado físico y el comportamiento del descriptor de Fourier N° -1 "Elongación", en el que se centra este estudio, se ha creado una sección teórica de una roca a partir de la combinación espacial en dos dimensiones de rectángulos y elipses de diferentes relaciones de ejes. Se ha demostrado que este descriptor es un buen parámetro de cuantificación de la relación de ejes, independientemente del tamaño, morfología u orientación de los objetos analizados.

Finalmente, el valor promedio de la fase de los descriptores de Fourier +1 y -1 proporciona la orientación del eje máximo del objeto con respecto a un eje horizontal de referencia. A partir de esta información obtenida de una población suficiente de elementos en la fábrica de un suelo o roca, es posible construir una rosa de direcciones con el fin de analizar la distribución estadística de dichas orientaciones, así como identificar la presencia de orientaciones preferentes en el material estudiado.

7. AGRADECIMIENTOS

La autora quisiera expresar su más profundo agradecimiento a Jesús Manzanos López, por su fundamental apoyo en el desarrollo matemático del método y sus acertadas correcciones en la redacción del texto. Sin su colaboración, este trabajo no habría sido posible.

Nº Partícula	Fase +1 (grados)	Fase -1 (grados)	Promedio ϕ	0-180° α
1	16.07	71.92	44°	46°
2	83.69	80.31	82°	8°
3	79.26	76.75	78°	12°
4	-25.45	-30.58	-28°	118°
5	34.69	31.31	33°	57°
6	75.69	72.31	74°	16°
7	23.57	66.41	45°	45°
8	-35.31	-38.69	-37°	127°
9	23.57	66.41	45°	45°
10	-7.45	-12.58	-10°	100°
11	29.26	26.75	28°	62°
12	42.45	41.55	42°	48°
13	43.45	42.55	43°	47°
14	42.45	41.55	42°	48°
15	42.45	41.55	42°	48°
16	-77.45	-82.58	-80°	170°
17	41.26	38.75	40°	50°
18	-32.31	-35.69	-34°	124°
19	54.69	51.31	53°	37°
20	46.26	43.75	45°	45°
21	49.69	46.31	48°	42°
22	46.26	43.75	45°	45°
23	-83.45	-88.58	-86°	176°
24	46.57	89.41	68°	22°
25	61.69	58.31	60°	30°
26	36.69	33.31	35°	55°
27	37.69	34.31	36°	54°
28	22.55	17.42	20°	70°
29	-29.74	-32.25	-31°	121°
30	4.55	-0.58	2°	88°
31	83.69	80.31	82°	8°
32	79.69	76.31	78°	12°
33	-79.93	-24.08	-52°	142°
34	7.55	2.42	5°	85°
35	-49.19	-32.82	-41°	131°
36	77.26	74.75	76°	14°
37	38.69	35.31	37°	53°
38	-27.45	-32.58	-30°	120°
39	16.07	71.92	44°	46°
40	-75.45	-80.58	-78°	168°
41	-36.74	-39.25	-38°	128°
42	-65.31	-68.69	-67°	157°
43	-47.19	-30.82	-39°	129°
44	-48.19	-31.82	-40°	130°
45	65.69	62.31	64°	26°
46	-64.74	-67.25	-66°	156°
47	58.26	55.75	57°	33°
48	50.07	105.92	78°	12°
49	-63.74	-66.25	-65°	155°
50	85.26	82.75	84°	6°

TABLA 6. Descriptores de Fourier +1 y -1, su promedio y la orientación de cada partícula expresada como α .

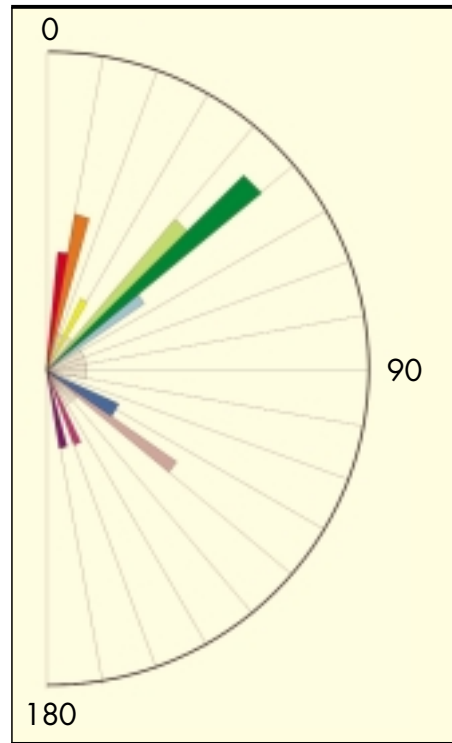


FIGURA 9. Rosa de direcciones construida a partir de las orientaciones de las 50 partículas de la Figura 5.

8. BIBLIOGRAFÍA

Bowman, E.T., Soga, K. & Drummond, T.W. (2001): "Particle shape characterisation using Fourier descriptor analysis". *Geotechnique*, Vol. 51, No. 6, pp. 545-554.

Clark, M.W. (1981): "Quantitative shape analysis: a review". *Math. Geo.* Vol. 13, No. 4, pp. 303-320.

De Santiago, C. & Manzanar, J. (2008): "Fourier descriptors analysis of anisotropy and preferred orientation in geological samples". II European Conference of International Association for Engineering Geology: Cities and their Underground Environment. Madrid, 15-19 Septiembre de 2008.

De Santiago, C., Santana, M. & Manzanar, J. (2008): "Digital Image processing and Fourier descriptors analysis of the porosity in various volcanic rocks". Proceedings of the International geotechnical conference "Development of urban areas and geotechnical engineering conference". Saint Petersburg, Russia. June 16-19.

Ehrlich, R. & Weinberg, B. (1970): "An exact method for characterization of grain shape". *J. Sediment. Petrol.*, Vol. 40, No. 1, pp. 205-212.

Gallegos, J.A. (1992): "Errores conceptuales en geología: Los conceptos de isotropía-anisotropía y propiedad escalar-propiedad vectorial". *Enseñanza de las ciencias*, Vol. 10, pp. 160-164.

Krumbein, W.C. (1941): "Measurement and geological significance of shape and roundness of sedimentary particles" *Journal of Sedimentary Research*, Vol. 11 (2), pp. 64-72.

Lafeber, D. (1966): "Soil structural concepts". *Engineering Geology*, Vol. 1, No. 4, pp. 261-290.

Mahmood, A., and Mitchell, J.K. (1974): "Fabric-property relationships in fine granular materials". *Clays and Clay Minerals*, Vol. 22, No. 5/6, pp. 397-408.

Nyquist, H. (1928): "Certain topics in telegraph transmission theory" *Trans. AIEE*, Vol. 47, pp. 617-644.

Oda, M. (1972): "Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material". *Soils and Foundations*, Vol.12, No. 2, pp. 1-18.

Sonka, M., Hlavac, V. & Boyle, R. (1993). "Image processing analysis and machine vision". London, Chapman & Hall.

Thomas, M.C., Wiltshire, R.J. & Williams, A.T. (1995). "The use of Fourier descriptors in the classification of particle shape". *Sedimentology*, No. 42, pp. 635-645.

Wadell, H. (1935) : "Volume, Shape and Roundness of Quartz Particles". *Journal of Geology* Vol. 43, pp. 250-280.