

Formulación mixta u-p (desplazamientos-presión) para analizar el comportamiento sísmico de presas

MANUEL PASTOR PÉREZ (*)

T. C. LI (**)

JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ MERODO (***)

RESUMEN El trabajo propuesto tiene como objeto analizar el comportamiento de una presa bajo la acción de un terremoto. Se presenta una técnica numérica, diferente de la normalmente utilizada (método de subestructuras) para modelar la interacción del conjunto presa-agua-cimiento.

MIXED U-P FORMULATION (DISPLACEMENTS-PRESSURE) TO ANALYZE THE SEISMIC PERFORMANCE OF DAMS

ABSTRACT The purpose of this work is to analyse the performance of a dam under a earthquake activity. We present a numerical technique, different from the standar "substructures method", to model the dam-water-foundation interaction.

Palabras clave: Propagación de ondas; Interacción fluido-sólido; Método de elementos finitos; Condiciones de contorno.

INTRODUCCIÓN

Muchas de las presas construidas en el mundo se hallan situadas en zonas de actividad sísmica importante. Es fundamental para el proyectista evaluar la seguridad de una presa frente a la acción de un terremoto.

El comportamiento de una presa depende esencialmente de los factores siguientes:

- Topografía local
- Comportamiento de los materiales empleados en la presa y existentes en su cimentación
- Tamaño relativo de la presa y longitudes de las ondas incidentes
- Efectos hidrodinámicos debido al agua embalsada
- Interacción presa-cimentación

Este artículo tiene como objeto el estudiar los efectos principales del acoplamiento, en un único sistema mecánico, del conjunto cimentación-presa-agua.

Si bien es cierto que este acoplamiento se da tanto en las presas de materiales sueltos, donde además del agua embal-

sada existe agua intersticial, el estudio se ha restringido a las presas de hormigón no considerando efectos del agua intersticial.

Se estudiará también cómo modelar las condiciones de contorno del modelo, evitando la utilización de los elementos infinitos e introduciendo superficies absorbentes, para simular la propagación de ondas al infinito.

1. HIPÓTESIS DE CÁLCULO

El estudio se hace en varias etapas, aumentando a cada una de ellas el nivel de complejidad para acercarse cada vez más al modelo real. Primero se hizo un modelo en 2 dimensiones, después uno más complejo en 3 dimensiones.

El análisis dinámico se hace en el dominio de la frecuencia, considerando que tanto la excitación (bajo la forma de una onda plana) como la respuesta del sistema son armónicas.

El comportamiento mecánico de los materiales se ha simplificado por el momento, así el sólido es considerado como isotrópico, lineal, elástico, homogéneo y el fluido como compresible e incompresible y no viscoso.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1. FORMULACIÓN MIXTA U-P PARA PROBLEMAS DE INTERACCIÓN

Se utiliza una formulación general en tres dimensiones.

En el subsistema sólido

El campo de desplazamientos $u(x,t)$ y el tensor de tensiones escrito en su forma vectorial equivalente $\underline{\sigma}^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{xy},$

(*) Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas. Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos.

(**) Profesor de la Universidad de Hohai (República Popular China).

(***) Ing. E. Centrale Paris, Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, CEDEX (MOPTMA).

$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$) deben obedecer a la ecuación de balance del momento lineal:

$$L^T \cdot \underline{\sigma} + \underline{f} = \rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} \quad (1)$$

donde ρ es la densidad, $\underline{f}$ las fuerzas por unidad de volumen (gravedad, ...) y L el operador lineal que relaciona deformaciones unitarias y desplazamientos: $\underline{\varepsilon} = L \cdot \underline{u}$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

La formulación está basada en la descomposición de la tensión $\underline{\sigma}$ en las dos partes desviadora e hidrostática:

$$\underline{\sigma} = \underline{s} - p \underline{m}$$

donde $\underline{m}$ es el vector: $\underline{m}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$L^T \cdot \underline{s} - L^T \cdot \underline{m} \cdot p + \underline{f} = \rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2}$$

$$\text{o} \quad L^T \cdot \underline{s} - \underline{\nabla}^T \cdot p + \underline{f} = \rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2}$$

$$\text{con } \underline{\nabla}^T = \left(\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$$

Es la primera ecuación utilizada para el sistema.

Para la segunda empleamos la relación entre la presión y la deformación volumétrica:

$$\underline{\nabla}^T \cdot \underline{u} + \frac{p}{K_v} = 0$$

donde K_v es el módulo de rigidez volumétrica del sólido:

$$K_v = \lambda + \frac{2}{3} \mu$$

En el caso incompresible $K_v \rightarrow \infty$ y $\underline{\nabla}^T \cdot \underline{u} = 0$

Estas ecuaciones pueden discretizarse empleando el procedimiento habitual que se sigue en el método de los elementos finitos, empleando para los desplazamientos y para la presión las aproximaciones:

$$\underline{u} = N_u \cdot \underline{\hat{u}} \quad p = N_p \cdot \hat{p}$$

donde las matrices N_u y N_p contienen las funciones de forma, siendo $\underline{\hat{u}}$ y $\hat{p}$ los vectores nodales de desplazamientos y presiones.

Se llega así a:

$$M_u \cdot \frac{d^2 \underline{\hat{u}}}{dt^2} + K_v \cdot \underline{\hat{u}} - Q \cdot \hat{p} = \underline{F}_u$$

$$Q^T \cdot \underline{\hat{u}} + \frac{1}{K_v} M_p \cdot \hat{p} = 0$$

donde

$$M_u = \int \rho N_u^T \cdot N_u d\Omega$$

$$K_v = \int B^T \cdot D_v \cdot B d\Omega$$

$$Q = \int \nabla^T \cdot N_u \cdot N_p d\Omega$$

Es la matriz constitutiva que relaciona la tensión desviadora con la deformación unitaria $\underline{s} = D_v \cdot \underline{\varepsilon}$.

Para un material lineal, elástico, homogéneo, isotrópico:

$$\underline{s} = \mu [\underline{\nabla} \cdot \underline{u} + (\underline{\nabla}^T)^T] + \frac{2}{3} \mu \nabla^T \underline{u}$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \text{ con } D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$$

$$D_{ijkl}^v = \left(-\frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right)$$

Forma matricial:

$$D_v = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \mu & -\frac{2}{3} \mu & -\frac{2}{3} \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} \mu & \frac{4}{3} \mu & -\frac{2}{3} \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} \mu & -\frac{2}{3} \mu & \frac{4}{3} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Si ahora se supone que tanto la excitación como la respuesta son armónicas:

$$\underline{\hat{u}} = \text{Re} \left\{ \underline{\hat{U}} \cdot \exp(-i\omega t) \right\}$$

$$\hat{p} = \text{Re} \left\{ \hat{P} \cdot \exp(-i\omega t) \right\}$$

$$\hat{f} = \text{Re} \left\{ \hat{F} \cdot \exp(-i\omega t) \right\}$$

$$(K_v - \omega^2 M_u) \underline{\hat{U}} - Q \cdot \hat{P} = \underline{F}_u$$

$$Q^T \cdot \underline{\hat{U}} + \frac{1}{K_v} M_p \cdot \hat{P} = 0$$

El sistema de ecuaciones matriciales obtenidas se puede escribir de forma compacta como:

$$\begin{bmatrix} K_v - \omega^2 M_u & -Q \\ -Q^T & \frac{1}{K_v} M_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}} \\ \hat{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es importante hacer notar que, en el límite incompresible, la ecuación anterior tiene la submatriz (p,p) nula al tender a infinito K_v . Desde el punto de vista numérico, esto restringe las combinaciones de subespacios para las funciones de forma N_u y N_p , que deben satisfacer las denominadas condiciones de Babuska-Brezzi (así por ejemplo, no es posible seleccionar las mismas funciones de forma de interpolación para u que para p). Como alternativa pueden ser empleadas técnicas de estabilización, ya utilizadas por Zienkiewicz, Huang y Pastor.

El término de estabilización a añadir a la ecuación en presiones es la divergencia de la ecuación de balance del momento lineal, donde se supone que $\underline{\nabla}^T \cdot \underline{f} = 0$.

La ecuación que se obtiene de esta forma es la que describe la propagación de una onda de presión en el sólido:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} - c_v^2 \nabla^2 p = 0$$

donde c_v es la velocidad de propagación de esta onda en el sólido: $c_v^2 = \frac{K_v}{\rho}$

Esta ecuación una vez discretizada, resulta:

$$\frac{1}{c_v^2} \cdot M_p \cdot \frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} - H \cdot \bar{p} = \underline{f}_p$$

donde

$$M_p = \int N_p^T \cdot N_p d\Omega$$

$$H = \int \nabla^T N_p \cdot \nabla N_p d\Omega$$

$$\underline{f}_p = \int N_p \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} d\Gamma$$

Si ahora se suma esta ecuación, multiplicada por una constante ε se obtienen las ecuaciones que describen el comportamiento de la fase sólida:

$$\begin{bmatrix} K_s & -Q \\ -Q^T & \frac{-1}{K_v} M_p - \varepsilon H \end{bmatrix} \cdot \omega^2 \begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{c_v^2} M_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}} \\ \underline{\hat{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{F}}_a \\ \underline{\hat{F}}_p \end{bmatrix}$$

En el subsistema líquido

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del agua embalsada se obtienen de forma similar a la empleada con el sólido, con $\mu = 0$ para un líquido no viscoso obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -Q \\ -Q^T & \frac{-1}{K_w} M_p - \varepsilon H \end{bmatrix} \cdot \omega^2 \begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{c_w^2} M_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{U}} \\ \underline{\hat{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{F}}_a \\ \underline{\hat{F}}_p \end{bmatrix}$$

donde K_w es el coeficiente de rigidez volumétrica del agua, relacionado con la velocidad de propagación c_w :

$$c_w^2 = \frac{K_w}{\rho_w}$$

Acoplamiento sólido-fluido

Al emplearse las mismas ecuaciones y las mismas variables para el sólido que para el fluido, no será necesario ningún tipo de fuerzas de acoplamiento entre ambos. Esta es la gran ventaja de esta formulación.

Puede objetarse que la variable de campo presión presenta una discontinuidad entre el sólido y el fluido, aunque esto también ocurre cuando se analiza el contacto entre dos materiales sólidos con las tensiones y las deformaciones unitarias.

2.2. FORMULACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Para que el modelo esté lo más cerca posible de la realidad debemos modelizar las diferentes condiciones de contorno.

Superficie agua-aire

Condición límite fácil, basta con imponer la presión del agua igual a la presión atmosférica.

Superficie presa-aire

Hay que conocer las tensiones aplicadas en cada punto de la superficie:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = f_i$$

con $\underline{n}$ vector normal a la superficie y $\underline{f}$ la fuerza aplicada.

Superficie de onda incidente

El terremoto que estimula el sistema está modelizado como una onda plana que penetra en éste por la base inferior del modelo.

La elección de la dirección de propagación de esta onda provoca que el caso en 3 dimensiones sea más complicado. Escoger esta dirección como la del vector normal a la superficie simplifica las ecuaciones pero veamos la situación más general.

La condición límite va a formularse con las tensiones.

Para los 3 tipos de ondas P, SV, SH, las tensiones se escriben:

$$\underline{T}_{local} = i\omega\rho C \cdot \underline{U}_{local} + 2\underline{T}_{local}^{inc}$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} c_p & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & c_s \end{bmatrix} \quad \underline{T}_{local} = \begin{bmatrix} \underline{T}_p(\underline{u}_p) \\ \underline{T}_s(\underline{u}_{SV}) \\ \underline{T}_s(\underline{u}_{SH}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_{local} = \begin{bmatrix} \underline{u}_p \\ \underline{u}_{SV} \\ \underline{u}_{SH} \end{bmatrix} \quad \underline{T}_{local}^{inc} = \begin{bmatrix} \underline{T}_p^{inc} \\ \underline{T}_{SV}^{inc} \\ \underline{T}_{SH}^{inc} \end{bmatrix}$$

$\underline{T}^{inc}$ es conocido en el sistema de referencia local (proviene de los invariantes de Riemann).

En el sistema de referencia global:

$$\underline{T}_{local} = i\omega\rho R_1^{-1} \cdot R^* \cdot C \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot \underline{U}_{global} + 2 \cdot R_1^{-1} \cdot R^* \cdot \underline{T}_{local}^{inc}$$

Las matrices R_1 , R_2 , R^* son matrices de proyección.

Después de una discretización por elementos finitos se obtiene:

$$\underline{\hat{f}} = [i\omega(\rho \hat{N}_1 \cdot \hat{N}_2 \cdot R_1^{-1} \cdot R^* \cdot C \cdot R_2 \cdot R_1 d\Gamma) \cdot \underline{\hat{U}} + [2R_1^{-1} \cdot R^* \cdot N_1 \cdot \underline{T}_{local}^{inc} d\Gamma]$$

$$\underline{\hat{f}} = i\omega M' \cdot [R_1^{-1} \cdot R^* \cdot C \cdot R_2 \cdot R_1] \cdot \underline{\hat{U}} + \underline{\hat{f}}_{local}^{inc}$$

donde $M' = \int \rho \hat{N}_1 \cdot \hat{N}_2 d\Gamma$

$$\underline{\hat{f}}_{local}^{inc} = \int 2R_1^{-1} \cdot R^* \cdot N_1 \cdot \underline{T}_{local}^{inc} d\Gamma$$

Superficie absorbente de ondas

En el caso real las ondas se propagan hacia el infinito, decrecen y no vuelven ("condiciones de radiación Sommerfeld"). El modelo está limitado, las superficies límites tienen que absorber las ondas.

Para las ondas normales, las ecuaciones son las mismas con $\underline{T}^{inc} = 0$

$$\underline{\hat{f}} = i\omega M' \cdot [R_1^{-1} \cdot R^* \cdot C \cdot R_2 \cdot R_1] \cdot \underline{\hat{U}}$$

Sólo aparece un término de amortiguamiento.

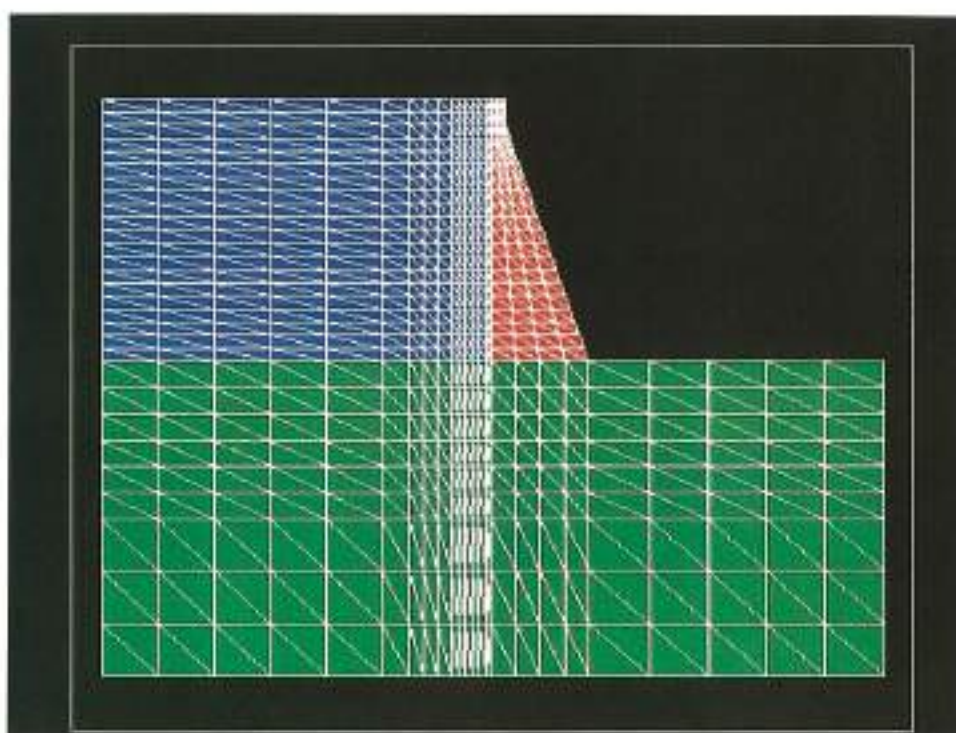


FIGURA 1. Ejemplo de malla en 2D utilizando elementos triángulos de 3 nodos.

Para las ondas de presión que aparecen en la formulación, las ecuaciones son diferentes, teniendo en cuenta las proyecciones:

$$\underline{f}_p = \left[N^T \frac{i\omega}{c_v} \cos a \sin b \underline{P} d\Gamma + \left[N^T \frac{(-2i\omega)}{c_v} \cos a \sin b \underline{P}^{int} d\Gamma \right] \right.$$

$$\text{con } \underline{P} = N^T \underline{\tilde{P}}$$

$$\underline{f}_p = \frac{i\omega}{c_v} \cos a \sin b \left[N^T N^T \underline{\tilde{P}} d\Gamma + \frac{(-2i\omega)}{c_v} \cos a \sin b \left[N^T N^T \underline{\tilde{P}}^{int} d\Gamma \right] \right]$$

Estas condiciones de contorno intentan reproducir lo mejor posible el modelo real.

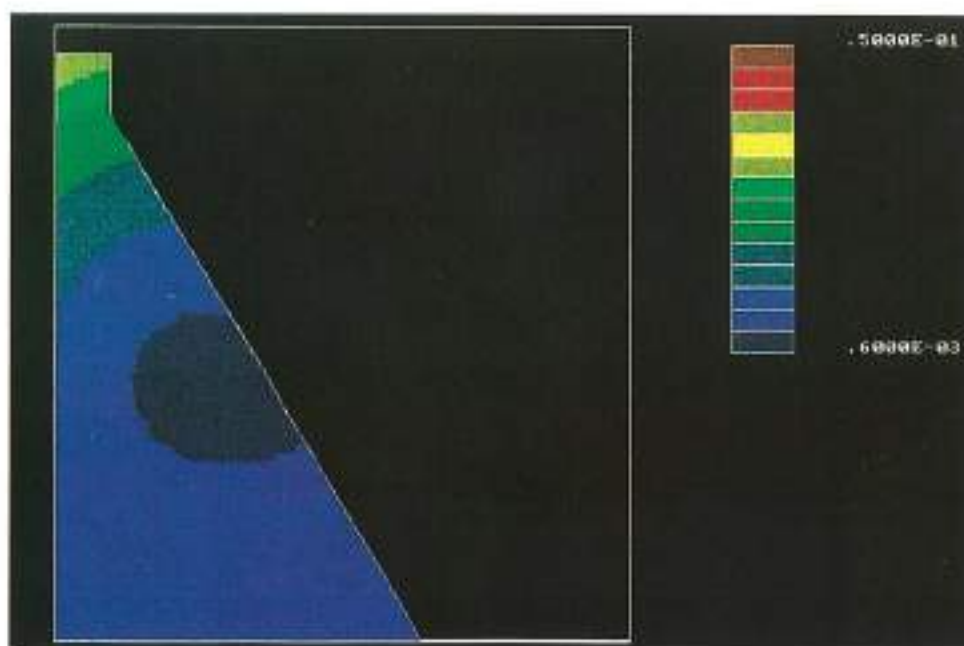


FIGURA 2. Contorno de desplazamientos en la presa para la frecuencia $\omega = 21$ Rad/Sec.

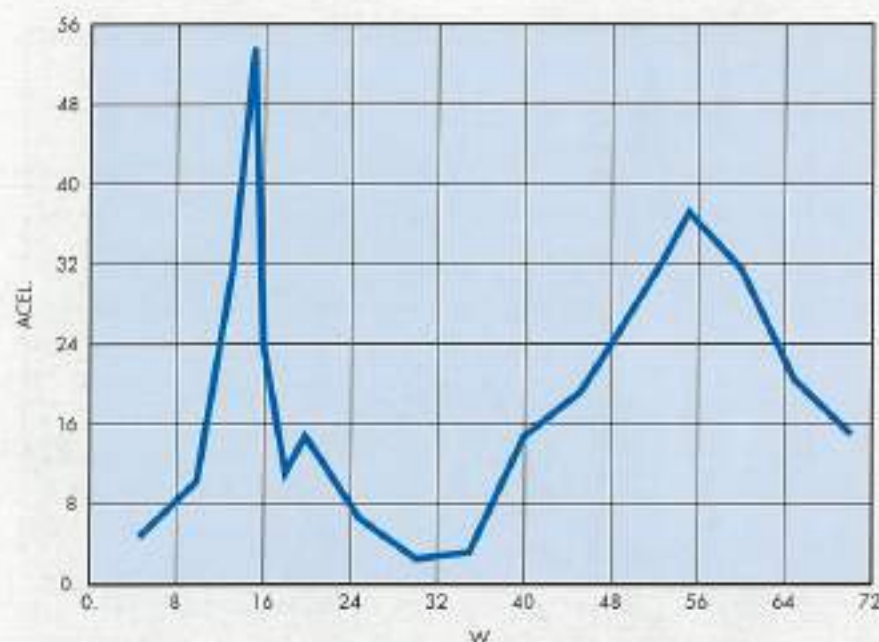


FIGURA 3. Amplitud de las aceleraciones del punto A para diferentes frecuencias.

3. UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

El programa DINHAR es un programa clásico de elementos finitos que resuelve el problema utilizando estas últimas ecuaciones.

Se utilizan elementos tipo triángulos de 3 nodos en 2 dimensiones y tetraedros de 4 nodos en 3 dimensiones pero deberán ser sustituidos por otros más adecuados para obte-

ner soluciones más precisas, sobre todo para los problemas de tipo flexión.

El sistema final es resuelto por 2 métodos, uno directo otro iterativo (Gradiente Conjugado) que se utilizan según el número de nodos.

El programa DINHAR calcula los desplazamientos (velocidades o aceleraciones), presiones y tensiones en cada punto de la malla. Podemos localizar así las zonas de peligro de la presa (valores demasiado importantes de los resultados).

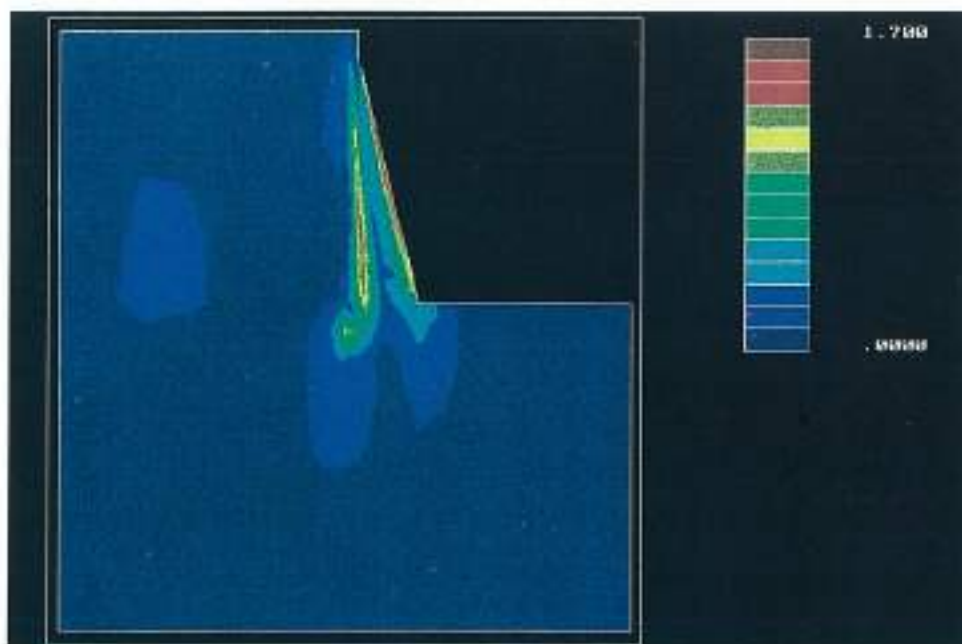


FIGURA 4. Distribución de presiones (en MPa) para la frecuencia $w = 21$ Rad/Sec.

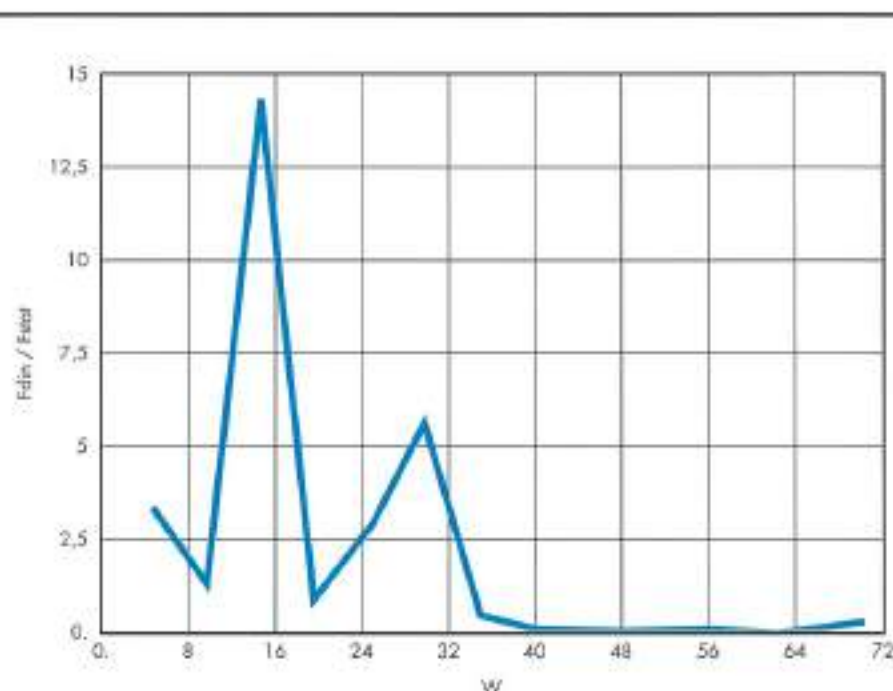


FIGURA 4. Amplitud de la fuerza horizontal para diferentes frecuencias.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Utilizando como modelo la malla de la figura 1 se pueden visualizar algunos de los resultados.

El contorno de los desplazamientos, figura 2, refleja el comportamiento del subsistema sólido para una frecuencia determinada. Los desplazamientos más importantes se encuentran en la parte superior de la presa, por eso es interesante ver cómo se comporta el punto A (punto más elevado de la interface agua-presa), para diferentes frecuencias, figura 3.

La figura 4 presenta una distribución de las presiones en el modelo para una frecuencia determinada.

La fuerza total horizontal dinámica aplicada a la presa partida por la fuerza estática es representada en la figura 5 para diferentes frecuencias.

CONCLUSIÓN

Un método de elementos finitos utilizando una formulación desplazamientos-presiones para el estudio dinámico del sistema presa-agua-cimiento es muy ventajoso. No necesita una modelización de los acoplamientos en las interfaces.

La creación de superficies absorbentes de ondas para sustituir las condiciones al infinito y el estudio en 3 dimensiones hacen que el modelo se acerque lo más posible de la realidad.

BIBLIOGRAFÍA

A. K. CHOPRA. "Earthquake behaviour of reservoir-dam system". J. Eng. Mech. Div., ASCE, 94, 1475-1500 (1968).
 P. CHAKRABARTI and A. K. CHOPRA. "Earthquake analysis of gravity dams including hydrodynamic interaction". Earthq. Eng. Struct. Dyn., 2, 143-160 (1974).
 P. CHAKRABARTI and A. K. CHOPRA. "Hydrodynamic effects in earthquake response of gravity dams". J. Struct. Div., ASCE, 100, 1211-1224 (1974).

A. K. CHOPRA and P. CHAKRABARTI. "Earthquake analysis of concrete gravity dams including dam-water-foundation rock interaction". Earthq. Eng. Struct. Dyn., 9, 363-374 (1978).

A. K. CHOPRA and S. GUPTA. "Hydrodynamic and foundation interaction effects in frequency response function for concrete gravity dams". Earthq. Eng. Struct. Dyn., 10, 89-106 (1982).

J. F. HALL and A. K. CHOPRA. "Two dimensional dynamic analysis of concrete gravity and embankment dams including hydrodynamic effects". Earthq. Eng. Struct. Dyn., 10, 305-332 (1982).

G. FENVES and A. K. CHOPRA. "Earthquake analysis of concrete gravity dams including reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction". Earthq. Eng. Struct. Dyn., 12, 663-680 (1984).

K. FOK and A. K. CHOPRA. "Earthquake analysis of arch dams including dam-water interaction reservoir boundary absorption and foundation flexibility". Earthq. Eng. Struct. Dyn., 14, 155-184 (1986).

S. VALLIAPPAN and Z. ZHAO. "Dynamic response of concrete gravity dams including dam-water-foundation interaction". Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomechs., 16, 79-99 (1992).

T. J. R. HUGHES; L. P. FRANCA and M. BALESTRA. "A new finite element formulation for fluid dynamics. V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal order interpolation". Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 59, 85-99 (1986).

O. C. ZIENKIEWICZ; M. HUANG and M. PASTOR. "Computational soil dynamics - A new algorithm for drained and undrained conditions". Comp. Meth. Adv. Geomechanics, 47-59. H. J. Siriwardan and M. M. Zaman (Eds), Balkema (1994).

IGUAZURI

*Siempre
hay un líder*

CAJONES DE BLINDAJE ROBUST BOX®



Consúltenos sobre estos y otros productos:

PINZAS AUTOMÁTICAS PARA TUBOS

TIPO
II / RK 5,0

mordaza
TIPO 150

mordaza
TIPO 125

mordaza
TIPO 90

Desde 275 hasta
1.800mm. de
diámetro y...
¡ 5 Toneladas de
alzada !



IGUAZURI, S.L.

Ctra. Madrid-Irún,
Km 469

Apartado
de Correos, 354

Tel: (943) 49 28 97
Fax: (943) 49 30 15

20100 RENTERIA
(Guzmán)

Entre en el mundo de la *Cartografía Digital...*



✓ Redes de distribución, ✓ Puntos de venta, ✓ Localización de mercados, ✓ Tendidos eléctricos, ✓ Previsión de riesgos, ✓ Optimización de rutas, ✓ Obra civil, ✓ Estudios medioambientales, demográficos, etc.

*...y descubra sus múltiples
aplicaciones.*

PRODUCTOS:

Base de Datos 1: 200.000 (BCN200), Base de Datos 1:1.000.000 (BCN1000), Modelo Digital del Terreno (BCN200),
Base de Datos Monotemáticos, Mapa de Usos del Suelo (Corine-Land Cover), Datos Teledetección (Landsat TM)
(Spot Pancromático), Líneas Límite (Varias escalas).