

Contribución del cálculo en segundo orden a la optimización del diseño de estructuras metálicas

HERNÁNDEZ MONTES, E. (*)

RÚA ÁLVAREZ, E. (**)

GIL MARTÍN, L. M. (***)

RESUMEN Este artículo sugiere una metodología de optimización del diseño para mejorar la estabilidad general de estructuras aporticadas. El método requiere solamente el cálculo de los autovalores y autovectores de inestabilidad de la estructura, evitando así el uso de los complicados cálculos computacionales inherentes en el análisis no lineal, sobre todo en los pasos de diseño. Este método propone el uso del menor autovalor como analizador para mejorar la estabilidad de la estructura, mediante la variación del diseño. Se muestran varios ejemplos para examinar el comportamiento del método propuesto.

SECOND-ORDER ELASTIC ANALYSIS CONTRIBUTION TO STEEL STRUCTURES OPTIMAL DESIGN

ABSTRACT This paper suggest an optimization design methodology for improving the overall stability of framed structures. The method requires only the calculation of the buckling eigenvalues and eigenvectors of the structure, avoiding computationally intensive nonlinear structural analysis in design cycle. The lowest eigenvalue is proposed as the analyst to improve the structure resistance to buckling, by changing the design. Several examples are given to examine the performance of the procedure.

Palabras clave: Cálculo en segundo orden; Inestabilidad global; matriz de rigidez geométrica.

Esta publicación versa sobre estabilidad, optimización y la posibilidad de mejorar el comportamiento de una estructura frente a una posible inestabilidad.

Nuestro esfuerzo se centrará en la estabilidad elástica, para lo cual consideraremos que el material es perfectamente elástico y lineal, y sólo influirá la variación geométrica de la estructura. Este planteamiento es bastante interesante en la actualidad, donde en los modernos materiales de construcción y especialmente en el acero, con resistencias de hasta 3600 Kp/cm², las secciones transversales se reducen al mínimo. En estos casos el colapso de la estructura debe atribuirse a la inestabilidad elástica y no a la falta de resistencia del material.

El cálculo en segundo orden analiza la estabilidad de la estructura, ya que toma en cuenta el trabajo de las fuerzas exteriores debido a los desplazamientos por ellas producidos.

El planteamiento de la ecuación general de análisis está-

tico de estructuras teniendo en cuenta los efectos de segundo orden tiene la forma:

$$KU - K_G U = P \quad (1)$$

Donde:

P Vector de cargas exteriores sobre la estructura

K Matriz de rigidez de la estructura

K_G Matriz geométrica de rigidez de la estructura

U Vector desplazamiento, de todos los grados de libertad considerados en la estructura.

La ecuación 1 da lugar a los dos problemas fundamentales del cálculo en segundo orden, esto es: El análisis de deformaciones de segundo orden, y el cálculo del factor α_{cr} por el que multiplicando el vector de cargas exteriores hace que la estructura sea inestable.

El cálculo de deformaciones y tensiones de segundo orden de una estructura se hace usando la matriz geométrica de rigidez según la ecuación 1. No obstante esta matriz depende de la deformada y es necesario operar mediante tanteos. Para su resolución existen dos métodos: el método incremental y el método iterativo. Cuando el material es elástico-lineal ambos métodos llevan al mismo resultado.

En este artículo se usa el método iterativo, el cual desde el principio somete a la estructura a toda la carga P , y a par-

(*) Dr. Ing. de Caminos, Dpto. de Estructuras, PROINTEC, S.A.

(**) Dr. Ing. de Caminos, Coordinador de Estructuras Metálicas, Escuela de Ingenieros de Caminos, U.P.M.

(***) Ing. de Caminos, Prof. de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Universidad de Granada.

tir de ahí va superponiendo los efectos de segundo orden, hasta que el método converge:

$$\begin{aligned} U_1 &= K_0^{-1}P \\ U_2 &= K_1^{-1}P_{G1}U_1 \\ &\vdots \\ U_{i+1} &= K_i^{-1}K_{G_i}U_i \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

Denominamos K_i y K_{G_i} a la matriz de rigidez y a la matriz geométrica de rigidez existentes en la iteración i -ésima.

El cálculo del factor α_{CR} o problema de Raileigh hace que la ecuación 1 pueda ser planteada como un problema de autovalores y autovectores:

$$[K - \alpha_i K_G] \phi_i = 0 \quad (3)$$

En este artículo vamos a desarrollar un ejemplo de éste último problema, calculando en la ecuación 3 el primer autovalor (o factor crítico de inestabilidad general) por el método de Stodola de cálculo de autovalores y se analizará la convergencia para un ejemplo determinado, dependiendo de la partición usada en la estructura. Por último se plantearán cuales son las variables que influyen sobre la matriz de rigidez diferencial $[K - K_G]$, matriz que evalúa los efectos de segundo orden, y se estudiará la influencia del diseño sobre esta matriz.

Se pretende demostrar que el cálculo del α_{CR} es un buen valor para calificar la bondad del diseño de una estructura frente a su resistencia a la inestabilidad.

Ejemplo de aplicación del método iterativo

La inestabilidad estructural se plantea como un problema de resolución de autovectores y autovalores que resuelve la ecuación 3.

El valor más interesante en este problema, por ser el verdaderamente factible de suceder, es el primer autovalor $\alpha_1 = \alpha_{CR}$, junto con el primer autovector ϕ_1 , denominados Factor Crítico de Inestabilidad General y primera deformada de inestabilidad, respectivamente.

Mediante el programa LM¹, éste aplica el método de Stodola. El objetivo del programa es el cálculo de α_{CR} para un pórtico dado.

Se ha estudiado el pórtico de la figura 1. Los pilares son perfiles HEA-140, la viga superior IPE-180 y la viga inferior IPE-220. La partición usada inicialmente para el análisis es de tres elementos por barra.

El valor de α_{CR} es de 2,01, resultado obtenido en la quinta iteración.

(1) Programa elaborado en el Dpto. de Ingeniería Civil de la Universidad de Granada.

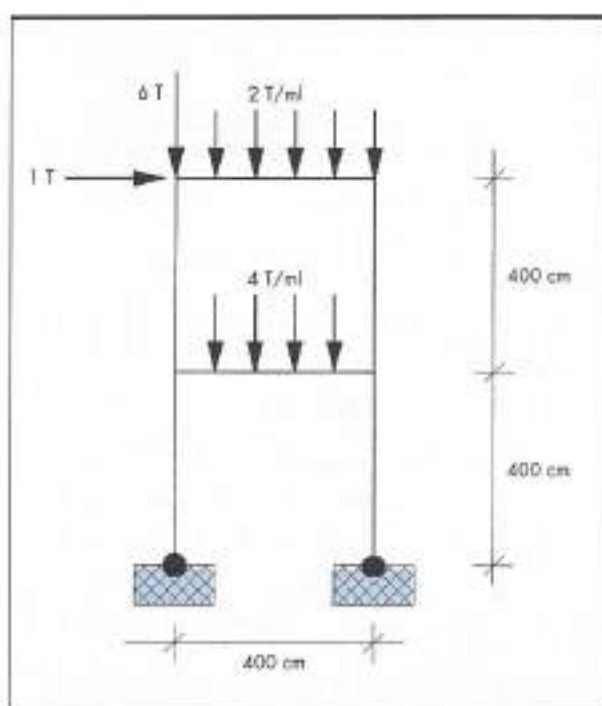


FIGURA 1.

Iteración	P1	P2	P3	P4	P5	P8	P10
1	2.73	2.53	2.48	2.47	2.46	2.45	2.44
2	3.49	3.54	3.53	3.52	3.52	3.52	3.52
3	2.28	2.05	2.01	1.99	1.99	1.98	1.98
4	2.66	2.15	2.09	2.06	2.05	2.05	2.04
5	2.28	2.05	2.01	1.99	1.98	1.98	1.98
6	2.29	2.07	2.02	2.01	2.00	1.99	1.99
7	2.29	2.06	2.02	2.00	2.00	1.99	1.99
8	2.28	2.05	2.01	1.99	1.99	1.98	1.98
9	2.28	2.05	2.01	1.99	1.98	1.97	1.97
10	2.28	2.05	2.01	1.99	1.99	1.98	1.98
11	2.29	2.06	2.01	2.00	1.99	1.98	1.98
12	2.29	2.06	2.02	2.00	1.99	1.98	1.98

TABLA 1.

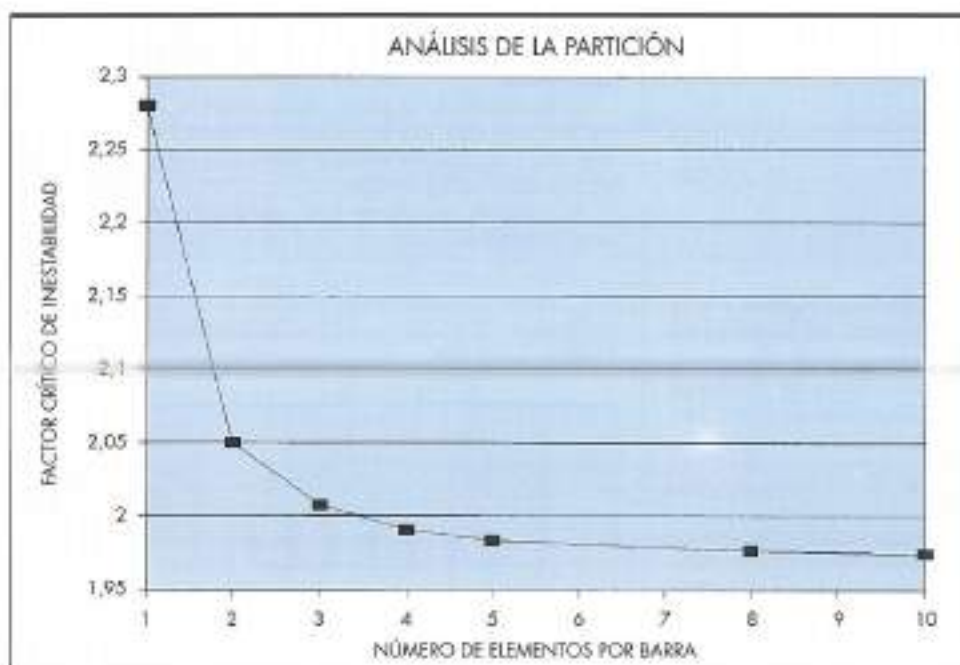


FIGURA 2.

ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA

Se ha analizado la convergencia desde dos puntos de vista:

- El número de iteraciones necesarias para la convergencia, dependiendo de la partición usada.
- El valor de α_{CR} dependiendo de la partición tomada.

Para resolver ambos problemas hemos discretizado el pórtico de la figura 1 en 1,2,3,4,5,8 y 10 elementos por barra, creando los pórticos P1, P2, P3, P4, P5, P8 y P10, donde cada número que acompaña a la letra "P" indica el número de elementos por barra considerados.

Ejecutando el programa LM para cada pórtico hemos obtenido la tabla 1. Se han tomado doce iteraciones dado que en todos los casos se ha visto que la convergencia ocurría antes que la duodécima iteración.

El primer planteamiento considerado en el estudio de la convergencia, esto es, el número de iteraciones necesarias para que ésta ocurra, nos muestra que en la quinta iteración e independientemente de la partición considerada el proceso converge.

Para el análisis de α_{CR} en función de la partición se ha realizado la figura 2. En esta figura se han representado gráficamente los resultados de la quinta iteración procedentes de la tabla 1, colocando en el eje de abscisas el número de elementos por barra considerados en cada pórtico y en el eje de ordenadas el valor de α_{CR} .

En vista de los resultados obtenidos se concluye que una partición de 4 ó 5 elementos por barra son suficientes para el estudio de α_{CR} del pórtico estudiado. La consideración de una partición menor lleva a valores poco exactos, y una partición mayor se presenta con un coste numérico excesivo para la precisión dada. Se intuye que la partición va a depender de dos factores: el geométrico de la estructura y la proximidad que se encuentre α_{CR} a la unidad.

VARIABLES EXISTENTES EN LA MATRIZ DE RIGIDEZ DIFERENCIAL

Como estamos viendo, cuando una estructura con una geometría determinada se la somete a unas cargas P , presenta

una matriz geométrica de rigidez K_G . Si mediante el incremento de las cargas P , llegamos hasta la situación de que esta estructura sea inestable, las nuevas cargas son $\alpha_{CR}P$, donde α_{CR} es un escalar y P es un vector. Se puede demostrar fácilmente que la matriz geométrica de rigidez correspondiente a la situación de inestabilidad tiene el valor $\alpha_{CR}K_G$.

Cuando una estructura presenta inestabilidad, la ecuación 1 en función de α_{CR} toma la expresión:

$$\alpha_{CR}P = KU - \alpha_{CR}K_GU \quad (4)$$

y despejando se tiene que:

$$\alpha_{CR} = KU[P + K_GU]^{-1} \quad (5)$$

U es función de K y K_G a través de P , P son las acciones exteriores, que vienen impuestas antes de diseñar una estructura. Al variar una estructura, en su diseño y en su dimensionamiento, se está influyendo directamente sobre las matrices K y K_G . Las variables existentes en estas dos matrices son:

- Ω área de cada elemento.
- I momento de inercia de cada elemento.
- E módulo de Young, que depende del material del elemento.

Disposición de la estructura (Diseño).

La variación de k (matriz de rigidez del elemento) respecto a las variables Ω e I se puede plantear dividiendo la matriz k en dos tipos de matrices: k^Ω y k^I en función de los términos de la matriz que dependen del área de la sección del elemento Ω y del momento de inercia I del elemento, respectivamente. Según este planteamiento la matriz de rigidez del elemento m , k_m , resulta como:

$$k_m = \Omega k_m^\Omega + I k_m^I \quad (6)$$

Mediante el ensamblaje de las matrices k_m se calcula la matriz K . En la consideración de más o menos elementos y en su disposición es donde influye el diseño.

Tras el análisis anteriormente expuesto observamos cómo influyen Ω , I y el *diseño* en el cálculo de α_{CR} de una estructura, supuesto que usamos el mismo material (E es constante).

Si pretendemos mejorar α_{CR} en una estructura, el *diseño* es la variable más importante. Bajo este punto de vista α_{CR} se presenta como un valor que es conveniente conocer cada vez que se introduce una modificación en el *diseño* de una estructura.

En estructuras metálicas, el valor de E es independiente del tipo de acero, cambiar E significaría usar otro material para mejorar el comportamiento frente a problemas de inestabilidad.

Se observa como corolario de este apartado que para mejorar la estabilidad en una estructura deberemos actuar sobre tres variables: Ω , I y el *diseño*.

CONTRIBUCIÓN DEL CÁLCULO EN SEGUNDO ORDEN A LA OPTIMIZACIÓN DEL DISEÑO DE ESTRUCTURAS. ANÁLISIS MEDIANTE EL CÁLCULO DE α_{CR}

Incrementando el valor de α_{CR} , mediante variaciones en el *diseño*, se contribuirá a mejorar el comportamiento de la estabilidad de una estructura. Un valor de α_{CR} grande nos asegura que estamos lejos de los problemas de inestabilidad, siempre que no haya problemas de límites de tensión.

Como anteriormente hemos analizado, las modificaciones en el *diseño* de una estructura son una de las variables principales en el valor del Factor Crítico de Inestabilidad General (α_{CR}) de esa estructura.

Es muy importante conocer si las modificaciones que se realizan a una estructura contribuyen o no a mejorarla frente a la inestabilidad. Así α_{CR} se presenta como un analizador cuantitativo para evaluar si las modificaciones de una estructura colaboran a su resistencia frente a la inestabilidad.

Ejemplo

Al pórtico P1 de la figura 3 se le han realizado seis modificaciones obteniendo los pórticos del P1 al P7. Estas variaciones pueden observarse en la figura siguiente.

Se considera para todos los pórticos de la figura 3 una partición de 4 elementos por barra, y se calcula el valor de α_{CR} mediante el programa LM.

Al igual que en el ejemplo anterior hemos obtenido la convergencia en la quinta iteración para todos los pórticos. El valor del Factor Crítico de Inestabilidad General calculado ha sido el siguiente:

Pórtico	α_{CR}
P1	1.88
P2	3.81
P3	3.92
P4	4.49
P5	4.50
P6	9.10
P7	3.10

TABLA 2.

Con este análisis podemos evaluar numéricamente las modificaciones introducidas. Por ejemplo observamos que colocando unos pilares más gruesos en la planta baja (P2) se logra mejor resultado que colocando unos angulares (P7), o que colocando pilares más gruesos en la primera planta y

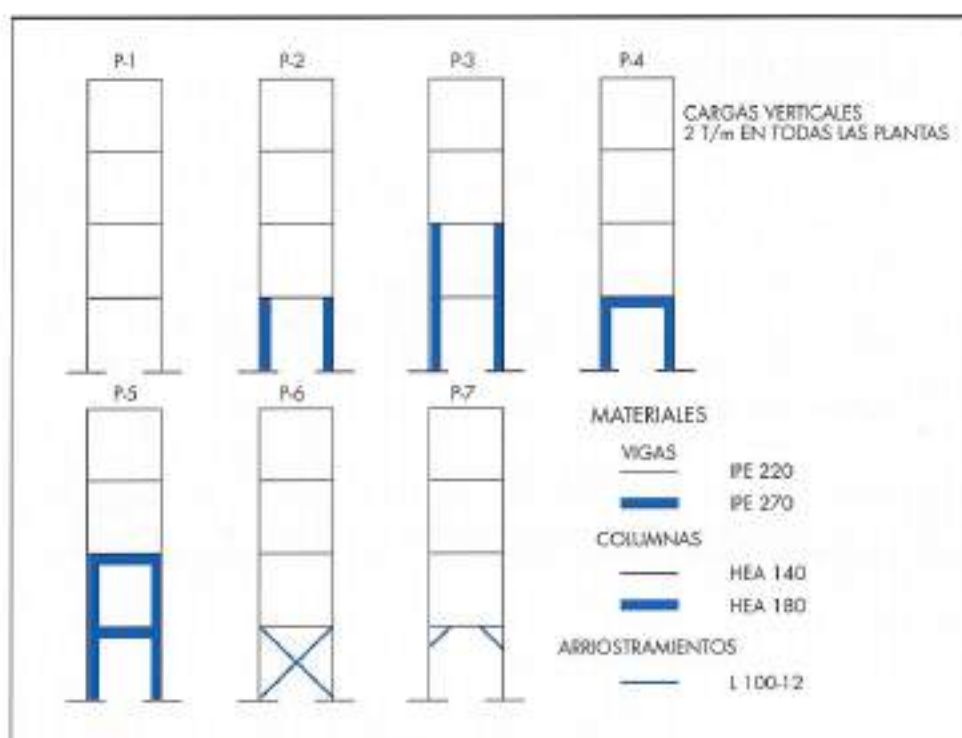


FIGURA 3.

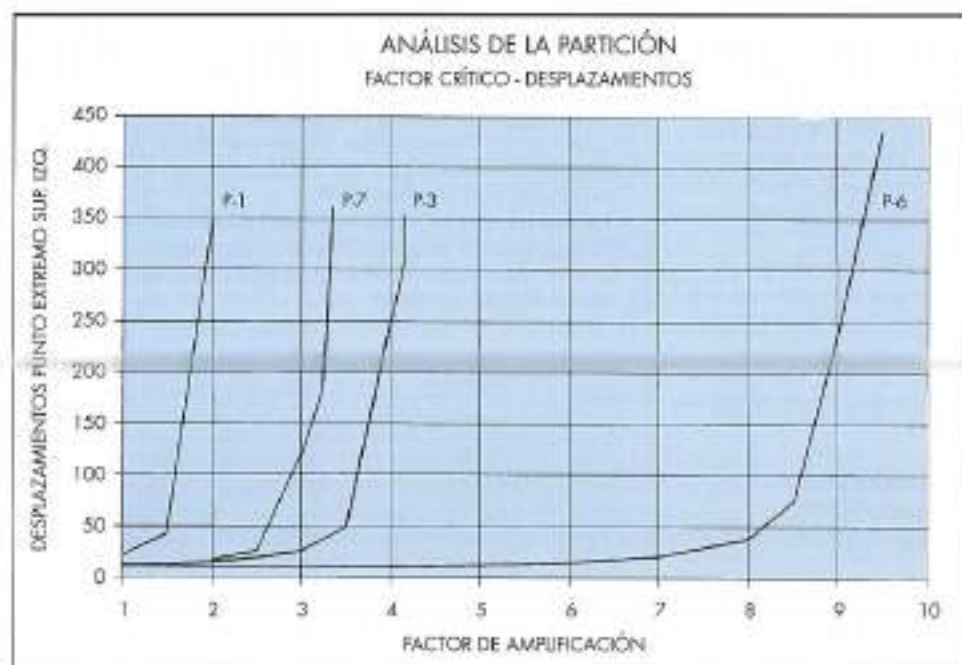


FIGURA 4.

en la planta baja (P3) no se logran grandes ventajas frente a la inestabilidad. Un fortalecimiento de toda la primera planta, vigas y pilares (P4) contribuye bastante a mejorar el valor de α_{cr} . La mejor solución son las cruces de San Andrés (P6), aunque es una solución que inutiliza la planta baja para el uso habitual que éstas suelen tener: puertas, escaparates, etc.

EVALUACIÓN DEL DISEÑO A PARTIR DEL CÁLCULO EN SEGUNDO ORDEN

Una comprobación de la mejora realizada a la estructura se puede observar mediante el análisis de la deformada según aumentan las cargas exteriores. El método de cálculo usado para obtener la deformada es el método iterativo de cálculo en segundo orden, para ello se ha usado el programa ER².

Ejemplo

Se han analizado los pórticos P1, P3, P6 y P7 de la figura 3, multiplicado las cargas exteriores por varios factores de amplificación. Mediante esta aplicación se pretende observar dos aspectos:

- La deformada resultante tendrá un comportamiento asintótico hacia el factor de amplificación α_{cr} .
- El comportamiento de las modificaciones estructurales efectuadas.

(2) El programa ER ha sido creado en el Dpto. de Ingeniería Civil de la Universidad de Granada.

En la figura 4 se han representado gráficamente los resultados obtenidos. En el eje de abscisas se representa el factor de amplificación de las cargas exteriores, y en el eje de ordenadas el desplazamiento efectuado por el punto superior izquierdo de la estructura, según un análisis en segundo orden.

BIBLIOGRAFÍA

- CLOUGH R. W. y PENZIEN J. "Dynamics of Structures". McGraw-Hill (1992). ISBN 0-07-011394-7.
- DONALD W. WHITE AND JEROME F. HAJJAR "Applications of Second-Order Elastic Analysis in LRFD". Research to Practice. Engineering Journal, AISC (American Institute of Steel Construction), No. 4 1991. ISSN 0013-8029/91.
- GALEA Y. (1984). "Flambement des structures planes à barres". Revue Construction Métallique, n. 3. 1984. ISSN 0045-8198/84.
- HERNÁNDEZ MONTES E. y RUA ÁLVAREZ E. (1994). "Cálculo en segundo orden en la normativa europea". Revista de Obras Públicas. Octubre 1994. Páginas 43-48. ISSN 0034-8619/94.
- HERNÁNDEZ MONTES E. (RUA ÁLVAREZ E. director) "Contribución del Cálculo en Segundo Orden a la Optimización del Diseño de Estructuras Metálicas" Tesis Doctoral. Granada Junio 1995.
- HJEMSTAD, K. D. y PEZESHK, S. (1991). "Optimal Design of frames of resist buckling under multiple load cases". Journal of Structural Engineering., ASCE, Volumen 117, n° 3, Marzo, 1991. ISSN 0733-9445/91/0003-0914.
- SACK RONALD L. (1993) "Matrix Structural Analysis", Editorial PWS.KENT. ISBN 0-534-91564-7.