

Aproximación teórica al estudio de la zona de influencia de las sondas de resistencia para medidas de nivel en líquidos

ANTONIO RUIZ MATEO (*)

RESUMEN En los laboratorios de hidráulica suelen llevarse a cabo ensayos sobre modelos físicos a escala reducida de determinadas estructuras hidráulicas. Ejemplos típicos son los aliviaderos, las compuertas y los canales entre las obras fluviales, y los distintos tipos de diques así como la distribución en planta de muelles y dársenas en un puerto, entre las obras marítimas. Uno de los parámetros que siempre es necesario medir en estos ensayos es el nivel de agua, y para ello, el tipo de transductor más utilizado por su sencillez y robustez es la sonda de resistencia. En este artículo se analizan las distintas causas que inciden sobre las medidas y se estudia el efecto de geometría finita mediante soluciones analíticas y numéricas.

THEORETICAL APPROACH TO THE STUDY OF THE ZONE OF INFLUENCE OF THE RESISTANCE PROBES FOR MEASURING THE LEVEL OF LIQUIDS

ABSTRACT In the hydraulic laboratories, tests are usually carried out on reduced scale physical models of certain hydraulic structures. Typical examples include the waste weirs, sluice gates and canals, among fluvial works, and the different kinds of dykes, as well as the distribution of quays and basins within harbours, among maritime works. One of the parameters which must always be measured in these tests is the water level and, for this purpose, the most widely used transducer, thanks to its simplicity and robustness, is the resistance probe. In this article, we analyze the different causes of error in the measurements taken, and we study the effect of finite geometry by means of analytical and numerical solutions.

Palabras clave: Estructuras hidráulicas; Modelos reducidos; Sonda de resistencia; Medidas de nivel; Soluciones analíticas; Geometría finita; Soluciones numéricas.

INTRODUCCIÓN

En los laboratorios de hidráulica suelen llevarse a cabo ensayos sobre modelos físicos a escala reducida de determinadas estructuras hidráulicas. Ejemplos típicos son los aliviaderos, las compuertas y los canales entre las obras fluviales, y los distintos tipos de diques así como la distribución en planta de muelles y dársenas en un puerto, entre las obras marítimas.

Uno de los parámetros que siempre es necesario medir en estos ensayos es el nivel de agua, y para ello, el tipo de transductor más utilizado por su sencillez y robustez es la sonda de resistencia [1][2][3] (figura 1).

Esta sonda consta de dos conductores cilíndricos y paralelos de un radio que suele estar comprendido entre 1 y 10 mm, separados entre sí una distancia del orden de varias veces el radio. Entre ambos conductores se establece una di-

ferencia de potencial conocida y así, cuando una parte de la sonda está sumergida, la conductividad del agua hace que se establezca una corriente eléctrica desde un conductor al otro. Si se divide la diferencia de potencial por la intensidad de esta corriente se obtiene la "resistencia del medio", concepto que en situaciones como ésta tiene una interpretación más difícil que en el caso de conductores filiformes.

En cualquier caso, la forma de medirla es clara y sencilla (al menos conceptualmente) y, por el propio planteamiento del problema, se deduce que depende linealmente de la conductividad del agua y, de forma más complicada, de los parámetros geométricos tales como tamaño y separación de los conductores, longitud y orientación del tramo sumergido, distancia al fondo, etc.

Si introducimos los conductores perpendicularmente a la superficie del agua (figura 2) se establece un campo densidad de corriente j que es aproximadamente bidimensional. Si se calcula el flujo de este campo a través de una franja horizontal de ancho unidad situada en el plano equidistante entre ambos conductores, la intensidad total se obtiene simplemente multiplicando dicho flujo por la longitud del tramo de sonda sumergido. Esto quiere decir que si se desprecian

(*) Ingeniero de Caminos, Jefe de Área en el Centro de Estudios de Puertos y Costas, del CEDEX. Profesor de Electrotécnica en la Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, de Madrid.

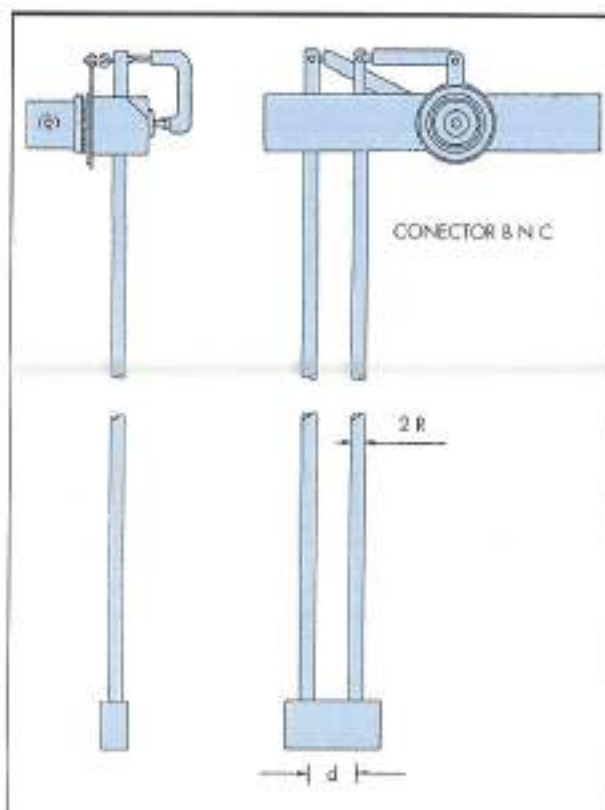


FIGURA 1. Aspecto general de una sonda de resistencia para medida de nivel en líquidos.

las líneas de corrientes en torno al extremo de la sonda (que evidentemente no son bidimensionales), la resistencia del medio en estas condiciones es inversamente proporcional a la longitud del tramo sumergido. Por lo tanto, midiendo la variación de dicha resistencia se pueden conocer las oscilaciones del nivel de agua, lo cual constituye el principio de funcionamiento de estas sondas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Aunque el principio básico es muy sencillo, si se quieren hacer medidas de precisión es necesario considerar y corregir cierto número de factores que inciden sobre el resultado de la medida. Los más importantes son los siguientes:

1. VARIACIONES DE LA CONDUCTIVIDAD DEL AGUA

Durante la realización del ensayo suelen producirse cambios de temperatura y de salinidad que se traducen en unas variaciones de su conductividad. Un cambio de 1°C produce una variación del 2% en la conductividad. Por otro lado, la conductividad es proporcional a la concentración de sales por lo que las variaciones porcentuales son idénticas para ambas magnitudes.

2. EFECTO DE EXTREMO

En el extremo de la sonda las líneas de campo no son bidimensionales por lo que la conductancia (magnitud inversa de la resistencia) no es estrictamente proporcional a la longitud de sonda sumergida. Si la distancia entre el extremo de la sonda y el fondo permanece constante, puede conside-

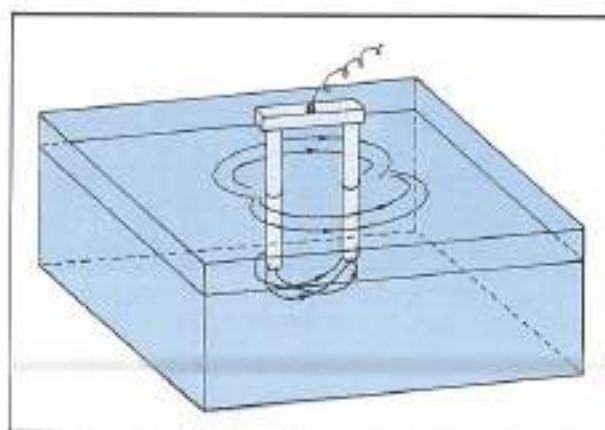


FIGURA 2. Esquema de las líneas de corriente.

rarse que también es constante la parte de conductancia debida a las líneas de corriente del extremo con lo cual, la dependencia de la conductancia respecto a la longitud de sonda sumergida seguirá siendo lineal pero con ordenada en el origen distinta de cero.

3. GEOMETRÍA FINITA

En condiciones estrictamente bidimensionales y si se trata de un medio infinito (en planta) puede calcularse la conductancia analíticamente (ver expresiones más adelante). Pero cuando hay que medir en zonas restringidas (aguas someras, fondo de dársenas, etc), es obvio que la conductividad será muy diferente de aquella. Más aún, incluso en zonas más despejadas existe una influencia de los contornos sólidos del modelo sobre la conductancia que conviene conocer y valorar.

4. INCERTIDUMBRES SOBRE LA GANANCIA Y LA DESVIACIÓN RESPECTO AL CERO ("OFFSET") DEL AMPLIFICADOR

Este es un problema bastante habitual en circuitos basados en amplificadores operacionales.

5. ONDAS CORTAS

Cuando se miden niveles en presencia de ondas cortas, la superficie del agua no puede considerarse plana (figura 3). El campo densidad de corriente se aleja de la bidimensionalidad y de nuevo la conductancia deja de ser estrictamente proporcional a la longitud de sonda sumergida. En una situación como la de la figura (sonda en la cresta de la onda), la sección que conduce corriente es inferior a la que existiría con superficie horizontal y el mismo nivel de sonda sumergida; por lo tanto, la conductancia sería menor y la sonda daría un nivel inferior al realmente existente en la cresta. Como en un valle la sonda daría un nivel superior, la altura de ola calculada se vería afectada doblemente por este error sistemático.

En la práctica se emplean ciertos procedimientos que compensan o corrigen estos efectos.

Para compensar las variaciones de conductividad todas las sondas llevan en su extremo inferior otro par de conductores colocados generalmente a modo de puente entre los extremos de los conductores principales, pero aislados de éstos. El circuito acondicionador compara las dos señales y lo que suministra a la salida es en realidad una señal proporcional al cociente entre ambas. Como las dos señales

son proporcionales a la conductividad, su cociente es independiente de ésta, lo cual hace que la respuesta sea mucho más estable. El precio que se paga por ello es que al establecerse líneas de corriente entre ambas parejas de conductores se acentúan los efectos de extremo que se han comentado antes.

Para corregir los efectos 2, 3 y 4 de la relación anterior se lleva a cabo una calibración previa del conjunto sonda-amplificador con aquella colocada ya en su lugar de medida. Midiendo la respuesta del sistema para varios niveles de llenado (dos si se admite la variación lineal; más si no se confía en ella), se obtiene una curva de calibración. Aunque los efectos de extremo, de geometría no infinita y de incertidumbres de los parámetros del amplificador sean apreciables, si éstos se mantienen constantes durante el experimento, la curva de calibración permitirá corregir convenientemente la medida.

Ahora bien, por cuestiones operativas (algunos modelos puede tardar días en llenarse de agua) es frecuente que la calibración de la sonda se lleve a cabo cuando el nivel de agua ha alcanzado ya su valor estático definitivo. Entonces lo que se hace es desplazar verticalmente la sonda hacia arriba y hacia abajo respecto a su posición final, midiendo con precisión dichos desplazamientos y observando en cada caso la respuesta del sistema.

Naturalmente, si se utiliza este procedimiento el efecto de extremo será diferente para las diferentes posiciones de la sonda, sobre todo si las medidas se realizan en aguas someras. Estas variaciones quedarán incorporadas a la curva de calibración cuando en realidad, durante el ensayo, la sonda está inmóvil y el efecto de extremo es constante.

Podría pensarse en utilizar otro procedimiento para calibrar la sonda sin necesidad de desplazarla. Consistiría en rodear ésta con un cilindro que ajustara perfectamente al fondo y añadir agua en su interior para conseguir los nive-

les necesarios para la calibración. Pero en este caso el efecto de geometría finita (en planta) sería diferente con cilindro y sin él.

Para estudiar la importancia de estos efectos y, sobre todo para determinar en cada método los rangos admisibles de los parámetros geométricos (distancia mínima al fondo y profundidad mínima, para el primero; tamaño mínimo del cilindro para el segundo), se ha iniciado en el Centro de Estudios de Puertos y Costas del CEDEX un estudio teórico-experimental de la zona de influencia de este tipo de sondas.

Los resultados permitirán también determinar la mínima longitud de onda admisible para que no aparezcan efectos de onda corta.

El resto del presente artículo resume los resultados obtenidos hasta el momento sobre la zona de influencia horizontal desde una aproximación eminentemente teórica utilizando métodos analíticos y numéricos.

SOLUCIONES ANALÍTICAS

GEOMETRÍA INFINITA

Consideramos primero el caso de geometría infinita, que puede resolverse analíticamente.

El problema general de determinar la distribución de potencial eléctrico creado por dos cilindros conductores de sección circular de radios y potenciales conocidos cualesquiera puede resolverse por el teorema de sustitución de cargas por conductores, que aparece espléndidamente explicado y aplicado en [4]. En efecto, en dicha referencia se demuestra que el campo creado por ambos cilindros es idéntico al que crean dos distribuciones rectilíneas de carga situadas en el plano formado por los ejes de los conductores, paralelamente a éstos y a una distancia entre sí que siempre es inferior a la

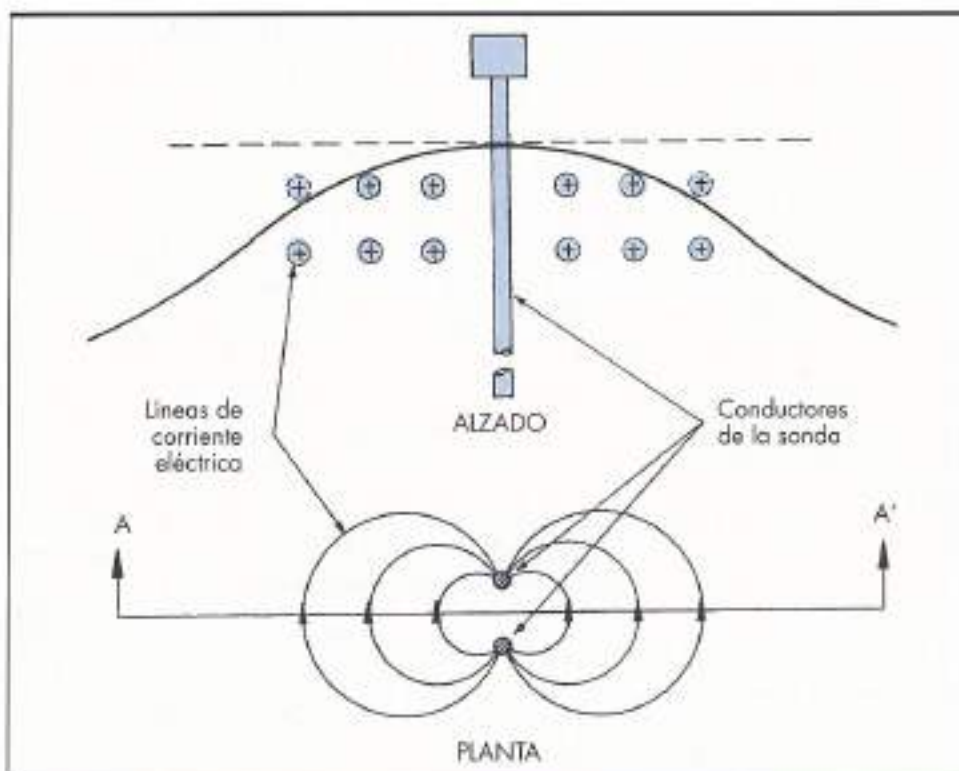


FIGURA 3. Efectos de las ondas cortas.

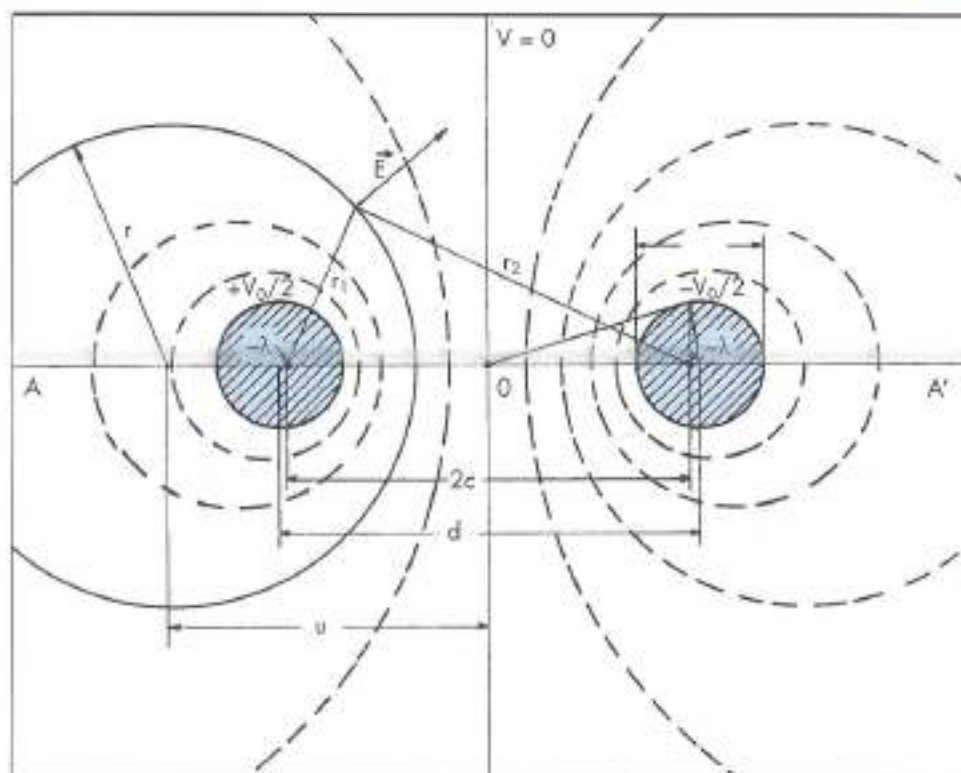


FIGURA 4. Superficies equipotenciales para el problema bidimensional.

que existe entre dichas ejes, y superior a la que existe entre sus superficies.

En nuestro caso los dos conductores tienen el mismo radio R y sus ejes están separados una distancia d (ver notación en la figura 4). Entonces la semidistancia c entre los ejes ficticios cargados viene dada por:

$$c = \frac{\sqrt{d^2 - 4R^2}}{2} \quad (1)$$

que puede interpretarse diciendo que c es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la semidistancia entre ejes de los conductores y cuyo otro cateto es el radio de éstos.

La relación entre la densidad lineal de carga λ y la diferencia de potencial entre los conductores V_0 (el potencial de cada conductor es $V_0/2$ y $-V_0/2$ respectivamente) viene dada por:

$$\frac{\lambda}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{m} \quad (2)$$

siendo

$$m = \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}) = \arg ch \mu \quad (3)$$

$$\mu = \frac{d^2}{2R^2} - 1$$

y donde ϵ es la constante dieléctrica del agua (unas 80 veces mayor que la del vacío).

Además, aplicando el teorema de Gauss a una superficie cilíndrica infinitamente próxima al conductor con potencial $V_0/2$ pero exterior a éste, al ser el campo eléctrico E exactamente el mismo cuando está el conductor que cuando se sustituye éste por la distribución rectilínea de carga, se deduce

que la carga presente en el conductor por unidad de longitud ha de ser igual a λ , por lo que la expresión (4) representa también la capacidad del sistema considerado como condensador.

Nótese que al ser

$$\arg ch x = 2 \arg ch \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

también se puede expresar m mediante:

$$m = 2 \arg ch \delta = \ln(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})^2 \quad (4)$$

$$\delta = \frac{d}{2R}$$

que es una expresión algo más sencilla que (3).

Reducido el problema al de dos distribuciones de carga rectilíneas y paralelas, el potencial eléctrico en cualquier punto exterior a los conductores puede calcularse mediante la sencilla expresión:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = V_0 \frac{\beta}{m} \quad (5)$$

$$\beta = \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

siendo r_1 y r_2 las distancias de dicho punto a las distribuciones $+\lambda$ y $-\lambda$ respectivamente. De aquí se deduce que las superficies equipotenciales son el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a dos ejes paralelos es constante, lo cual corresponde a cilindros con ejes situados en el plano AA' (figura 4).

El cilindro que corresponde a un valor dado de V tiene un radio r y su eje se encuentra a una distancia u del centro O , dados por las expresiones:

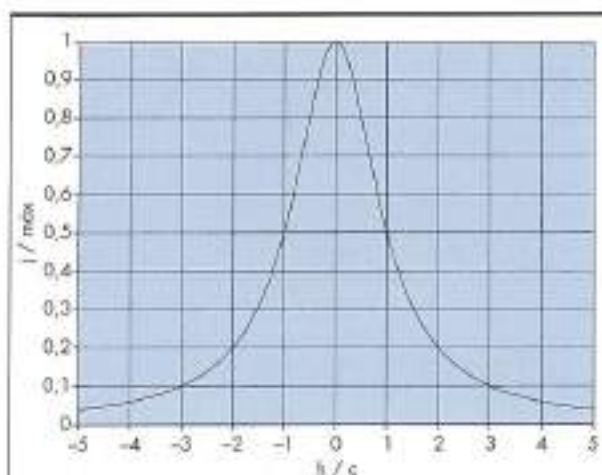


FIGURA 5. Densidad de corriente en el plano de simetría $V = 0$ (valores relativos respecto al máximo: $i_{\max} = 2\sigma V_0 / mc$).

$$r = \frac{C}{sh\beta} \quad u = \frac{C}{th\beta} \quad (6, 7)$$

En particular, el plano de simetría formado por los puntos que equidistan de ambos conductores ($r_1 = r_2$, o sea, $\beta = 0$) tiene potencial nulo.

El campo eléctrico es en cada punto perpendicular a las superficies equipotenciales, lleva el sentido de los potenciales decrecientes y su módulo vale

$$|E| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{2c}{r_1 r_2} = \frac{V_0}{m} \frac{2c}{r_1 r_2} \quad (8)$$

Puede demostrarse que las líneas de campo son arcos de circunferencias horizontales con centros en el plano de simetría correspondiente a potencial nulo (figura 7). En los puntos de este plano, como $r_1 = r_2$, el campo eléctrico vale:

$$|E| = \frac{V_0}{m} \frac{2c}{c^2 + h^2}$$

siendo h la distancia de dicho punto al centro de simetría O .

La densidad de corriente eléctrica en cada punto de la masa de agua que rodea a la sonda será (ley de Ohm):

$$j = \sigma E \quad (9)$$

siendo σ la conductividad del agua. Para conocer la intensidad eléctrica que pasa de un conductor a otro por unidad de longitud de sonda hay que calcular el flujo j a través de una banda horizontal situada sobre un cilindro de generatrices verticales con sección arbitraria, pero que rodee a uno solo de los conductores. Conviene elegir una de las superficies equipotenciales ya que en ellas el campo E y la normal coinciden y, entre éstas, la superficie $V = 0$ que además es plana. En dicha superficie la densidad de corriente vale:

$$j = \frac{\sigma V_0}{m} \frac{2c}{c^2 + h^2} = \frac{2\sigma V_0}{mc} \frac{1}{1 + (h/c)^2} \quad (10)$$

que toma su valor máximo en el centro de simetría O y decrece monótonamente al alejarnos de dicho punto (figura 5).

La intensidad que pasa a través de una longitud H de dicha banda contada a partir del punto O es:

$$i = \int_0^H \sigma |E| dh = \frac{2\sigma V_0}{m} \arctg \frac{H}{c} \quad (11)$$

y la intensidad total para geometría infinita sería

$$i_{\infty} = \frac{2\pi\sigma}{m} V_0 \quad (12)$$

expresión que puede deducirse directamente de (2) por aplicación del teorema de Gauss. Mediante este mismo teorema se demuestra fácilmente que:

- La expresión (12) da también la intensidad que pasa a través de cualquier superficie cilíndrica cerrada o abierta hacia el infinito que contenga a uno solo de los conductores y, en particular, a través de cualquier plano que pase entre estos.
- La intensidad que pasa a través de cualquier superficie de esta mismo tipo que, o no contenga a ningún conductor o los contenga a ambos, es nula. En particular también es nula para cualquier plano que deje a ambos conductores en el mismo semiespacio.
- Como consecuencia, dado un haz de semiplanos con charnela P paralela a los conductores (figura 6), todos los semiplanos que intersecten a la banda A_2A_3 del plano de los conductores comprendida entre estos (por ejemplo: I, I', I'') estarán atravesados por la misma intensidad i_i y todos los que intersecten al semiplano exterior AA_1 (como el E), al semiplano exterior A_4A' (como el E') o que no intersecten al plano AA' (como el E'') estarán atravesados por la misma intensidad i_e . Además, eligiendo adecuadamente los signos, se tiene que $i_i + i_e = i_{\infty}$. Esta propiedad será usada más adelante.
- La propiedad anterior se cumple también si se sustituyen los semiplanos por superficies cilíndricas cuya traza sea una curva semi-infinita que arranque del punto P .

Teniendo en cuenta (12), la conductancia de la sonda para geometría infinita es:

$$G_{\infty} = \frac{2\pi\sigma}{m} \quad (13)$$

Haremos notar aquí que en la práctica se utiliza corriente alterna para evitar fenómenos de electrólisis. Esto hace que el circuito equivalente del sistema sea ahora la

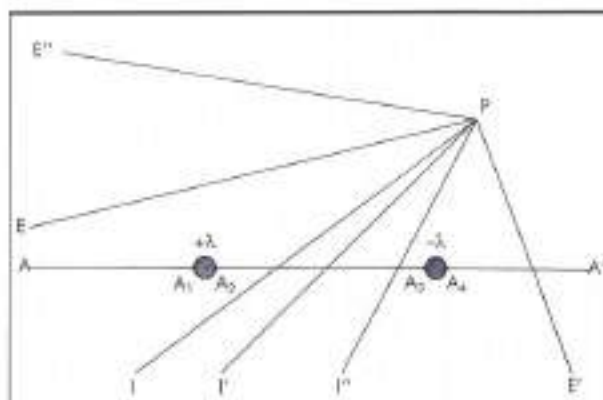


FIGURA 6. La intensidad que atraviesa cualquiera de los semiplanos I, I', I'' es i_i la que atraviesa los semiplanos E, E', E'' es i_e , y se cumple: $i_i + i_e = i_{\infty}$.

conductancia en paralelo con la capacidad (4). La admitancia compleja del conjunto será por tanto:

$$Y = \frac{2\pi\sigma}{m} + j\omega \frac{2\pi\epsilon}{m} \quad (14)$$

Teniendo en cuenta que el agua destilada tiene una conductividad del orden de 10^{-4} S/m (la del agua del grifo es aun mayor) y que $\epsilon = 10^{-9}$ C/V · m, es evidente que para las frecuencias industriales el efecto capacitivo es despreciable respecto al de conducción.

EFFECTO DE GEOMETRÍA FINITA

La expresión (11) puede utilizarse como una primera aproximación para estimar el efecto de geometría finita. De hecho, si se colocara alrededor de la sonda un cilindro aislante cuya sección transversal coincidiera con lo señalado mediante línea gruesa en la figura 7, la intensidad entre conductores sería exactamente el doble de la indicada por la expresión (11) con lo cual, la conductancia sería:

$$G = \frac{4\sigma}{m} \operatorname{arctg} \frac{H}{c} \quad (15)$$

La conductancia relativa tomando como referencia la de geometría infinita sería:

$$G_r = \frac{G}{G_\infty} = \frac{\operatorname{arctg}(H/c)}{\pi/2} \quad (16)$$

Por ejemplo para una sonda con $R = 2$ mm y $d = 11$ mm resulta $c = 5.12$ mm, con lo cual para conseguir que la conductancia relativa sea del 95% se requiere $H = 65$ mm, que representa una distancia considerable para un modelo reducido.

Otra forma de estudiar el efecto de geometría finita consiste en analizar lo que ocurre cuando la sonda se coloca

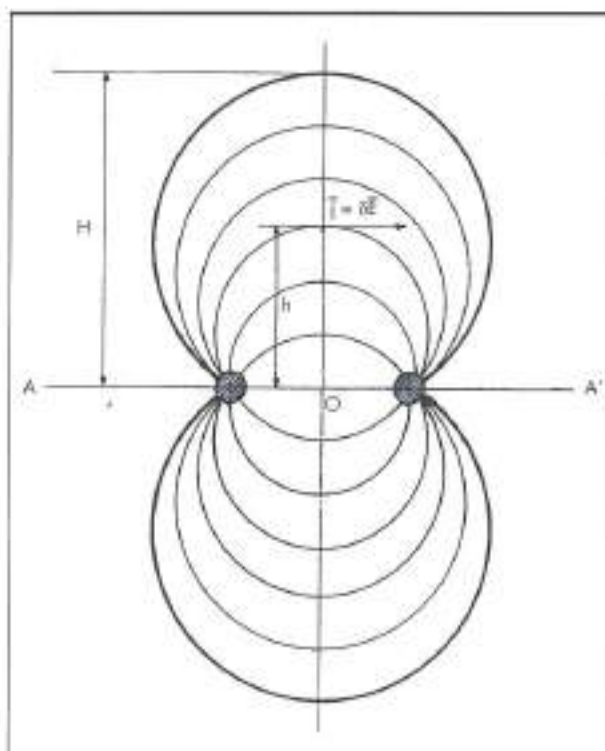


FIGURA 7. Líneas de corriente para el problema bidimensional.

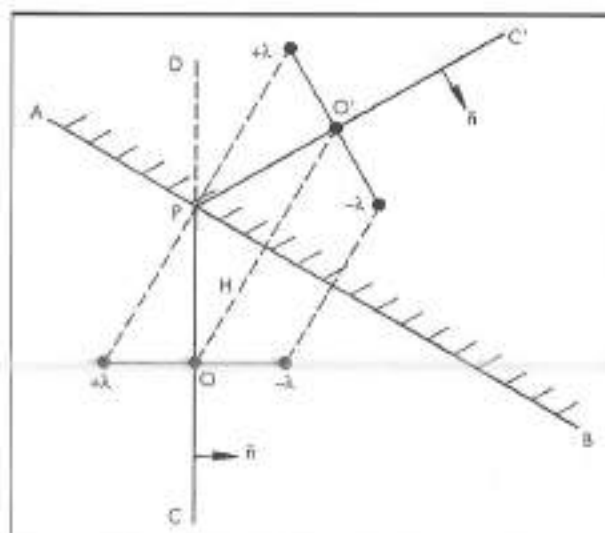


FIGURA 8. La intensidad que atraviesa el semiplano PC en presencia de la pared aislante AB es igual que la que atraviesa el plano completo CD cuando ésta no existe.

junto a una pared aislante. Supongamos que se sitúa la sonda de forma que la distancia de la pared al centro de simetría O de la sonda sea H (figura 8). Si H es mucho mayor que d y que R, es evidente que el efecto será despreciable. Veamos qué ocurre en los demás casos.

Si H es mucho mayor que R, pero comparable a d, el problema puede resolverse fácilmente haciendo la hipótesis de que los conductores pueden sustituirse por los ejes cargados ficticios que, además, podemos suponer que coinciden con los ejes de simetría de los conductores. La solución se obtiene por el método de las imágenes y consiste en superponer al campo creado por la sonda con geometría infinita, el que crearía otra sonda igual a la primera, pero situada simétricamente a ésta respecto al plano de la pared aislante. De esta forma se asegura el cumplimiento de la condición de que no exista corriente perpendicular a dicha pared (anulación de la componente normal del campo eléctrico).

No escribiremos la expresión del campo resultante que, por otra parte, se obtiene fácilmente a partir de (8). Sin embargo, si vamos a comentar una consecuencia importante que se deduce de la forma en como se ha obtenido la solución: la conductancia es ahora exactamente la misma que la correspondiente a geometría infinita y viene dada, por tanto, por la expresión (13). En efecto, la conductancia es el cociente entre la intensidad y la diferencia de potencial y, aunque ahora para calcular la intensidad solo hay que integrar sobre el semiplano PC (figura 8) situado a un lado de la pared aislante, la intensidad debida a la sonda ficticia que atraviesa dicho semiplano es, por simetría, exactamente igual a la que, creada por la sonda original, atravesaría el semiplano PC' situado al otro lado de la pared, y ésta a su vez, por la propiedad demostrada más arriba, es igual a la que, creada por esta misma sonda, atravesaría el semiplano PD, por lo que al superponer los efectos de ambos campos, el resultado coincide con el que se obtenía a partir de una sola sonda integrando sobre el plano completo CD. En realidad, la aplicación del teorema de Gauss al diédrico CPB conduce directamente a mismo resultado ya que el flujo a través del semiplano PB es nulo por tratarse de una pared aislante.

Esto quiere decir que la presencia de una pared aislante situada a una distancia mucho mayor que el radio de los conductores no tiene efecto alguno sobre la conductancia.

Para estudiar el caso en que las tres variables H , d y R toman valores comparables podría pensarse en aplicar también el método de las imágenes y llegar, por tanto, a la misma conclusión. Pero este método no es aplicable cuando se trata de conductores de dimensiones finitas como puede comprobarse fácilmente con el siguiente razonamiento. Si colocamos en este caso una sonda ficticia simétrica de la original y superponemos los campos creados por ambas, es claro que por simetría también se consigue cumplir la condición de contorno en la pared aislante, pero entonces la dirección del campo eléctrico en la superficie de los conductores ya no sería perpendicular a éstas porque estamos sumando un vector que sí lo es (el creado por el propio conductor) con otro que en general tendrá otra dirección (el creado por su imagen). En otras palabras, las superficies de los conductores no serían superficies equipotenciales del campo obtenido por superposición.

SOLUCIONES NUMÉRICAS

Con el fin de estimar el efecto de geometría finita para este caso y para otras formas de cilindros aislantes se ha preparado un modelo numérico que resuelve la ecuación de Laplace por diferencias finitas para una geometría que, por simplificar la programación y el cálculo, se ha supuesto con conductores de sección cuadrada y con cilindros confinantes de sección rectangular centrados respecto a los conductores.

Como el problema es simétrico respecto al plano de los conductores y antisimétrico respecto al plano de potencial nulo, basta modelizar la cuarta parte de la región confinada (figura 9).

Es sabido que el potencial debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

en todo el espacio comprendido entre la superficie confinante y el conductor. Además, deben cumplirse las siguientes condiciones de contorno:

- Potencial constante en la superficie del conductor. En el cálculo numérico se ha supuesto $V = 0,5$.
- Potencial constante e igual a cero en el plano de antisimetría BB' .
- Derivada normal igual a cero en el plano de simetría AA' .
- Derivada normal igual a cero en la superficie confinante.

En la figura 10 pueden verse las equipotenciales correspondientes a dos casos concretos de relaciones entre las diferentes variables geométricas.

Para calcular la conductancia es necesario conocer la intensidad que va de uno a otro conductor de la sonda. Esto se hace calculando el campo eléctrico en los puntos del plano BB' como derivada del potencial respecto a la normal, lo cual, para la disposición geométrica elegida resulta muy sencillo:

$$|E|_{x,0} = \frac{V_{k,1} - V_{k,0}}{\Delta x} = \frac{V_{k,1}}{\Delta x} \quad (18)$$

ya que $V_{k,0} = 0$.

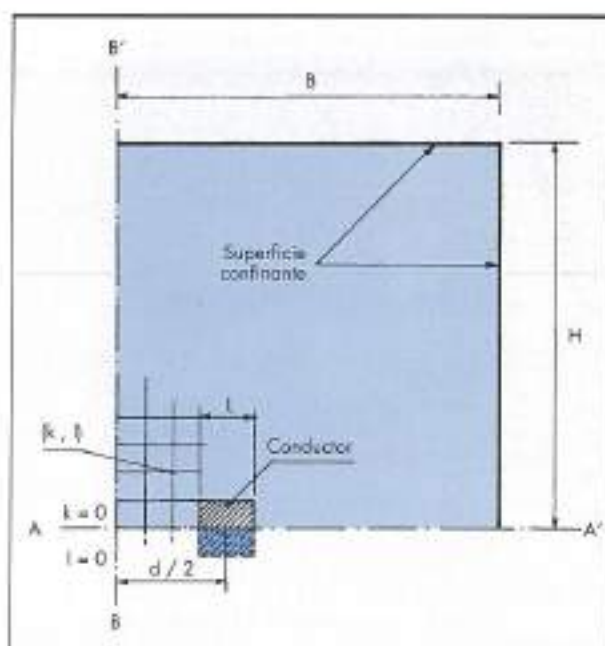


FIGURA 9. Esquema de definición del modelo numérico.

La intensidad total, que coincide con la conductancia por haber hecho $V_0 = 1$, vale:

$$G = 2 \sum_k \sigma |E|_{x,0} \Delta y = 2 \sigma \frac{\Delta y}{\Delta x} \sum_k V_{k,1} \quad (19)$$

En los gráficos de la figura 11 se resumen los resultados obtenidos al aplicar el modelo a varias geometrías, definida cada una de éstas por valores determinados de d/L , H/d y B/d . Cada problema ha sido resuelto por diferencias finitas con celdas cuadradas de tamaños $d/2$, $d/4$ y $d/8$, haciendo luego una extrapolación global (ver, por ejemplo, [5]).

En ordenadas se han representado los valores de G/G_0 , siendo G el resultado obtenido numéricamente por aplicación de (19) y G_0 el valor obtenido de (13) para una sonda con conductores de sección circular, con igual separación entre ejes (d) y con diámetros de estos iguales a L , es decir, conductores "inscritos" en la sección cuadrada de los que se han utilizado para el cálculo numérico (figura 6).

Parece lógico suponer que el comportamiento de los conductores cuadrados sea intermedio entre el de los conductores circulares inscritos ya mencionados ($R = L/2$) y el de otros conductores circulares circunscritos al cuadrado ($R = L/\sqrt{2}$). Por ello, en los gráficos de la figura 11 se ha marcado una línea horizontal correspondiente al cociente entre los valores de G_0 para los cilindros circunscrito e inscrito respectivamente, el cual, como es lógico, toma valores más pequeños cuanto mayor es la relación d/L .

De los resultados numéricos representados en estos gráficos se deduce que el efecto de geometría finita es muy importante cuando los cocientes H/d o B/d son menores que 1; moderado cuando toman valores entre 1 y 2, y leve cuando son mayores que 2. Por lo tanto, la distancia $2d$ puede considerarse como valor límite para:

- El radio mínimo de un cilindro confinante que sirva para calibrar la sonda con independencia del nivel de agua que exista en el resto del modelo físico.

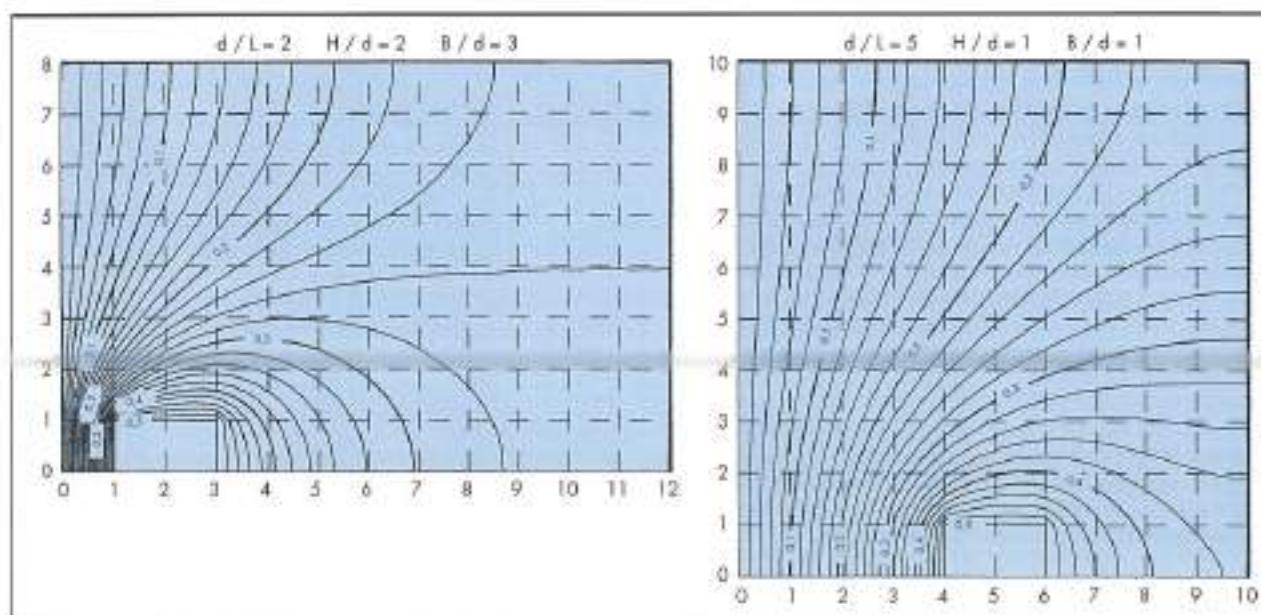


FIGURA 10. Situación de las superficies equipotenciales para dos ejemplos de geometrías finitas.

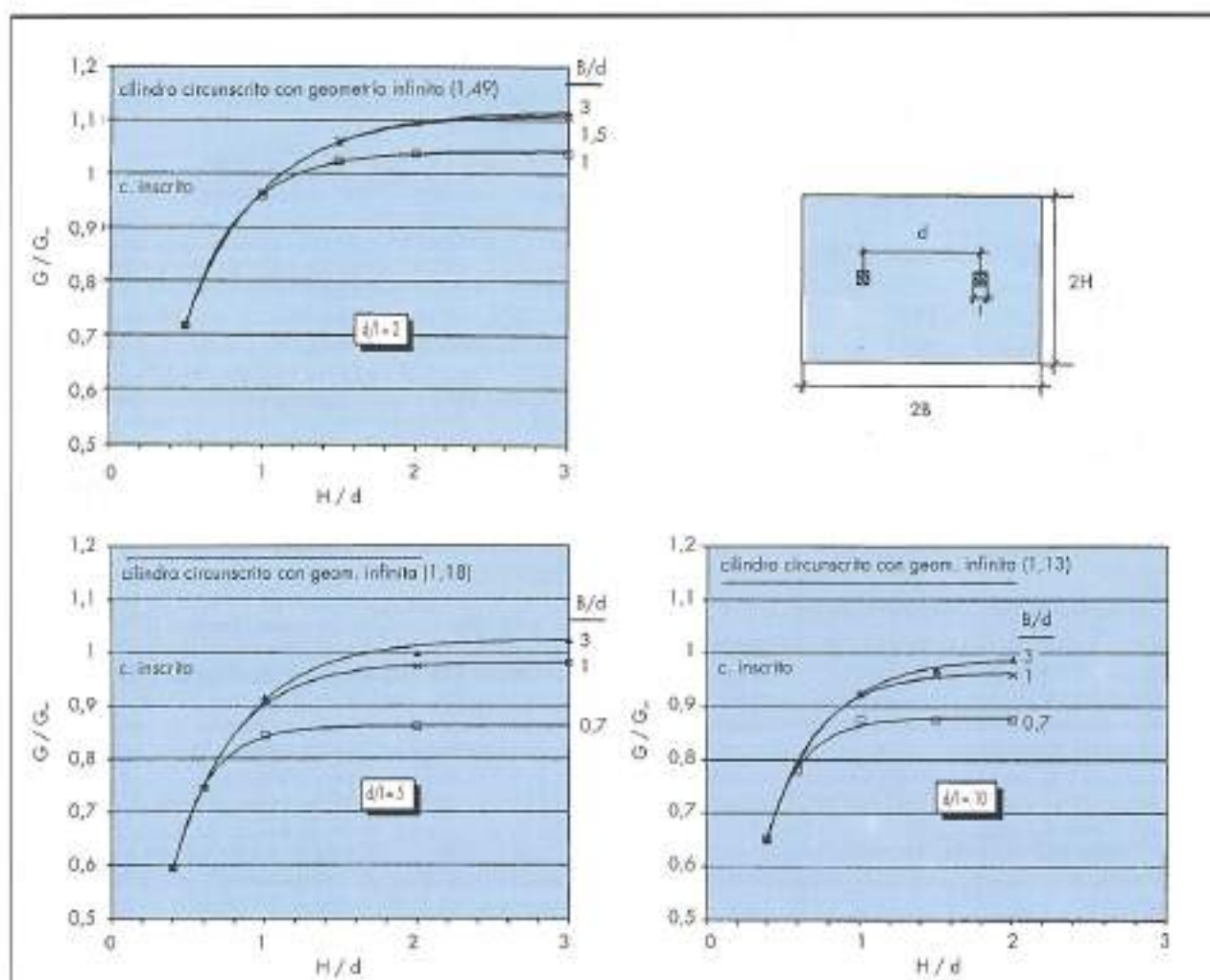


FIGURA 11. Gráficos que resumen los resultados del modelo numérico para diferentes geometrías finitas.

- b) La distancia mínima de la pared a la que debe colocarse una sonda para que su comportamiento sea similar al que tendría para geometría infinita, y
- c) La mínima longitud de onda de una ola para que puedan despreciarse los efectos de onda corta.

AGRADECIMIENTOS

En el desarrollo del contenido de este artículo han participado D. Luis Alegre y D. Clemente Abián, de la División de Instrumentación del Centro de Estudios de Puertos y Costas del CEDEX, que tienen a su cargo la parte experimental del estudio de la zona de influencia de estas sondas. También ha contado el autor con la ayuda de D. Jesús Fraile, Catedrático de Electrotecnia de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid. Por último, quisiera dedicar un recuerdo a su antecesor, D. Vicente Roglá, que durante más de dos décadas enseñó la te-

oría del campo electromagnético con un enfoque físico-matemático de muy alto nivel.

REFERENCIAS

- [1] FRAILE MORA, J.; GARCÍA GUTIÉRREZ, P. (1987) "Instrumentación aplicada a la Ingeniería: Transductores y medidas mecánicas". Servicio de publicaciones de la Revista de Obras Públicas.
- [2] ASCH, G. (1982) "Les capteurs en instrumentation industrielle". Dunod.
- [3] Anónimo (1976) "Wave height meter module & wave gauge: instrument manual". Danish Hydraulic Institute.
- [4] ROGLÁ, V. (1977) "Teoría sintética del campo electromagnético". Volumen II. Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.
- [5] LAPIDUS, L.; PINDER, G. P. (1982) "Numerical solution of partial differential equations in science and engineering". Wiley-Interscience.

Un nuevo modo para la financiación de proyectos

Guía práctica de "Project - Finance"



#Hans el Cuaderno Financiación de Proyectos al fax [91] 592 17 00



**Agencia Financiera del Estado
&
Banco de Desarrollo**

Premio Internacional Puente de Alcántara

V Convocatoria
1994 - 1996

Convocado por la Fundación San Benito de Alcántara y dirigido a los promotores, proyectistas y constructores de obras públicas finalizadas entre el 1 de agosto de 1994 y el 30 de junio de 1996 en España, Portugal y países Iberoamericanos.

Presentación de propuestas
hasta el día 30 de junio de 1996

