

Densidad variable en fluidos incompresibles. Discusión de la condición de divergencia nula

ANTONIO RUIZ MATEO (*)

RESUMEN El uso habitual de las hipótesis de fluido incompresible, densidad constante y divergencia nula del campo de velocidades hace que se tenga la falsa impresión de que son equivalentes. Este artículo comienza precisando las diferencias y dando ejemplos importantes de flujo de fluidos incompresibles con densidad variable. A continuación se presenta un conjunto ordenado de sistemas completos de ecuaciones para el caso general de fluido con densidad variable y para algunos casos particulares, incluyendo las alternativas de lagrangianas/eulerianas, concentración por unidad de volumen/concentración por unidad de masa y régimen laminar/régimen turbulento. Es de destacar el desarrollo completo de las ecuaciones del transporte en régimen turbulento para densidad variable, en el que aparecen varios términos de turbulencia para los que hasta el momento no se han propuesto hipótesis de cálculo a pesar de que son relativamente importantes.

VARIABLE DENSITY IN INCOMPRESSIBLE FLUIDS. DISCUSSION OF THE ZERO DIVERGENCE CONDITION

ABSTRACT The habitual use of the hypothesis of incompressible fluids, constant density and zero divergence of the velocity field causes the false notion that they are equivalent. This article begins by detailing the differences and giving important examples of the flow of incompressible fluids of variable density. Then an ordered set of complete equation systems is shown for the general case of variable density fluids and for certain specific cases, including the Lagrangian/Eulerian alternatives, unit volume concentration/unit mass concentration and laminar flow/turbulent flow. One notable point is the complete development of the transport equations for turbulent flow with variable density, in which several turbulence terms appear for which no calculation hypothesis has been put forward yet, in spite of the fact that they are relatively important.

Palabras clave: Hidráulica; Mecánica de fluidos; Flujo incompresible; Densidad variable; Vertidos de aguas residuales.

1. INTRODUCCIÓN

En el campo de la Ingeniería Hidráulica, el uso habitual de las hipótesis de fluido incompresible, densidad constante (en el tiempo y en el espacio) y divergencia nula del campo de velocidades hace que a veces se confundan estos conceptos o, al menos, que se tenga la falsa impresión de que cualquiera de ellas implica las otras dos y, por tanto, que son hipótesis equivalentes.

La hipótesis de fluido incompresible consiste en suponer que una variación de presión, manteniendo constante otras dos variables de estado (por ejemplo, la temperatura y la salinidad), no produce una variación de densidad, lo cual puede expresarse mediante:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{TS} = 0$$

donde se ha usado la notación usual en termodinámica de indicar con subíndices que la derivada parcial se calcula manteniendo constante la temperatura T y la salinidad S .

Sin embargo, aunque se adopte esta hipótesis, la cual está justificada casi siempre cuando se trata de líquidos (excepciones notables son la transmisión del sonido en Oceanografía y el golpe de ariete en Ingeniería Hidráulica), no se implica que la densidad deba ser constante, pues ésta depende también de la temperatura y de la salinidad.

En efecto, aunque los coeficientes de compresibilidad, expansividad térmica y contractibilidad salina no son constantes, puede admitirse que la variación de densidad producida por un incremento de salinidad de 2 g/l ($d\rho/\rho = 1,5 \cdot 10^{-3}$) es aproximadamente igual a la que produce una reducción de temperatura de 7° C o un aumento de presión hidrostática de 350 m de agua de mar. Esto quiere decir que la diferencia de densidad existente entre el agua dulce y el agua de mar es mayor que la que producirá la presión hidrostática del espesor de los océanos y que, por lo tanto, los gradientes de densidad existentes en un encuentro de aguas dulces y saladas son varios órdenes de magnitud superiores a los debidos a la presión hidrostática. Este hecho justifica que pueda aceptarse la hipótesis de fluido incompresible, pero también, que deban tenerse en cuenta las variaciones de densidad debidas a la salinidad y a la temperatura. De hecho, existen casos importantes en los que hay que tener en cuenta las variaciones de densidad en el espacio y en el tiempo.

(*) Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Centro de Estudios de Puertos y Costas, del CEDEX.

Así, por ejemplo, en el campo de la Oceanografía, el aumento de densidad que experimenta el agua superficial en las proximidades de los Polos debido al doble efecto del enfriamiento y del aumento de salinidad por formación de hielo, hace que se hundan enormes masas de agua, que son sustituidas por otras más templadas procedentes de latitudes menores, y que se extienden lentamente por el fondo de los océanos llegando a cruzar el Ecuador y a rodear los continentes.

En Oceanografía Costera, las aguas dulces aportadas por los ríos constituyen otro caso importante de densidad variable. En los estuarios y desembocaduras de los ríos, estas aguas tienden a extenderse por encima del agua del mar, pero también se mezclan con ellas, dando lugar a fenómenos complejos de formación de frentes, corrientes de convección, etc., sin olvidar que aportan gran cantidad de nutrientes, pero también sólidos en suspensión y, posiblemente, sustancias contaminantes, cuya evolución y destino final es objeto hoy de numerosos estudios.

También en Ingeniería Hidráulica hay un caso cada vez más importante de densidad variable en fluidos incompresibles. Se trata de los vertidos al mar de aguas residuales a través de emisarios submarinos, puesto que se introduce agua dulce y con una temperatura mayor que la del medio receptor, lo que da lugar a importantes diferencias de densidad. El estudio de los chorros que se forman al salir el efluente por las boquillas del tramo difusor requiere un cuidadoso análisis de las variaciones de densidad por una doble razón: son las responsables del empuje por flotabilidad que tienden a curvar en sentido ascendente la trayectoria del chorro, y además, están correlacionadas con las variaciones de concentración de las sustancias contaminantes disueltas en el efluente.

2. ECUACIONES GENERALES EN RÉGIMEN LAMINAR

Aunque el planteamiento mediante ecuaciones integrales es más general (Truesdell y Tupin, 1960; Eringen, 1975), como no estamos interesados en estudiar las discontinuidades, utilizaremos un enfoque local (ecuaciones diferenciales) que además suele ser más familiar (Le Blond y Mysak, 1978; Mei, 1989; Phillips, 1977) para la mayoría de científicos e ingenieros.

Recordemos que si P representa la concentración por unidad de volumen de una cierta propiedad π (dimensión M_L), la derivada material DP/Dt representa la variación que experimenta la concentración P en un elemento de fluido constituido por partículas materiales que se desplazan con el movimiento y que, como consecuencia de éste, hacen que el volumen de dicho elemento vaya variando.

Por otra parte, si llamamos p al vector densidad de flujo de la propiedad π (dimensión de p : $M_L T^{-1} L^{-2}$), la divergencia de p representa la cantidad de π que sale del elemento fluido por unidad de tiempo y por unidad de volumen (dimensión de $\text{div } p$: $M_L T^{-1} L^{-3}$).

En el caso general, suponemos que la densidad depende de las tres variables de estado presión, temperatura y salinidad, mediante una función de estado conocida:

$$\rho = \rho(p, T, S) \quad [1]$$

La ecuación de conservación de la masa puede derivarse atendiendo a la variación de densidad que experimenta un elemento de fluido a lo largo del movimiento (método lagrangiano) o atendiendo a la que experimenta el contenido de un elemento de volumen fijo en el espacio (método euleriano). Las ecuaciones que se obtienen son, respectivamente:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \text{ div } u \quad [2, L]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} (\rho u) \quad [2, E]$$

pudiendo obtenerse cualquiera de ellas a partir de la otra mediante transformaciones matemáticas bien conocidas.

La interpretación de [2, L] resulta más fácil si se tiene en cuenta que la velocidad u puede verse como una densidad de flujo de la propiedad "volumen", siendo por tanto $\text{div } u$ la tasa de incremento relativo de volumen. La ecuación [2, L] establece que ésta equilibra la tasa de decremento relativo de densidad, lo que implica la invariancia de la masa. La interpretación de [2, E] se hace de forma análoga si se tiene en cuenta que ρu es la densidad de flujo de la propiedad "masa del fluido", por lo que $\text{div} (\rho u)$ representa la tasa de pérdida de masa por unidad de volumen, que por [2, E] está equilibrada con la tasa de decremento absoluto de densidad.

La ecuación de conservación del momento cinético o impulso puede escribirse:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho 2\Omega \times u = -\text{grad } p + \rho g + f \quad [3, L]$$

donde el primer término representa el producto de la masa por la aceleración y el segundo, la fuerza de Coriolis, siendo Ω la velocidad angular de rotación de la Tierra; p , la presión; g , el vector aceleración de la gravedad; y f , la resultante de las demás fuerzas (fundamentalmente, las fuerzas de viscosidad: $f = \text{div } \tau$, siendo τ el tensor de tensiones viscosas). Conviendremos en representar en negrilla las magnitudes y operadores de naturaleza vectorial o tensorial.

Aunque esta ecuación es muy importante en la resolución del sistema, no tiene interés para el objeto del presente artículo, por lo que no entraremos en su análisis.

La ecuación euleriana equivalente es:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \rho 2\Omega \times u = -\text{div} (\rho u \otimes u) - \text{grad } p + \rho g + f \quad [3, E]$$

donde el símbolo $\otimes$ representa el producto tensorial y, por lo tanto, la divergencia tiene naturaleza vectorial.

Puesto que esta ecuación es vectorial, equivale a tres ecuaciones escalares que, junto con la de conservación de la masa y la función de estado suman cinco ecuaciones. Para determinar las siete variables ρ , p , T , S y las tres componentes de u , necesitamos otras dos ecuaciones que se obtienen al expresar los balances de sal y de calor.

Respecto al primero, si llamamos S a la concentración de sal por unidad de volumen (dimensión $M_S L^{-3}$, siendo M_S la masa de sal) el balance de sal puede establecerse mediante la ecuación:

$$\frac{DS}{Dt} = -S \text{ div } u - \text{div } s \quad [4, L]$$

siendo s el vector densidad de flujo no convectivo de sal (dimensión $M_S L^{-2} T^{-1}$) ya que el efecto del flujo convectivo está contenido en la derivada material del primer miembro. El primer sumando del segundo miembro aparece debido al cambio de volumen que experimenta el elemento de fluido (recordemos que S es una concentración por unidad de volumen).

La interpretación de esta ecuación es la siguiente: el incremento que, por unidad de tiempo, se produce en la cantidad de sal contenida en un elemento de fluido que se deforma con el movimiento es igual al producto de la

concentración de sal por la contracción de volumen que experimenta dicho elemento, más la sal que se acumula debido a la falta de homogeneidad del transporte no convectivo.

Con cierta frecuencia en la literatura el empleo de otra salinidad $\hat{S}$, definida como la concentración de sal por unidad de masa de disolución (dimensión $M_2 \cdot M^{-1}$). La relación entre ambas salinidades es simplemente la densidad, por lo que la ecuación análoga a [4, L] para $\hat{S}$ se obtiene simplemente sustituyendo en ésta S por $\rho\hat{S}$.

$$\frac{D(\rho\hat{S})}{Dt} = -\rho\hat{S} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{s}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

$$\frac{D(\rho\hat{S})}{Dt} = \rho \frac{D\hat{S}}{Dt} + \hat{S} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{D\hat{S}}{Dt} - \rho\hat{S} \operatorname{div} \mathbf{u}$$

esta ecuación puede simplificarse resultando:

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -\operatorname{div} \mathbf{s} \quad [4, \hat{L}]$$

Comparando [4, L] y [4, $\hat{L}$] se ve que si en un flujo determinado no hubiera transporte no convectivo ($\mathbf{s} = 0$), pero sí variación de volumen y, por tanto, de densidad ($\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$), S variaría, pero no así $\hat{S}$, como corresponde al hecho de estar definida como concentración por unidad de masa.

Por otra parte, si en [4, L] se expresa la derivada material como suma de las derivadas local y convectiva, y se despeja la primera de éstas se obtiene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} S - S \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{s} = -\operatorname{div}(S\mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{s}$$

o sea:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\operatorname{div}(S\mathbf{u} + \mathbf{s}) \quad [4, E]$$

cuya interpretación es directa: la tasa de incremento local de salinidad es igual a la tasa de entrada de sal por unidad de volumen debida al transporte total de sal (convectivo más no convectivo).

Para completar las distintas formas que puede adoptar la ecuación del balance de sal, escribiremos también la forma euleriana referida a la variable $\hat{S}$, que se obtiene de [4, E] sin más que sustituir S por $\rho\hat{S}$:

$$\frac{\partial(\rho\hat{S})}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho\hat{S}\mathbf{u} + \mathbf{s}) \quad [4, \hat{E}]$$

Obsérvese que las ecuaciones [4, E] y [4, L] tienen ventaja sobre las [4, $\hat{E}$] y [4, $\hat{L}$] no aparece explícitamente la densidad y, relacionado con ello, tienen menos términos no lineales, lo cual, como se verá más adelante, tiene una gran importancia para la deducción de las ecuaciones en régimen turbulento.

Sin embargo, cuando se toma una muestra y se determina la salinidad en laboratorio, el resultado que se obtiene directamente es $\hat{S}$, y si se desea calcular S , hay que calcular separadamente ρ (midiendo también p y T y aplicando la ecuación [1]) para poder formar el producto $\rho\hat{S}$.

El conjunto de ecuaciones [4] constituyen un modelo que nos permite expresar el balance de cualquier otra propiedad o sustancia disuelta en un fluido. En particular, las ecuaciones [2, L] y [2, E] son análogas a las [4, L] y [4, E] si se considera como propiedad la masa y se tiene en cuenta que el flujo laminar no convectivo de masa no existe.

Si como ocurre con la mayoría de las sustancias que transporta el agua (nutrientes, bacterias, oxígeno disuelto), la propiedad π en cuestión puede ser generada (o eliminada) en el seno del fluido, llamando Π a la tasa de generación por unidad de volumen (dimensión $M_2 \cdot L^{-3} \cdot T^{-1}$), basta añadir dicha función a la derecha de cualquiera de las ecuaciones [4]. Así, por ejemplo, la ecuación análoga a la [4, E] sería:

$$\rho \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho\pi\mathbf{u} + \mathbf{p}) + \Pi$$

El balance de calor plantea problemas porque no constituye una variable de estado. Sin embargo, la suma del calor absorbido por el elemento de fluido más el trabajo realizado sobre éste por las fuerzas exteriores si lo es, y su concentración se mide mediante la variable $\hat{U}$ (energía interna por unidad de masa). El balance de energía interna puede expresarse como:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \operatorname{div} \mathbf{q} - p \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} + Q \quad [5a, \hat{L}]$$

siendo $\mathbf{q}$ la densidad de flujo de calor y Q , la tasa de generación de calor por unidad de volumen (debida a las fuerzas viscosas y a cualquier otra causa). El segundo sumando del segundo miembro representa el trabajo de la presión exterior sobre la contracción de volumen.

Sin embargo, para la mayor parte de las aplicaciones es conveniente expresar la ecuación anterior en función de la temperatura y del calor específico. Para ello despreciaremos el efecto de las variaciones de salinidad sobre la temperatura.

El primer principio de la termodinámica puede enunciarse de diversas maneras. La forma entrópica, denominada ecuación fundamental de la termodinámica (Aguilar Peris, 1990; Yavorski y Detlaf, 1977) es la siguiente:

$$Td\hat{S} = d\hat{U} + p d\hat{V}$$

donde $\hat{S}$ es la entropía y $\hat{V}$ el volumen, ambos por unidad de masa (Recuérdese que $\hat{V} = 1/\rho$).

Por otra parte, una de las tres relaciones conocidas como "ecuaciones $Td\hat{S}$ " es:

$$Td\hat{S} = C_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} d\hat{V}$$

Igualando las dos últimas expresiones y despejando $d\hat{U}$:

$$d\hat{U} = \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \right] d\hat{V} + c_v dT$$

con la cual, el primer miembro de la expresión [5a, $\hat{L}$] puede escribirse:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\hat{V}} \right] \rho \frac{D\hat{V}}{Dt} + \rho c_v \frac{DT}{Dt}$$

donde ya nos aparece la derivada de la temperatura. Para completar el cambio, calculemos la derivada del volumen:

$$\rho \frac{D\hat{V}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \operatorname{div} \mathbf{u}$$

de acuerdo con [2, L].

Sustituyendo esta expresión en la anterior, y el resultado en [5a, $\hat{L}$], tras despejar el término de la derivada de T queda:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \operatorname{div} \mathbf{u} + Q \quad [5b, L]$$

o bien, utilizando el concepto de coeficiente piezotérmico a volumen constante:

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

se convierte en:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - \beta p T \operatorname{div} \mathbf{u} + Q \quad [5c, L]$$

La expresión euleriana equivalente a ésta tiene una expresión sencilla sólo si se considera que c_v es constante en el espacio y en el tiempo, en cuyo caso se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho c_v T \mathbf{u} + \mathbf{q}) - \beta p T \operatorname{div} \mathbf{u} + Q \quad [5, E]$$

Cualquier sistema constituido por la ecuación [1] y una cualquiera de cada uno de los conjuntos de ecuaciones [2] a [5] constituye un sistema completo que, junto con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno, y con las hipótesis que permitan expresar los vectores $\mathbf{f}$, $\mathbf{s}$ y $\mathbf{q}$, así como el escalar Q como funciones conocidas o en función de las variables ρ , p , T , S y $\mathbf{u}$, permitirá calcular éstas.

Las hipótesis más usuales son:

- $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ (fluido no viscoso), $\mathbf{f} = \mu \Delta \mathbf{u}$ (flujo isocórico, ver más adelante) ó $\mathbf{f} = \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) + \frac{\Delta \mu}{3} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u})$ (fluido newtoniano), siendo μ la viscosidad y Δ , el operador laplaciano vectorial.
- $\mathbf{s} = -D \operatorname{grad} S$, siendo D el coeficiente de difusión.
- $\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T$, siendo k la conductividad térmica.
- $Q = 0$ (fluido no viscoso sin generación de calor), $Q =$ función conocida (por ejemplo, calentamiento por la penetración de la radiación solar) o $Q = \tau : \operatorname{grad} \mathbf{u}$, siendo τ el tensor de tensiones viscosas y $:$, el producto tensorial doblemente contraído (calentamiento por rozamiento interno).

3. ECUACIONES GENERALES EN RÉGIMEN TURBULENTO

Las ecuaciones del movimiento en régimen turbulento se obtienen descomponiendo cada variable en suma de su valor medio más una desviación, sustituyendo en las ecuaciones para régimen laminar y calculando los valores medios de las ecuaciones resultantes. De esta forma se obtiene un sistema con igual número de ecuaciones, donde cada una de ellas es formalmente idéntica a la correspondiente al régimen laminar (sustituyendo cada variable por su valor medio), excepto por la aparición de algunos términos nuevos, procedentes del promedio de los términos no lineales, en los que aparece la covarianza de los productos de las desviaciones de las variables (ver, por ejemplo, Hinze, 1959, o Townsend, 1976). La función de estado [1] constituye una excepción porque no tiene una forma analítica sencilla. No obstante, si las desviaciones son pequeñas respecto a los valores medios, se puede utilizar una aproximación linealizada:

$$\bar{\rho} + \rho' = \rho(\bar{p}, \bar{T}, \bar{S}) + k_p \bar{p}' + k_T \bar{T}' + k_S \bar{S}'$$

donde, como es usual, se ha utilizado un subrayado para indicar valores medios y un apóstrofo para indicar desviaciones. Al tomar valores medios en esta expresión se obtiene directamente:

$$\bar{\rho} = \rho(\bar{p}, \bar{T}, \bar{S}) \quad [6]$$

La ecuación [2, E] se convierte en:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\bar{\rho} \mathbf{u} + \overline{\rho' \mathbf{u}'}) \quad [7, E]$$

La covarianza $\overline{\rho' \mathbf{u}'}$ tiene dimensiones de densidad de flujo de masa y representa el transporte convectivo turbulento, es decir, el transporte de masa que existirá aun cuando la velocidad media $\bar{\mathbf{u}}$ fuera nula, por el simple hecho de coincidir frecuentemente valores positivos de ρ' con un sentido determinado de la corriente.

Si definimos la derivada material turbulenta como aquella que se refiere a un elemento fluido que se desplaza, no de acuerdo con el campo de velocidades instantáneas, sino siguiendo el campo de velocidades medias:

$$\left(\frac{D\bar{\rho}}{Dt} \right)_{\text{arb}} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{grad} \bar{\rho}$$

la expresión [7, E] puede escribirse como:

$$\left(\frac{D\bar{\rho}}{Dt} \right)_{\text{arb}} = -\bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} - \operatorname{div} \overline{\rho' \mathbf{u}'} \quad [7, L]$$

que es la análoga a [2, L]. A esta expresión puede llegar también a partir de [2, L] si se desarrolla la derivada material y se le aplica el proceso de descomposición y promediado.

Es interesante observar que las ecuaciones [7] se parecen más a las [4, L] y [4, E], que a las [2], que son de donde proceden, lo cual refuerza la interpretación de $\overline{\rho' \mathbf{u}'}$ como una densidad de flujo independiente del flujo convectivo debido a las velocidades medias.

La ecuación [3, E] se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \mathbf{u})}{\partial t} + \bar{\rho} 2\Omega \times \bar{\mathbf{u}} = & -\operatorname{div}(\bar{\rho} \mathbf{u} \otimes \bar{\mathbf{u}}) - \operatorname{grad} \bar{p} + \\ & + \bar{\rho} \mathbf{g} + \bar{\mathbf{f}} - \frac{\partial(\overline{\rho' \mathbf{u}'})}{\partial t} - 2\Omega \times \overline{\rho' \mathbf{u}'} - \operatorname{div}(\overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}) - \\ & - \operatorname{div}(\overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \bar{\mathbf{u}}}) - \operatorname{div}(\bar{\mathbf{u}} \otimes \overline{\rho' \mathbf{u}'}) - \operatorname{div}(\overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}) \end{aligned} \quad [8, E]$$

es decir, el efecto de la turbulencia viene determinado, además de por las conocidas tensiones de Reynolds ($\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$), por otra covarianza doble ($\overline{\rho' \mathbf{u}'}$) y por una covarianza triple ($\overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$). Obsérvese que en estas dos últimas intervienen las desviaciones de la densidad, mientras que en las tensiones de Reynolds sólo interviene su valor medio.

Mediante transformaciones algebraicas algo tediosas se puede obtener la forma lagrangiana de esta ecuación:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} \right)_{\text{arb}} + \bar{\rho} 2\Omega \times \bar{\mathbf{u}} = & -\operatorname{grad} \bar{p} + \bar{\rho} \mathbf{g} + \bar{\mathbf{f}} - \\ & - \left(\frac{D(\overline{\rho' \mathbf{u}'})}{Dt} \right) - 2\Omega \times \overline{\rho' \mathbf{u}'} - \operatorname{div}(\overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}) - \\ & - \operatorname{grad} \bar{\mathbf{u}} \cdot \overline{\rho' \mathbf{u}'} - \overline{\rho' \mathbf{u}'} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} - \operatorname{div}(\overline{\rho' \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}) \end{aligned} \quad [8, L]$$

donde se ve también que las desviaciones de la densidad intervienen en todos los términos turbulentos excepto en las tensiones de Reynolds. Además, si exceptuamos el último término (que por ser una covarianza triple, seguramente va a ser muy pequeño), las desviaciones de densidad siempre aparecen formando el producto $\bar{\rho}'\bar{u}'$, que, como se vio más arriba, representa la densidad de flujo convectivo turbulento.

La ecuación [4, E] se convierte en:

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = -\text{div}(\bar{S}\bar{u} + \bar{s} + \bar{S}'\bar{u}') \quad [9, E]$$

siendo $\bar{S}'\bar{u}'$ un transporte convectivo turbulento de sal. A partir de aquí, aplicando la definición de derivada material turbulenta se obtiene directamente:

$$\left(\frac{D\bar{S}}{Dt}\right)_{\text{turb}} = -\bar{S} \text{div} \bar{u} - \text{div}(\bar{s} + \bar{S}'\bar{u}') \quad [9, L]$$

La transformación de [4, L] llevaría a una ecuación algo más complicada, pero completamente equivalente a [9, L].

Por otra parte, de [4, E] se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{S})}{\partial t} = & -\text{div}(\bar{\rho}\bar{S}\bar{u} + \bar{s}) - \frac{\partial(\bar{\rho}'\bar{S}')}{\partial t} - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{u}'\bar{S}') - \\ & -\text{div}(\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}') - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}') - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}') \end{aligned} \quad [9, E]$$

ecuación en la que aparece un transporte de sal debido al transporte convectivo turbulento de masa ($\bar{\rho}'\bar{u}'\bar{S}'$), otros dos transportes debidos a covarianzas dobles ($\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}'$) y ($\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}'$) otro debido a una covarianza triple ($\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}'$).

Hay que hacer notar que la covarianza $\bar{\rho}'\bar{S}'$ suele tomar valores elevados en las superficies de encuentro de aguas dulces y saladas (desembocaduras de los ríos, vertidos de aguas residuales) ya que ρ está muy influenciada por la salinidad y, además, por la temperatura, que también suele ser bastante diferente en estos casos.

Las ecuaciones [9, E] y [9, L] pueden compararse mejor si se tiene en cuenta que:

$$S = \bar{S} + S' = (\bar{\rho} + \rho') \cdot (\bar{S} + S') = \bar{\rho}\bar{S} + \bar{\rho}'\bar{S}' + \bar{\rho}\bar{S}' + \bar{\rho}'\bar{S}$$

y por lo tanto, tomando valores medios:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{\rho}\bar{S} + \bar{\rho}'\bar{S}' \\ S' &= \bar{\rho}\bar{S}' + \bar{\rho}'\bar{S} \end{aligned}$$

Para obtener la forma lagrangiana, hay que tener en cuenta que ahora:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D(\bar{\rho}\bar{S})}{Dt}\right)_{\text{turb}} &= \bar{\rho} \left(\frac{D\bar{S}}{Dt}\right)_{\text{turb}} + \bar{S} \left(\frac{D\bar{\rho}}{Dt}\right)_{\text{turb}} = \\ &= \bar{\rho} \left(\frac{D\bar{S}}{Dt}\right)_{\text{turb}} - \bar{\rho}\bar{S} \text{div} \bar{u} - \bar{S} \text{div} \bar{\rho}'\bar{u}' \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de [7, L]. Por otra parte:

$$\left(\frac{D(\bar{\rho}\bar{S})}{Dt}\right)_{\text{turb}} = \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{S})}{\partial t} + \bar{u} \cdot \text{grad}(\bar{\rho}\bar{S})$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones, despejando la derivada parcial de $\bar{\rho}\bar{S}$ con respecto al tiempo y sustituyendo en [9, E] resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{D\bar{S}}{Dt}\right)_{\text{turb}} &= -\text{div} \bar{s} - \left(\frac{D(\bar{\rho}'\bar{S}')}{Dt}\right)_{\text{turb}} - \\ &- \text{div}(\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}') - \bar{\rho}'\bar{S}' \text{div} \bar{u} - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}') \end{aligned} \quad [9, L]$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$\bar{u} \cdot \text{grad}(\bar{\rho}\bar{S}) + \bar{\rho}\bar{S} \text{div} \bar{u} = \text{div}(\bar{\rho}\bar{S}\bar{u})$$

y que:

$$\text{div}(\bar{\rho}'\bar{S}'\bar{u}') = \bar{u} \cdot \text{grad}(\bar{\rho}'\bar{S}') + \bar{\rho}'\bar{S}' \text{div} \bar{u}$$

Las ecuaciones que gobiernan la evolución de las temperaturas en un régimen turbulento se deducen aplicando este mismo procedimiento a las ecuaciones [5c, L] y [5, E]. Como en éstas existen productos de hasta cuatro variables, sólo vamos a considerar aquí el caso en que los coeficientes c_v y β son constantes.

Aprovechando la analogía de las ecuaciones [5c, L] y [5, E] con las [4, L] y [4, E], y teniendo en cuenta que de ésta últimas hemos obtenido [9, L] y [9, E], es fácil llegar al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{T})}{\partial t} &= \text{div}(\bar{\rho}\bar{T}\bar{u} + \bar{q}) - \frac{\beta}{c_v} \bar{\rho}\bar{T} \text{div} \bar{u} + \\ &+ \frac{\bar{q}}{c_v} - \frac{\partial(\bar{\rho}'\bar{T}')}{\partial t} - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{u}'\bar{T}') - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{T}'\bar{u}') - \\ &- \text{div}(\bar{\rho}'\bar{T}'\bar{u}') - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{T}'\bar{u}') - \frac{\beta}{c_v} \{\bar{T} \cdot \bar{\rho}' \text{div} \bar{u}' + \\ &+ \bar{\rho}\bar{T}' \text{div} \bar{u}' + \bar{\rho}'\bar{T}' \text{div} \bar{u} + \bar{\rho}'\bar{T}' \text{div} \bar{u}'\} \end{aligned} \quad [10, E]$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{D\bar{T}}{Dt}\right)_{\text{turb}} &= \text{div} \bar{q} - \frac{\beta}{c_v} \bar{\rho}\bar{T} \text{div} \bar{u} + \\ &+ \frac{\bar{q}}{c_v} - \left(\frac{D(\bar{\rho}'\bar{T}')}{Dt}\right)_{\text{turb}} - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{T}'\bar{u}') - \\ &- \text{div}(\bar{\rho}'\bar{T}'\bar{u}') - \text{div}(\bar{\rho}'\bar{T}'\bar{u}') - \frac{\beta}{c_v} \{\bar{T} \cdot \bar{\rho}' \text{div} \bar{u}' + \\ &+ \bar{\rho}\bar{T}' \text{div} \bar{u}' + \bar{\rho}'\bar{T}' \text{div} \bar{u} + \bar{\rho}'\bar{T}' \text{div} \bar{u}'\} \end{aligned} \quad [10, L]$$

Al igual que ocurría en el caso del régimen laminar, cualquier sistema constituido por la ecuación [6] y una cualquiera de cada uno de los conjuntos de ecuaciones [7] a [10]

constituye un sistema completo para calcular las cinco variables $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\bar{T}$ y $\bar{u}$, que representa los valores medios de las variables instantáneas.

Para determinar completamente una solución particular del sistema es necesario conocer las correspondientes condiciones iniciales y de contorno y las hipótesis que permitan expresar los valores medios de los términos-fuente ($\bar{f}$, $\bar{s}$, $\bar{q}$, $\bar{Q}$) en función de las cinco variables anteriores, lo cual se hace directamente tomando valores medios en las expresiones que se dieron para régimen laminar. Sin embargo, en el caso de régimen turbulento es necesario también hacer hipótesis sobre los términos de transporte turbulento (las covarianzas) que permitan cerrar el problema.

Uno de los procedimientos más sencillos y más usados para las covarianzas en las que interviene $\mathbf{u}'$ consiste en adoptar una expresión similar a la de los términos-fuente para el régimen laminar. De acuerdo con esto se tiene:

a) Tensiones de Reynolds:

$$\bar{\tau}_{\text{urb}} = -\bar{\rho} \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' = \mu_{\text{urb}} [\mathbf{grad} \bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{grad} \bar{\mathbf{u}})^T] - \frac{2\mu_{\text{urb}}}{3} (\text{div} \bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{S}}$$

siendo $\bar{\mathbf{S}}$ el tensor unidad y $(\mathbf{grad} \bar{\mathbf{u}})^T$, el tensor transpuesto de $\mathbf{grad} \bar{\mathbf{u}}$. Se ha supuesto fluido newtoniano.

Esto conduce a:

$$\bar{\mathbf{f}}_{\text{urb}} = \mu_{\text{urb}} \text{rot}(\text{rot} \bar{\mathbf{u}}) - \frac{4\mu_{\text{urb}}}{3} \mathbf{grad} (\text{div} \bar{\mathbf{u}})$$

b) Transporte convectivo turbulento de sal:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{\text{urb}} &= \overline{S' \mathbf{u}'} = \bar{\rho} \overline{S' \mathbf{u}'} + \bar{S} \overline{\rho' \mathbf{u}'} = -D_{\text{urb}} \mathbf{grad} \bar{S} - \\ &= -D_{\text{urb}} \mathbf{grad} (\bar{\rho} \bar{S} + \bar{\rho}' \bar{S}') \end{aligned}$$

c) Transporte convectivo turbulento de calor:

$$\bar{q}_{\text{urb}} = \bar{\rho} c_v \overline{T' \mathbf{u}'} = -k_{\text{urb}} \mathbf{grad} \bar{T}$$

siendo μ_{urb} , D_{urb} y k_{urb} unos coeficientes turbulentos de viscosidad, difusión y conductividad térmica que, al contrario que sus análogos de régimen laminar, no son propiedades del fluido sino que dependen de la turbulencia del movimiento. Los coeficientes turbulentos suelen ser mucho mayores que los laminar.

Si se considera que ρ es una concentración de masa por unidad de volumen igual que S es una concentración de sal por unidad de volumen, se puede suponer:

d) Transporte turbulento de masa:

$$\bar{\mathbf{r}}_{\text{urb}} = \overline{\rho' \mathbf{u}'} = -R_{\text{urb}} \mathbf{grad} \bar{\rho}$$

Como el transporte turbulento depende fundamentalmente de la turbulencia del movimiento, puede considerarse casi independiente de la propiedad transportada, por lo que en general:

$$D_{\text{urb}} = \frac{K_{\text{urb}}}{\bar{\rho} c_v} = R_{\text{urb}}$$

En cuanto a los restantes términos turbulentos, el autor no tiene conocimiento de que hasta el momento se hayan propuesto hipótesis distintas de la trivial (considerarlos despreciables) para cerrar el problema. Y ello a pesar de que, como se comentó antes, la alta correlación entre las varia-

bles ρ , p , S y T (debida a que están ligadas por la ecuación de estado) hace suponer que las covarianzas $\bar{\rho} S'$, $\bar{\rho} T'$ y $\bar{p} T'$ deben ser importantes.

4. CASOS PARTICULARES. DISCUSIÓN DE LA CONDICIÓN DE DIVERGENCIA NULA

A continuación pasaremos revista a las hipótesis que se adoptan con más frecuencia para el estudio de diversos casos particulares.

4.1. DENSIDAD CONSTANTE EN EL TIEMPO Y EN EL ESPACIO

En este caso se anulan todas las derivadas de ρ , temporales y espaciales (gradiente). También se anula la desviación ρ' y, como consecuencia, todas las covarianzas en las que interviene ésta.

La ecuación de estado se reduce a:

$$\rho = \rho_0 \quad [1-1]$$

y de cualquiera de las ecuaciones [2] se obtiene:

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad [2-1]$$

Dado que $\text{div} \mathbf{u}$ representa la tasa de variación del volumen de un elemento de fluido, la ecuación anterior significa que el flujo es isocórico, es decir, que conserva el volumen. Esto se deduce fácilmente del principio de conservación de la masa si la densidad es constante.

Las ecuaciones [3] no sufren modificación, pero las [4] y [5] pueden simplificarse un poco si se usa la condición [2-1] de divergencia nula. La ecuación [4, L] se convierte en:

$$\frac{DS}{Dt} = -\text{div} \mathbf{u} \quad [4, L-1]$$

que se relaciona fácilmente con la [4, L], la cual no sufre modificación. Las ecuaciones [4, E] y [4, E'] pueden dejarse como están o, si acaso, convertirlas en:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} S - \text{div} \mathbf{s} \quad [4, E-1]$$

$$\frac{\partial(\rho \dot{S})}{\partial t} = -\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} S - \text{div} \mathbf{s} \quad [4, E'-1]$$

Las ecuaciones [5c, L] y [5, E] se convierten en:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -\text{div} \mathbf{q} + Q \quad [5, L-1]$$

$$\begin{aligned} \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} &= -\text{div}(\rho c_v T \mathbf{u} + \mathbf{q}) + Q = \\ &= -\rho c_v \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} T - \text{div} \mathbf{q} + Q \end{aligned} \quad [5, E-1]$$

Las ecuaciones para régimen turbulento se simplifican muchísimo, quedando ahora:

$$\bar{\rho} = \rho_0 \quad [6-1]$$

$$\text{div} \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad [7-1]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})}{\partial t} + \bar{\rho} 2\Omega \times \bar{\mathbf{u}} &= -\text{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) - \\ &- \mathbf{grad} \bar{p} + \bar{\rho} \mathbf{g} + \bar{\mathbf{f}} - \text{div}(\bar{\rho} \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') \end{aligned} \quad [8, E-1]$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} \right)_{\text{urb}} + \bar{\rho} 2\Omega \times \bar{\mathbf{u}} &= -\mathbf{grad} \bar{p} + \\ &+ \bar{\rho} \mathbf{g} + \bar{\mathbf{f}} - \text{div}(\bar{\rho} \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') \end{aligned} \quad [8, L-1]$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = -\bar{u} \cdot \text{grad } \bar{S} - \text{div}(\bar{s} + \bar{S}'\bar{u}') \quad [9, E-1]$$

$$\left(\frac{D\bar{S}}{Dt} \right)_{\text{urb}} = -\text{div}(\bar{s} + \bar{S}'\bar{u}') \quad [9, L-1]$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = -\bar{\rho} \bar{u} \cdot \text{grad } \bar{S} - \text{div}(\bar{s} + \bar{\rho} \bar{S}'\bar{u}') \quad [9, E-1]$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{D\bar{S}}{Dt} \right)_{\text{urb}} = -\text{div}(\bar{s} + \bar{\rho} \bar{S}'\bar{u}') \quad [9, L-1]$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\bar{\rho} \bar{u} \cdot \text{grad } \bar{T} - \text{div}(\bar{q} + \bar{\rho} \bar{T}'\bar{u}') + \frac{\bar{Q}}{c_v} \quad [10, E-1]$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{D\bar{T}}{Dt} \right)_{\text{urb}} = -\text{div}(\bar{q} + \bar{\rho} \bar{T}'\bar{u}') + \frac{\bar{Q}}{c_v} \quad [10, L-1]$$

donde se ve que los únicos términos turbulentos que permanecen son los debidos a las tensiones de Reynolds y a los transportes convectivos turbulentos de sal y de calor, lo cual puede explicar por qué existen en la literatura numerosas propuestas para estimar estos términos turbulentos y, sin embargo no existan para los restantes términos.

4.2. FLUJO ISOCÓRICO

La hipótesis de flujo isocórico (conservación del volumen), que matemáticamente se expresa por la condición de divergencia nula:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad [10, L-2a]$$

suele identificarse con los conceptos de fluido incompresible, y de densidad constante sin que, en realidad, coincida exactamente con ninguno de ellos. Ya se vio en el apartado anterior que la hipótesis de densidad constante implica el flujo isocórico, pero el recíproco no es cierto como veremos a continuación. Por otra parte, la hipótesis de fluido incompresible sólo quiere decir que en la función de estado, ρ sólo depende de T y de S , pero no de p . No obstante, las hipótesis simultáneas de fluido incompresible, y de temperatura y salinidad homogéneas implican que la densidad es constante, con lo cual, también ha de ser el flujo isocórico. Veamos a continuación las implicaciones de la hipótesis de flujo isocórico.

En primer lugar, debe tenerse muy presente que al añadir una ecuación más, el sistema queda sobredeterminado y puede resultar incompatible. Este problema puede superarse eliminando alguna de las restantes ecuaciones. Así, por ejemplo, cuando el objeto principal del cálculo es el campo de velocidades, se suele eliminar la ecuación de conservación de la masa, que queda sustituida por la de divergencia nula (ello implica que las ecuaciones eulerianas y lagrangianas ya no son equivalentes). Pero al tratarse de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, la superabundancia de ecuaciones puede compensarse a veces con una menor libertad para establecer las condiciones de contorno. En nuestro caso, por ejemplo, las velocidades impuestas en el contorno deben ser compatibles con que el volumen total del sistema permanezca constante.

Si se opta por conservar todas las ecuaciones a partir de [2, L] se obtiene:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad [2, L-2b]$$

es decir, la densidad de un elemento fluido se mantiene constante a lo largo de su movimiento. Obsérvese que si los valores del campo inicial de densidades no son homogéneos o si los valores de ésta impuesto en el contorno son variables, las densidades en el interior variarán en el espacio y en el tiempo. Incluso si el campo de velocidades es permanente, la ecuación [2, L-2b] sólo implica que en un punto fijo del espacio la densidad irá tomando los valores que inicialmente tuvieran los elementos fluidos situados en la línea de flujo que pasa por dicho punto, y después, los que se están imponiendo en la primera intersección de esta línea de flujo con el contorno, lo que significa que en general las densidades variarán de un punto a otro y de un instante a otro. Otra consecuencia es que la densidad en el punto de salida de la línea de flujo viene fijada.

La ecuación [2, E] se convierte en:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \text{grad } \rho \quad [2, E-2]$$

que, por supuesto, es equivalente a la [2, L-2b] y que expresa claramente que la densidad en un punto cualquiera varía con el tiempo si el campo de densidades no es homogéneo.

Los conjuntos de ecuaciones [2] a [5] se convierten en los [2-1] a [5-1], ya que éstos se obtuvieron usando solamente la condición de divergencia nula.

Obsérvese que para que la densidad de un elemento fluido permanezca invariable en un campo de densidades no homogéneo, podría darse un caso de que las variaciones de presión, temperatura y salinidad se produzcan de tal manera que compensen en todo momento sus efectos sobre la densidad. Sin embargo, existe otro caso menos rebuscado que se aplica frecuentemente en Oceanografía (LeBlond y Mysak, 1978). Consiste en suponer que el fluido es incompresible (ρ sólo depende de T y S) y despreciar los efectos de difusión y generación de calor y de sal. De esta forma, las ecuaciones [4, L] y [5c, L] se reducen a:

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \quad [4, L-2]$$

$$\frac{DT}{Dt} = 0 \quad [5, L-2]$$

es decir, se conservan simultáneamente el volumen, la densidad, la salinidad (por unidad de volumen) y la temperatura de cualquier elemento fluido a lo largo de su movimiento. Como consecuencia, también ha de conservarse la salinidad expresada por unidad de masa:

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \quad [4, L-2]$$

expresión que también puede obtenerse directamente a partir de [4, L].

Por otra parte, si existe difusión y, sobre todo, fuentes o sumideros de calor y de sal, la temperatura y la salinidad varían, con lo que, por la ecuación de estado, también ha de variar la densidad en contra de lo que afirma la ecuación [2, L-2b]. Esto constituye un ejemplo de incompatibilidad del sistema de ecuaciones obtenido al añadir otra ecuación más ($\text{div } \mathbf{u} = 0$). Por lo tanto, o bien se elimina la ecuación de estado y se calcula ρ exclusivamente a partir de [2, L-2b], o bien se mantiene aquella y se elimina ésta, con lo cual no se conservaría la masa total del sistema a pesar de que se conserva el volumen. Por ejemplo, si se calienta un fluido sometido a flujo isocórico, las densidades disminuyen, y como el

volumen permanezca constante, la masa total del sistema disminuiría.

Como el flujo en régimen turbulento se caracteriza por unos fuertes transportes, esta contradicción se haría mucho más patente, por lo que no parece que merezca la pena deducir las ecuaciones turbulentas basadas exclusivamente en la hipótesis de flujo isocórico.

4.3. DENSIDADES Y VELOCIDADES PERMANENTES

Se trata de campos constantes en el tiempo pero variables en el espacio. Por lo tanto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad [2, E-3a]$$

Como ocurría en la sección anterior, se trata de una ecuación adicional que, si se mantiene, equivale por [2, E] a:

$$\text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad [2, E-3b]$$

que naturalmente, no implica un flujo isocórico puesto que al desarrollarse se convierte en:

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{ div } \mathbf{u} = 0$$

Sin embargo, no es incompatible con éste, ya que si:

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } \rho = 0$$

se cumplen ambas condiciones. La solución de esta última ecuación aparte de la trivial (ρ constante), consiste en un campo tal que la densidad sea constante a lo largo de cada línea de corriente, pero pudiendo variar de una línea de corriente a otra. De esta forma, el gradiente de ρ siempre será perpendicular a $\mathbf{u}$. Un ejemplo puede ser el flujo horizontal en un medio estratificado.

Exceptuando este caso particular de flujo isocórico, el caso de densidad y velocidad permanentes no tiene mayor interés. Se ha incluido aquí mas bien para dejar patente que se trata de un caso diferente a los otros casos tratados en el presente artículo.

4.4. TEMPERATURA Y SALINIDAD CONSTANTES

En este caso la función de estado sólo depende de p y no de T ni de S . Además, las desviaciones T' y S' son nulas y, como consecuencia, todas las covarianzas en las que éstas intervengan.

Tenemos por tanto:

$$\rho = \rho(p) \quad [1-4]$$

Los grupos de ecuaciones generales [2] y [3] permanecen inalterados. Los grupos [4] y [5] que se refieren a la evolución de la salinidad y la temperatura son innecesarios.

En régimen turbulento, la ecuación [6] se convierte en:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{p}) \quad [4-6]$$

Los grupos de ecuaciones [7] y [8] también permanecen inalterados y los [9] y [10] son innecesarios.

4.5. DENSIDAD INDEPENDIENTE DE LA TEMPERATURA Y DE LA SALINIDAD

Como en la sección anterior, la función de estado sólo depende de la presión, pero ahora suponemos que la temperatura y la salinidad pueden variar en el espacio y en el tiempo. Por lo tanto, los grupos de ecuaciones en régimen laminar [1] a [3], y en régimen turbulento [6] a [8] son idénticos a los de la sección anterior. Los grupos de ecuaciones generales [4], [5], [9] y [10] son ahora aplicables sin ningún cambio, si bien es de esperar que las covarianzas $\rho T'$, $\rho S'$ sean ahora bastante menores.

4.6. DENSIDAD INDEPENDIENTE DE LA PRESIÓN (FLUIDO INCOMPRESIBLE)

En este caso la función de estado contiene sólo a T y S , pero no a p . Las ecuaciones [1] y [6] se convierten, respectivamente:

$$\rho = \rho(T, S) \quad [1-6]$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{S}) \quad [6-6]$$

Si no se hace ninguna hipótesis adicional, los grupos de ecuaciones generales [2] a [5] y [7] a [10] son aplicables sin ningún cambio, por lo que resulta ser uno de los casos más difíciles de estudiar.

5. CONCLUSIONES

Este artículo ha sido escrito con tres objetivos principales:

- 1) Llamar la atención sobre las diferencias existentes entre varios conceptos parecidos que usualmente se tiende a considerar como idénticos (por ejemplo, los de fluido incompresible, densidad constante y flujo isocórico) y sobre la importancia de los flujos con densidad variable en fluidos incompresibles.
- 2) Proporcionar un conjunto ordenado de sistemas completos de ecuaciones para el caso general de fluido con densidad variable y para un cierto número de casos particulares, incluyendo las alternativas de lagrangianas/eulerianas, concentración por unidad de volumen/concentración por unidad de masa y régimen laminar/régimen turbulento.
- 3) Desarrollar completamente las ecuaciones del transporte en régimen turbulento para fluidos con densidad variable. Estas ecuaciones, que no son fáciles de encontrar incluso en la literatura más especializada, contienen un conjunto de términos de turbulencia para los que hasta el momento, no se han propuesto hipótesis de cálculo que permitan cerrar el problema. Y ello a pesar de que algunos de ellos (covarianzas $\rho T'$, $\rho S'$) han de ser necesariamente importantes debido a que las variables ρ , T y S están ligadas por la ecuación de estado.

REFERENCIAS

- TRUEDELL, C.; TOUPIN, R. A. (1960): "The Classical Field Theories", en "Encyclopedia of Physics", Vol. III/1, editado por FLÜGGE, S. (Springer Verlag).
- ERINGEN, A. C. (1975): "Continuum Mechanics of Single-Substance Bodies", en "Continuum Physics", Vol. II, editado por el mismo. (Academic Press).
- LE BLOND, P. H.; MYSAK, L. A. (1978): "Waves in the Ocean". (Elsevier).
- MEI, C. C. (1989): "The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves". (World Scientific).
- PHILLIPS, O. M. (1977): "The Dynamics of the Upper Ocean". (Cambridge University Press).
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. (1982): "Fenómenos de Transporte". (Reverté).
- AGUILAR PERIS, J. (1990): "Curso de Termodinámica". (Alhambra).
- YAVORSKI, B. M.; DETLAF, A. A. (1977): "Manual de Física". (Mir).
- HINZE, J. O. (1959): "Turbulence". (Mc Graw-Hill).
- TOWNSEND, A. A. (1976): "The Structure of Turbulent Shear Flow". (Cambridge University Press).

STYRELF

LA ESCALADA MAS COMODA A SIERRA NEVADA

CARRETERA A SIERRA NEVADA — GRANADA —

- Mezcla discontinua rugosa y cerrada
- Un compromiso de futuro
- Confort y seguridad
- Una garantía de calidad de vida

STYRELF, el único procedimiento químico de polimerización de betunes, puesto en obra en España.

STYRELF, el proceso que permite seleccionar y adaptar el tipo y el grado de modificación a cualquier betún para definir una solución fiable e innovadora.

STYRELF, la nueva generación de betunes elastómeros polimerizados que da más vida útil a las carreteras.

STYRELF, más de 19 años de experiencia mundial en tecnología de asfaltos modificados.

STYRELF, líder mundial en betunes modificados para las carreteras con más de 3.500.000 toneladas aplicadas en el mundo.

styrelf® Ibérica

Avenida de América, 32 - 2º - 28028 MADRID (ESPAÑA)

Telefs.: (91) 337 67 03/62 89 - Fax: (91) 337 64 67

Patentes nº 465 475 - 485 814 - 481 722 - 517 713 - 523 133 - 551 997 - 551 998

® Producto comercializado en España por PROAS del Grupo CLPSA, bajo licencia ELF.

CONOZCA A LOS QUE HACEN LAS GRANDES OBRAS DE ESTE PAIS

4 / 7 OCTUBRE 1995

Descubra los últimos avances en maquinaria, las nuevas posibilidades de equipamiento, la mecánica con mayor competitividad. En FICOP '95 los expositores más representativos de los sectores de maquinaria de la Construcción, Obras Públicas, Minería y Mantenimiento, han constituido un salón profesional altamente especializado. Una plataforma útil para sectores estratégicos donde la creación de infraestructura supone un objetivo irrenunciable.

Venga a FICOP '95 y descubrirá quiénes hacen las grandes obras.



Feria de Madrid

F I C O P
FERIA DE
MAQUINARIA PARA
CONSTRUCCION,
OBRAS PUBLICAS,
MINERIA Y
MANTENIMIENTO



Parque Ferial Juan Carlos I . Tel.: 722 50 34 - Fax: 722 57 91. 28067 MADRID