

Ajuste de la integral de la ecuación normal y su aplicabilidad en hidrología y calidad de aguas

LUIS DOCAMPO PÉREZ (*)

RESUMEN La aplicación de la probabilidad acumulada correspondiente a la curva normal (P) requiere hacer uso de tablas debido a la carencia de una ecuación que permita calcular dicha probabilidad. En este trabajo se determina una ecuación que aproxima la integral de la curva normal, $P = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^Z e^{-0.5Z^2} dz$, se analizan sus errores y se muestra su aplicabilidad en hidrología y en la determinación de la calidad ecológica de las aguas.

FITTING OF THE NORMAL EQUATION INTEGRAL AND ITS APPLICATION IN HYDROLOGY AND ECOLOGICAL WATER QUALITY

ABSTRACT The direct application of the accumulated probability corresponding to the normal curve requires to use statistic tables. That way is necessary because there isn't an equation that you can calculate the accumulated probability. In this paper, an approximation to the integral equation of normal curve is determined, it does to analyse the residuals and it explains your application in hydrology and in the determination of the ecological water quality.

Palabras clave: Ajuste; Integral; Curva; Ecuación.

1. INTRODUCCIÓN

La necesidad de determinar una aproximación analítica de la integral de la curva normal se plantea en los trabajos de computación donde se utilizan matrices que requieren reiteradamente hacer uso de las probabilidades resultantes de la aplicación de dicha integral a cualquier intervalo de la curva. A esta aproximación analítica de la integral de la curva normal la denominamos $P = f(Z)$, donde $f(Z)$ es la densidad de probabilidad normal estandarizada:

$$\phi(Z) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-0.5Z^2} \quad (1)$$

La integral $P = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^Z e^{-0.5Z^2} dz$ no tiene una solución analítica sencilla que permita obtener los valores de las probabilidades de la curva normal (valores de P) en todo su intervalo de existencia. Los valores de P son obtenibles por métodos tediosos como el desarrollado en serie de Maclaurin o por métodos aproximativos como el de los trapecios (fórmula de Simpson), y se encuentran tabulados en todos los tratados de estadística para distintos valores de Z , normalmente comprendidos entre $Z = -4$ y $Z = 4$. Para un valor de $Z = -4$, la probabilidad $P = 0.00002157$ y para $Z = 4$, $P = 0.99997843$, por lo que el intervalo $[-4, 4]$ integra prácticamente todos los valores de P .

En este trabajo se determina una fórmula que permite calcular la probabilidad acumulada (P) entre $-\infty$ y un valor particular

de Z , que como mínimo es válida para el citado intervalo $[-4, 4]$. Asimismo, se estima el alcance de los errores de dicha fórmula y se muestra su aplicabilidad en la clasificación de caudales y en la determinación de la calidad ecológica de las aguas.

2. MÉTODOS

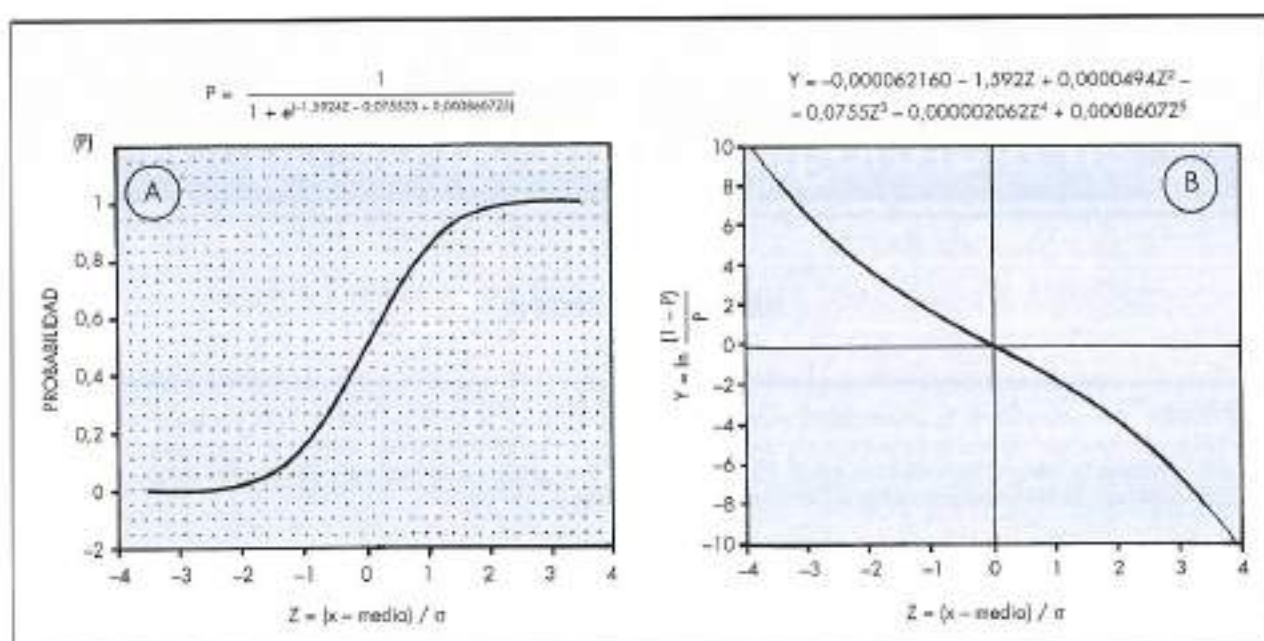
Para determinar la aproximación analítica de la integral de la curva normal $P = f(Z)$ se han utilizado los 699 valores de probabilidad P versus Z tabulados en los manuales de Walpole & Myers (1987) y Canavos (1991), en el intervalo comprendido entre $Z = -3.5$ y $Z = 3.5$. Dichos valores de P y Z tienen una precisión de dos decimales.

Posteriormente, la fórmula de aproximación obtenida en el intervalo $(-3.5, 3.5)$ es aplicada a intervalos mayores hasta determinar mediante el análisis de errores el máximo intervalo de Z en el que es viable la aplicación de dicha fórmula.

La fórmula de aproximación de la integral de la curva normal se ha obtenido mediante el método de los mínimos cuadrados ordinarios aplicado a la regresión logística polinomial de los valores de P en función de los valores Z . Asimismo, se han determinado otras tres ecuaciones: una evalúa los errores de la fórmula $P = f(Z)$, otra calcula los valores de $Z = f(P)$ ya que éstos no son fácilmente estimables a partir de la aproximación analítica de la integral de la curva normal, y la tercera estima los errores de la fórmula $Z = f(P)$. En estos tres casos, las ecuaciones se han calculado también mediante el método de los mínimos cuadrados ordinarios con regresión polinomial.

Las dos ecuaciones que modelan la curva normal $P = f(Z)$ y $Z = f(P)$ determinadas en este trabajo son aplicadas respectivamente

(*) ANBIOTEK, Investigación Científica y Técnica del Medio Ambiente, Mendí Alde, 13. 48530 Orreaga (Bizkaia).



FIGURAS 1 A y B. A. Probabilidad acumulada P en función de Z de la distribución normal estandarizada. B. ajuste estadístico de la integral de la curva normal $P = 1/\sqrt{2\pi}e^{-Z^2/2}$ mediante regresión logística polinomial que determina la ecuación de la curva dibujada en A.

mente en la determinación de la calidad de las aguas del río Zadorra (provincia de Álava) y en la clasificación de los caudales registrados en el periodo 1970-1983 en la estación de aforos N° 163 del río Ibaizabal en Leizor por la Comisaría de Aguas del Norte de España. Asimismo, se compararon los caudales resultantes de la aplicación de la ecuación $P = \Phi(Z)$ con los obtenidos mediante la ecuación de Goodrich de uso frecuente en el análisis de los valores medios de un fenómeno hidrológico (Llamas, 1993).

3. AJUSTE DE LA ECUACIÓN $P = \Phi(Z)$ $-\infty < Z \leq z$

En la figura 1A se representa la función $P = \Phi(Z)$ para los 699 valores de probabilidad P (áreas bajo la curva normal) versus Z , tabulados en los manuales de Walpole & Myers (1987) y Canavos (1991). La figura recoge el intervalo de Z comprendido entre -3.5 y $+3.5$. La curva de la citada figura es de tipo sigmoide, similar a la curva logística de Verhulst-Pearl utilizada en ecología para el análisis de la dinámica de poblaciones animales (p.e.: en Hutchinson, 1976). La curva logística de Verhulst-Pearl tiene por ecuación integral $N = K/(1 + e^{-(t-t_0)})$, donde N es el número de individuos de una población en función del tiempo t , t_0 es una constante de ajuste empírico, r es la tasa intrínseca de incremento del tamaño de la población y K es la asíntota o valor máximo de dicho tamaño. En este sentido, el ajuste estadístico de la ecuación normal $P = \Phi(Z)$ se ha realizado bajo la forma de una curva logística y la expresión resultante tiene un forma similar a la indicada ecuación integral de Verhulst-Pearl, aunque un tanto más complicada tal y como se verá a continuación.

El ajuste estadístico de la ecuación normal se ha realizado mediante el método de los mínimos cuadrados ordinarios de la expresión logística $\ln [(1-P)/P]$ versus Z (figura 1B). Se ha determinado el polinomio de grado n que simultáneamente maximiza el coeficiente de determinación de Pearson (R^2) y el valor del estadístico t de Student-Fisher que mide la nulidad de los coeficientes de regresión del ajuste polinomial $\ln [(1-P)/P]$ versus Z . Este polinomio ha resultado ser de grado

5 (tabla 1). En la tabla 1 puede comprobarse que la ordenada en el origen es estadísticamente nula de acuerdo con el valor de t . El antilogaritmo neperiano de esta ordenada determina el valor de la asíntota o valor máximo que puede adquirir la probabilidad P , es decir, $e^{-0.000062160} = 0.99993784439 \approx 1$. El valor de t indica también que los coeficientes de regresión en Z^2 y Z^4 son nulos. Se establece por lo tanto, la siguiente ecuación logística polinomial como la aproximación más determinista de la ecuación normal (ver figura 1A):

$$P = \Phi(Z) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^Z e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{1 + e^{-1.3924Z - 0.0755Z^2 + 0.00002062Z^3 + 0.00086072Z^4}} \quad (2)$$

Donde P es la probabilidad acumulada de cualquier valor de Z , es decir, el área bajo la curva normal comprendida entre $-\infty$ y Z , y $Z = (X - \text{media})/\sigma$, $N(Z; 0, 1)$.

En la figura 2 se representa el análisis de los residuos o errores de la ecuación (2), obtenidos de la diferencia entre los valores observados (tabulados) y los predictivos. Los errores muestran autocorrelación positiva en el intervalo de Z comprendido entre -1.5 y $+1.5$ a partir del cual se estabilizan en torno a cero en un orden de magnitud de 10^{-5} . En general todos los errores son poco significativos desde el punto de vista del uso práctico de la ecuación (2), siendo el error absoluto más alto ± 0.000337 ($\pm 0.047\%$). La ecuación (2) es aplicable en el intervalo comprendido entre $Z = -7.68$ y $Z = +7.68$, aunque a partir de $Z < -4$ y $Z > +4$, la probabilidad P se aproxima respectivamente a 0 y 1 en la mayoría de los manuales y tabulaciones estadísticas.

En el contexto de completar el análisis de la integral de la ecuación normal se ha considerado oportuno modelar los residuos de la ecuación (2) en el intervalo comprendido entre $Z = -1.5$ y $Z = +1.5$, ya que como se ha indicado anteriormente fuera de este intervalo los residuos de dicha ecuación se estabilizan en el entorno de 0 (figura 2). Para ello se ha realizado un ajuste polinomial del "Error" versus Z cuya representación gráfica se muestra en la figura 3A y cuyo análisis estadístico se indica en la tabla 2. El valor de t nos indica que

PARÁMETRO	Coefficiente de Regresión	Error Estándar	"t" de Student	Probabilidad
Ordenada en el origen	-0,000062158	0,001854605	-0,0335	0,9733
Z	-1,592394311	0,002144609	742,5103	<0,0001
Z ²	0,000049412	0,000950620	0,0519	0,9586
Z ³	-0,07549498	0,000689645	109,4692	<0,0001
Z ⁴	-0,000002062	0,000387011	0,02369	0,9811
Z ⁵	0,000860689	0,000049543	17,3725	<0,0001

R² = 0,999952265; R²-corregida = 0,99961992; Error estándar de R = 0,026150907.

Tabla 1. Valores de los coeficientes de regresión del ajuste estadístico polinomial de grado 5 de la función $\ln [(1-P)/P] = f(Z)$. "t" estadístico Student-Fisher para comprobar la nulidad de los coeficientes de regresión. R², coeficiente de determinación de Pearson. Número de datos = 669.

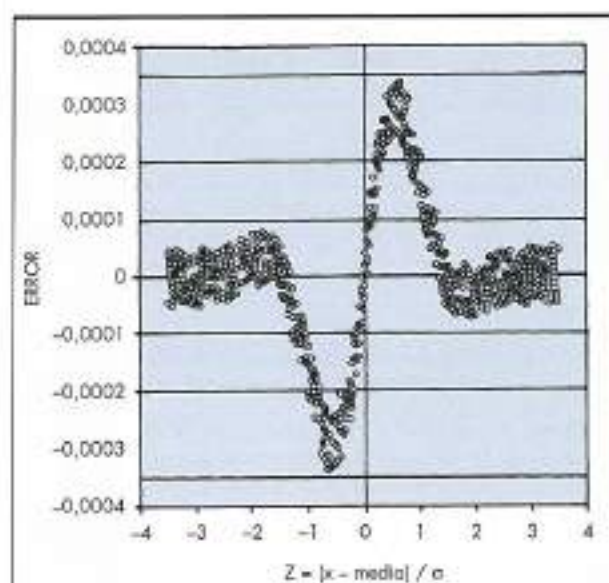


FIGURA 2. Representación gráfica de los residuos de la ecuación logística polinomial [ecuación 2] en el intervalo de Z comprendido entre -3,5 y 3,5.

la ordenada en el origen y los coeficientes de regresión en Z², Z⁴, Z⁶ y Z⁸ son nulos, y por lo tanto establecemos la siguiente ecuación para el cálculo del Error de la ecuación (2):

$$\text{Error} = 0,00086 Z - 0,001335 Z^3 + 0,000894 Z^5 - 0,000298 Z^7 + 0,000039 Z^9 \quad (3)$$

Esta ecuación es aplicable en el intervalo comprendido entre -1,5 y +1,5, a partir de estos valores los errores de la ecuación (2) son estables y prácticamente nulos (como mucho del orden de 10⁻⁵). En el intervalo comprendido entre Z = -1 y Z = +1, puede aplicarse la función de onda plana para calcular el residuo de la ecuación (2) con tanta precisión como la que se obtiene al aplicar la ecuación (3). La ecuación de una onda plana es mucho más sencilla que la ecuación (3) y en el caso que nos ocupa tiene la siguiente expresión (figura 3B):

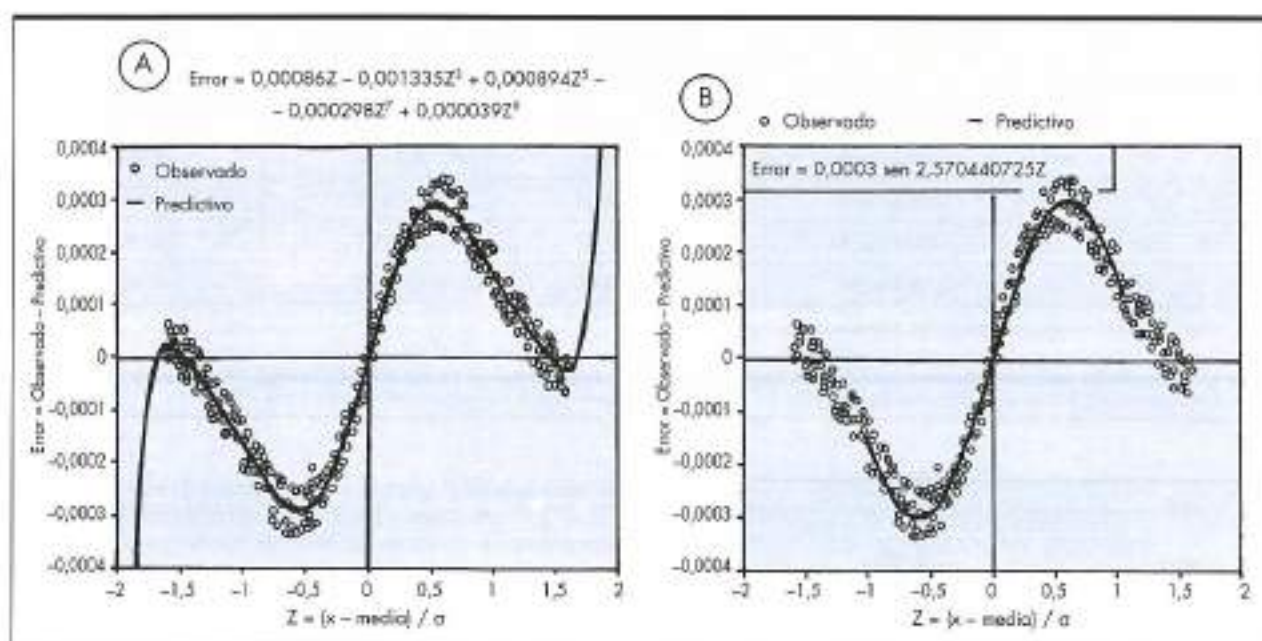
$$\text{Error} = 0,0003 \sin 2\pi(Z/2,4444) \quad (4)$$

Dado un valor de P, el cálculo de Z mediante la ecuación (2) puede llevarse a cabo mediante programas como el Mathematica de Wolfram (1991). Sin embargo, cuando se trabaja con matrices que contienen múltiples valores de P, el cálculo de los correspondientes valores de Z a través de la ecuación (2) es tedioso, y por ello se ha considerado oportuno determinar una ecuación de regresión que nos permita com-

PARÁMETRO	Coefficiente de Regresión	Error Estándar	"t" de Student	Probabilidad
Ordenada en el origen	-0,0000000917	0,00000428	0,021	0,9829
Z	0,00066	0,00001694	50,694	<0,0001
Z ²	0,000001312	0,00003271	0,040	0,9680
Z ³	-0,001335	0,00007465	-17,883	<0,0001
Z ⁴	-0,000002979	0,00006153	-0,048	0,9614
Z ⁵	0,000894	0,00010410	8,591	<0,0001
Z ⁶	0,000001921	0,00003975	0,048	0,9615
Z ⁷	-0,000298	0,00005602	-5,314	<0,0001
Z ⁸	-0,0000003805	0,00000819	-0,046	0,9630
Z ⁹	0,000039	0,00001020	3,831	0,0002

R² = 0,972656948; R²-corregida = 0,972071458; Error estándar de R = 0,000031161.

Tabla 2. Valores de los coeficientes de regresión del ajuste estadístico polinomial de grado 9 de los residuos de la ecuación (2) [Error = f(Z)]. Error = valor observado - valor predictivo en el intervalo de Z comprendido entre -1,5 y +1,5. "t" estadístico de Student-Fisher para comprobar la nulidad de los coeficientes de regresión. R², coeficiente de determinación de Pearson. Número de datos = 321.



FIGURAS 3 A y B. A, ajuste del error de la ecuación (2) en función del estadístico Z en el intervalo comprendido entre $-1,5$ y $1,5$, mediante un polinomio impar de grado 9. B, ajuste del error de la ecuación (2) en función del estadístico Z en el intervalo comprendido entre -1 y 1 mediante la ecuación de un seno plano.

putar de forma inmediata el valor de Z a partir de P , y que al mismo tiempo dicha ecuación se fácilmente programable.

Procedemos como en el caso del ajuste de la ecuación (2), se toma como variable dependiente Z y como independiente $Y = \ln[(1-P)/P]$, y se procede a determinar mediante mínimos cuadrados ordinarios el polinomio de grado "n" que maximiza los valores de R^2 y Y^2 , que ha resultado ser de grado 9 (tabla 3). De acuerdo con los valores del estadístico t^* , la ordenada en el origen y los coeficientes de regresión en Y^2 , Y^4 , Y^6 y Y^8 son nulos, obteniéndose la siguiente ecuación para el cálculo de Z en función de P en el intervalo comprendido entre $Z = -7,68$ y $Z = +7,68$:

$$Z = -0,6196 Y + 0,008216 Y^3 - 0,0001722 Y^5 + 0,000002024 Y^7 - 0,0000000093 Y^9 \quad (5)$$

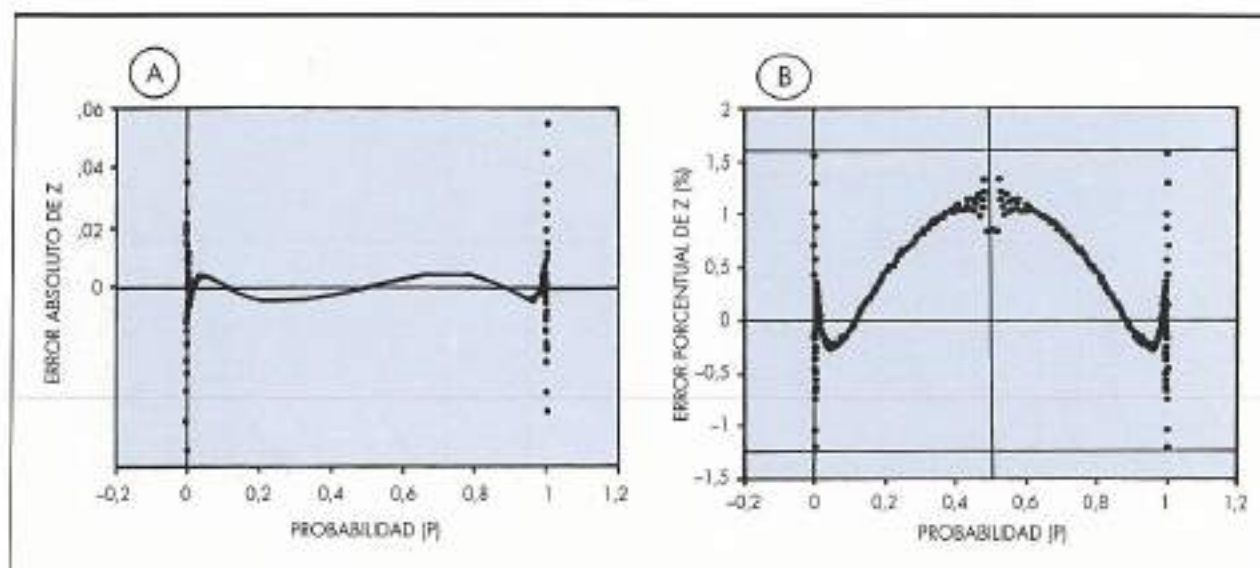
Donde $Y = \ln[(1-P)/P]$. La ecuación (5) es algo más determinista que la ecuación (2) y sus errores en valor absoluto y porcentual se representan en la figura 4. Estos errores no sobrepasan $\pm 1,6\%$ y son poco significativos en cuanto al uso práctico de la ecuación (5).

Las ecuaciones (2) y (5) son utilizables tanto con variables continuas como discretas (aunque estrictamente ambas ecuaciones modelan densidades de probabilidad continua y no discreta) pero su aplicabilidad requiere como condición necesaria

PARÁMETRO	Coefficiente de Regresión	Error Estándar	"t" de Student	Probabilidad
Ordenada en el origen	0,00002412	0,000625399	0,0385	0,9692
Y	-0,619616355	0,000504549	-1,228,060	<0,0001
Y ²	0,000016387	0,000195982	0,0836	0,9334
Y ³	0,008215812	0,000086129	95,3900	<0,0001
Y ⁴	0,000001280	0,000014238	0,0898	0,9284
Y ⁵	-0,000172242	0,000004555	-37,8176	<0,0001
Y ⁶	-0,000000026	0,000000349	-0,0744	0,9407
Y ⁷	0,000002024	0,000000092	22,0041	<0,0001
Y ⁸	0,00000000153	0,000000027	-0,0566	0,9549
Y ⁹	0,000000009296	0,0000000062	-14,8792	0,0001

$R^2 = 0,999992423$; R^2 -corregido = 0,999986689; Error estándar de $R = 0,007901338$.

Tabla 3. Valores de los coeficientes de regresión del ajuste estadístico polinomial de grado 9 de la función $Z = f(Y)$, siendo $Y = \ln[(1-P)/P]$. "t" estadístico de Student-Fisher para comprobar la nulidad de los coeficientes de regresión. R^2 , coeficiente de determinación de Pearson. Número de datos = 699.



FIGURAS 4 A y B. Residuos en valor absoluto [A] y en valor porcentual [B] de la ecuación (5) que estima los valores del estadístico Z en función de la probabilidad acumulada de la curva normal, F.

que la densidad de probabilidad de la variable se ajuste a una curva de Gauss o pueda aproximarse a la misma mediante una transformación adecuada (logaritmo, potencia, función trigonométrica,...) o incrementando el tamaño de la muestra estadística (distribución binomial, distribución de Poisson,...). De aquí que dichas ecuaciones (2 y 5) como aproximaciones integrales de la ecuación normal son utilizables en una gran variedad de campos, dos de los cuales, la hidrología y la calidad de las aguas, se discuten en los siguientes apartados.

4. APLICACIÓN EN HIDROLOGÍA

Uno de los principales campos donde se utiliza la distribución normal es en hidrología, de aquí que ya existe en esta disciplina una aproximación de la integral de la curva normal con la misma funcionalidad que la ecuación (2). Llamas (1993) establece como aproximación de la curva normal la siguiente ecuación:

$$P' = 1 - 0.5 (1 + 0.196854 Z + 0.115194 Z^2 + 0.000344 Z^3 + 0.019527 Z^4)^{-4} \quad (6)$$

P' tiene el mismo significado que P en la ecuación (2), es la probabilidad acumulada entre $-\infty$ un valor particular de Z , donde Z es la distribución normal reducida a media 0 y desviación estándar 1: $N(Z; 0, 1)$.

En la figura 5 se representan los residuos de las dos ecuaciones (2) y (6) y su comparación nos permite establecer las siguientes diferencias:

1. La ecuación (6) es exclusivamente aplicable con valores positivos de Z ($Z > 0$). Para valores negativos de Z ($Z < 0$), el cálculo de la probabilidad requiere tomar el complemento de P' : $P = 1 - P'$. Por el contrario, la ecuación (2) se aplica directamente tanto con valores positivos como negativos de Z , y en consecuencia su programación informática es mucho más sencilla ya que no precisa distinguir el signo de Z .
2. El análisis de residuos de la figura 5 muestra que solamente en el intervalo de Z comprendido entre 0,42 (o -0,42) y 0,77 (o -0,77), la ecuación (6) es más exacta que la ecuación (2). En este intervalo los residuos de (2)

se sitúan entre 0,0003 y 0,000337, mientras que los de (6) no sobrepasan de 0,0002791. En los intervalos de Z comprendidos entre 0 y 0,42 (o 0 y -0,42) y entre 0,77 y 1,5 (o -0,77 y -1,5), las dos ecuaciones son igualmente deterministas, dando lugar a errores de igual valor pero de signo contrario. Por el contrario, para valores de $Z > 1,5$ ó $Z < -1,5$, los errores que se cometen con la ecuación (2) son estables y muchísimo menores (del orden de 10^{-4}) que los que se obtienen con la ecuación (6) (del orden de 10^{-4}) (ver figura 5). En consecuencia, se establece que la ecuación (2) es más sencilla de aplicar que la ecuación (6) y en general mucho más determinista. No obstante, ambas ecuaciones ofrecen una elevada fiabilidad desde el punto

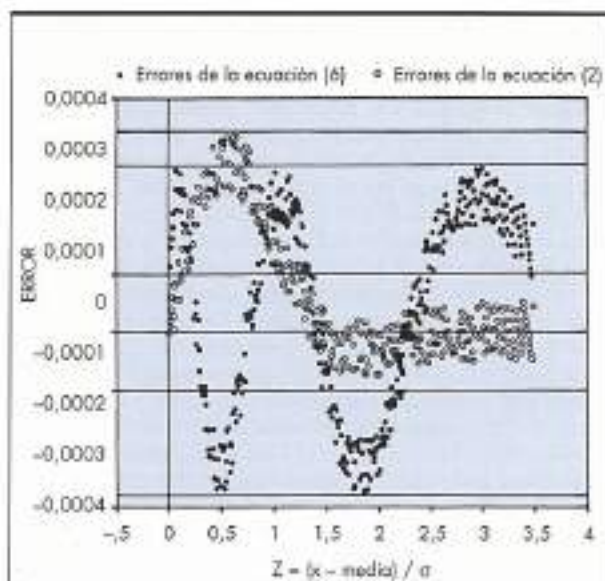
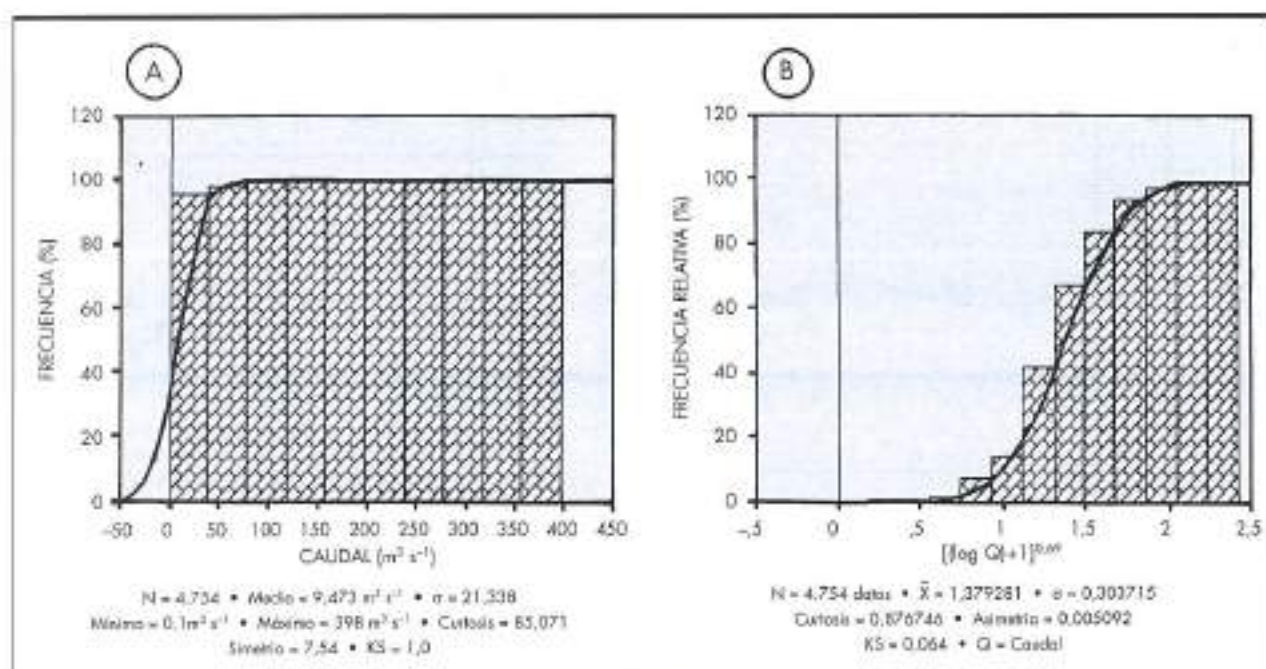


FIGURA 5. Comparación de los errores de las ecuaciones (1) y (6) en el intervalo del estadístico Z comprendido entre 0 y 3,5.



FIGURAS 6A y 6B. A, histograma de las frecuencias acumuladas de los caudales diarios no normalizados y registrados por la Comisaría de Aguas del Norte de España en la estación N° 163 del río Ibaizabal (municipio de Lemona en Bizkaia), en el período hidrológico 1970-1983. B, normalización del histograma representado en A mediante la transformación logarítmica $(1 + \log Q)^{0,69}$ resultante de minimizar los coeficientes de simetría y curtosis de la distribución. KS es la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

de vista de su uso práctico en el estudio de precipitaciones y de caudales.

Las ecuaciones (2) y (5) son de gran utilidad en la clasificación anual de caudales registrados por una estación de aforos (actividad ésta que es de uso frecuente por parte de las Comisarias de Aguas de las distintas cuencas hidrográficas) y en proyectos de ingeniería civil destinados al diseño hidráulico de sumideros, cunetas, colectores, caños, alcantarillas, tajetas, etc., en los que se requiere el conocimiento de caudales de avenida máxima correspondientes a un determinado período de retorno, o en cualquier otro tipo de proyectos.

Debe recordarse que para la aplicación de dichas ecuaciones es condición necesaria que la serie estadística de la variable analizada se ajuste a una distribución gaussiana o debe poder normalizarse mediante una transformación adecuada. En este sentido, en la figura 6A se representa el histograma de caudales diarios registrados por la Comisaría de Aguas de Norte de España en la estación N° 163 del río Ibaizabal (municipio de Lemona en Bizkaia), en el período hidrológico 1970-1983. Los valores del coeficiente de asimetría, del coeficiente de curtosis y del estadístico de Kolmogorov-Smirnov muestra que la serie de 4.754 caudales diarios no es gaussiana. Para normalizar dicha serie debe seleccionarse aquella transformación que minimiza la función $y = 2gs + gc$, donde gs y gc son respectivamente los valores absolutos de los coeficientes de simetría y curtosis. En el caso que nos ocupa, la mejor normalización se consigue con la transformación logarítmica $y = (1 + \log Q)^{0,69}$ (figura 6B), que es semejante a la distribución log-normal con tres parámetros de uso frecuente el cálculo hidrológico de valores extremos (Llamas, 1993). La transformación $y = (1 + \log Q)^{0,69}$ de la figura 6B no convierte el hidrograma en una distribución normal estricta pero sí muy próxima a la misma. Para que el hidrograma fuese normal al 95% el estadístico de Kolmogorov-Smirnov (KS) para una serie de 4.754 caudales debería ser $KS \leq 0,02$ y se ha obte-

nido un valor muy próximo pero mayor, $KS = 0,064$. El hidrograma transformado con $y = (1 + \log Q)^{0,69}$ es simétrico ($gs = 0,005092$) pero algo leptocúrtico ($gc = 0,876$). Esta ligera curtosis no afecta significativamente a los cálculos derivados de la ecuación de distribución de probabilidad.

La media (M) y la desviación estándar (σ) de la serie de caudales normalizada con $y = (1 + \log Q)^{0,69}$ son respectivamente $M = 1,379281$ y $\sigma = 0,303715$ (figura 6B). Con estos valores puede realizarse una clasificación anual de caudales y determinar caudales medios interanuales correspondientes a determinados períodos de retorno (Tr). En el primer caso, el caudal clasificado Q_x en $m^3 s^{-1}$ que es superado por " x " días al año se determina con la expresión $Q_x = -1 + 10^{(M + \sigma Z)^{1,44927}}$, donde Z se computa con la ecuación (5) previo cálculo del valor de $P = 1 - (x/365)$. En el segundo caso, hay que tener en cuenta que la probabilidad P y el período de retorno (Tr) están relacionados mediante la expresión $P = 1 - (1/Tr)$, calculándose el caudal medio correspondiente a un determinado período de retorno (Q_{Tr}) con la fórmula $Q_{Tr} = -1 + 10^{(M + \sigma Z)^{1,44927}}$, donde nuevamente Z se computa con la ecuación (5) a partir de P .

En la tabla 4 se presentan los caudales clasificados y los caudales para distintos períodos de retorno correspondientes a la estación de aforos de Lemona de la figura 6. Es preciso señalar, que tanto los unos como los otros son valores medios. Verbigracia, Q_{30} es el caudal medio interanual (en este caso media de 14 años hidrológicos) que es sobrepasado por 30 días al año; para $Tr = 2,5$, tenemos en la tabla 4 el caudal medio correspondiente a un período de retorno de 2,5 años. En dicha tabla se presentan también los caudales anuales clasificados y de períodos de retorno determinados mediante la ecuación de Goodrich $F(Q)$ de uso frecuente para describir los valores medios de un fenómeno hidrológico. La ecuación de Goodrich ajustada para la estación de aforos de Lemona es la siguiente:

CLASIFICACIÓN ANUAL DE CAUDALES					CAUDALES DE PERÍODOS DE RETORNO				
Período (días)	P (%)	Z	Caudal (m^3/s^{-1})	QG (m^3/s^{-1})	Tr (años)	P (%)	Z	Caudal (m^3/s^{-1})	QG (m^3/s^{-1})
Q ₃₀	91,78	1,3937	22,328	16,915	2,5	60,00	0,25068	5,280	5,286
Q ₆₀	83,56	0,9740	12,942	9,251	5	80,00	0,83794	10,887	7,912
Q ₉₀	75,34	0,6808	9,190	8,938	10	90,00	1,28307	19,305	14,230
Q ₁₂₀	67,12	0,4393	6,635	5,750	25	96,00	1,76153	36,537	31,086
Q ₁₅₀	58,90	0,2225	5,105	5,236	50	98,00	2,08271	56,774	52,447
Q ₁₈₀	50,68	0,0169	4,002	4,971	75	98,66	2,27075	73,820	68,927
Q ₂₁₀	42,46	-0,1879	3,154	4,833	100	99,00	2,41125	90,013	83,119
Q ₂₄₀	34,24	-0,4019	2,473	4,763	150	99,33	2,62955	122,937	105,759
Q ₂₇₀	26,02	-0,6380	1,904	4,728	200	99,50	2,80712	158,921	124,827
Q ₃₀₀	17,80	-0,9196	1,406	4,714	250	99,60	2,96318	199,607	140,887
Q ₃₃₀	9,589	-1,3072	943	4,710	350	99,71	3,22540	294,171	166,478
Q ₃₆₀	4,931	-1,6597	667	4,709	500	99,80	3,60116	518,116	199,848

Tabla 4. Aplicación de la ecuación (5) a la serie diaria de caudales registrados en la estación Nº 163 (Lemona en el río Itzabal de Bizkaia) desde 1970 a 1983 por la Comisaría de Aguas del Norte de España, previa normalización de la serie mediante la transformación logarítmica de los caudales $[1 + \log Q(0,69)]$ (ver figura 6). La ecuación se aplica para realizar una clasificación anual de caudales y para determinar el caudal medio correspondiente a determinados periodos de retorno (Tr). P(%), probabilidad acumulada de cada valor. Z distribución normal de cada valor, reducida a media 0 y desviación estándar 1, N(Z; 0, 1). QG, caudal resultante de la aplicación de la ecuación de Goodrich ajustada a la serie de caudales (1970-1983).

$$F(Q) = 1 - e^{-L(0,07257 \cdot Q - 4,709)/0,20873103} \quad (7)$$

$F(Q)$ tiene el mismo significado de probabilidad acumulada que P en la ecuación (2) y Q es el caudal. Este ajuste de la ecuación de Goodrich a la estación de aforos de Lemona solamente es aplicable para caudales superiores a $4,709 \text{ m}^3/\text{s}^{-1}$, en tanto que la ecuación (2) es aplicable desde $0 \text{ m}^3/\text{s}^{-1}$. Por eso en la tabla 4 no se obtiene ningún caudal clasificado según la función de Goodrich (QG) inferior a este valor ($4,709 \text{ m}^3/\text{s}^{-1}$). Asimismo, la prueba de Kolmogorov-Smirnov que mide el grado de ajuste de la distribución de probabilidad de la ecuación (7) con la distribución empírica de la figura 6A es $KS = 0,297$, mucho mayor que el valor $KS = 0,064$ obtenido para la ecuación (2). Por lo tanto, en este caso concreto la ecuación (2) para determinar los caudales clasificados y de periodos de retorno (tabla 4) es más precisa que la función de Goodrich (ecuación 7).

Los caudales medios clasificados tienen especial validez en la determinación de los caudales ecológicos de los ríos de acuerdo con determinados métodos hidrobiológicos (Docampo & G. de Bikuña, 1995) y según determinadas normativas actualmente vigentes como el Decreto Foral 344/1990 (20 de Diciembre) de la Comunidad Autónoma de Navarra donde se utiliza el Q_{300} y el Q_{90} .

En el diseño hidráulico de sumideros, alcantarillas, etc. se requiere trabajar con la media de los caudales de avenida (máximos anuales), en tanto que para la determinación de caudales de dilución de las cargas contaminantes aportadas a un río se precisa el uso de los caudales mínimos anuales (caudales de estiaje), procediéndose del mismo modo que el descrito anteriormente, y obteniéndose resultados tan precisos como los que resultan de la aplicación de otras ecuaciones de uso frecuente en este tipo de estudios (ecuación de Gumbel tipo I, distribución log-Pearson III, función polinómica Beta-Jacobi, etc.). No obstante, el método descrito en este apartado en el que se precisa transformar la serie de caudales para normalizarla o aproximarla a la normalidad

requiere un mayor número de datos, lo que no siempre es asequible cuando se trabaja con valores extremos.

5. CALIDAD ECOLÓGICA DEL AGUA

En el anterior apartado, se expone un ejemplo de la aplicación directa de la ecuación (5), una de las formas del ajuste estadístico de la curva normal. En este apartado se detallará el uso directo de la ecuación (2) para la determinación de la Calidad Ecológica del Agua. La Calidad Ecológica del Agua es un concepto establecido por la Propuesta de Directiva 94/C222/06 de la Unión Europea (1994) como la "expresión global de la estructura y la función de la comunidad biológica teniendo en cuenta factores naturales de tipo físico, geográfico y climático y, también, condiciones físicas y químicas, incluidas las resultantes de las actividades humanas". Entre los métodos propuestos por la citada directiva para medir y controlar la Calidad Ecológica de las aguas se encuentra el análisis de la estructura y diversidad de las comunidades de invertebrados del bentos del medio acuático (ríos, rías, charcas, lagunas, lagos, embalses, manantiales y aguas costeras territoriales según el derecho internacional), de los peces, batracios, aves, mamíferos y flora acuática. El modelo S.C.A.F. (Sistemática de la Calidad de las Aguas Fluviales) aborda los distintos métodos indicados por la Propuesta de Directiva 94/C222/06 (Docampo, 1994; Docampo & G. de Bikuña, 1994), siendo uno de sus principales componentes el Índice de Estado Ambiental de los ecosistemas acuáticos (E). El índice de estado ambiental (E) y el modelo SCAF son utilizados en todos los controles anuales de la red de vigilancia de la calidad de los ríos Vascos (Gobierno Vasco, 1995) y en la red de vigilancia del río Zadorra por el organismo gestor de las aguas municipales de la ciudad de Vitoria (AMVISA, 1995). Asimismo, también ha sido utilizado en la determinación de la calidad de las aguas de los ríos Cardener y Llobregat por la Junta d'Aigües de la Generalitat.

E es igual al producto de dos probabilidades $E = P(x)P(y)$, donde "x" es un índice de diversidad ecológica (índice

VARIABLE	ESTACIONES DE MUESTREO				
	Z-2	Z-4	Z-5	Z-7	ZA-3
Riqueza de invertebrados (S)	10	27	22	23	42
Diversidad de Shannon (H)	1,441	2,691	2,382	2,451	3,373
Índice biótico de Chandler (Ch)	200	986	534	800	1990
Probabilidad P(H) (%)	2,607	43,825	27,549	30,932	79,324
Probabilidad P(Ch) (%)	2,080	26,075	7,803	17,743	89,928
Índice de Estado Ambiental (E) (%)	0,054	12,303	2,149	5,488	71,334
D.Q.O. (mg O ₂ l ⁻¹)	760	5	20,9	11	4,5
Oxígeno (mg O ₂ l ⁻¹)	0,4	7,6	7,6	7	10,4
Nitrato (mg NO ₃ l ⁻¹)	31,30	2,90	11,50	23,4	9
Fósforo total (mg P-PO ₄ l ⁻¹)	0,5566	<0,016	0,4266	0,4766	<0,016
Conductividad (µS cm ⁻¹)	8.450	352	613	575	562
Estado Ambiental	E ₅	E ₄	E ₃	E ₂	E ₁

Tabla 5. Aplicación de la ecuación (2) para determinar la Calidad Ecológica de las aguas del río Zadorra (fluente del Ebro en Álava) a su paso por las localidades de Salvatierra (Z-2), Arriate (Z-4), Villadas (Z-5), Arce (Z-7) y Eskanona (ZA-3), mediante el índice de estado ambiental $E = P(H) \times P(Ch)$. E₁: aguas poliprobias; E₂: aguas eutrofizadas; E₃: aguas limpias oligoprobias y E₄: aguas muy limpias ultrapolibias.

de Shannon, índice de Simpson, índice de Brillouin, etc.) e "y" es un índice biótico cualquiera, de los de uso frecuente en los países de la Unión Europea (índice biótico BMWP, índice biótico de Chandler, índice biótico de Trent, índice biótico de Vermeaux-Tuffery, etc.). Ambos índices se aplican a la comunidad de invertebrados benthicos de los ríos o de cualquier medio acuático.

$E = P(x) P(y)$ expresa siempre la probabilidad que tiene un ambiente acuático para mantener el máximo número de especies biológicas de todas las que habitan el área biogeográfica a la que pertenece y que son intolerantes a la contaminación físicoquímica. En el ejemplo que se expone en la tabla 5 se ha elegido como "x" el índice de diversidad de Shannon y como "y" el índice biótico de Chandler aplicados a las comunidades de invertebrados benthicos recogidas en verano de 1994 en el río Zadorra (fluente del Ebro en la provincia de Álava): $E = P(H) P(Ch)$. $P(H)$ y $P(Ch)$ se determinan con la ecuación (2) previo cálculo de Z mediante las siguientes expresiones cuyo origen empírico puede ser consultado en Docampo & G. de Bikuña (1994):

• **Índice de diversidad de Shannon** (H en bits/individuo).
 $Z = (H - 2,80)/0,7$

• **Índice biótico de Chandler** (Ch adimensional).
 $Z = (Ch - 1.300)/540$

E adquiere valores comprendidos entre 0 y 1 (0% y 100%), los cuales definen cinco tipos de estado ambiental:

- Estado E₁: Coprozioico. Es el más degradado. $E \leq 0,00272\%$.
- Estado E₂: Polisaprobio. $0,00272\% < E \leq 0,2\%$.
- Estado E₃: Mesosaprobio. Eutrofización. $0,2\% < E \leq 9\%$.
- Estado E₄: Oligosaprobio. Aguas limpias. $9\% < E \leq 50\%$.
- Estado E₅: Ultrapolibio. Máxima calidad. $E > 50\%$.

Las aguas contaminadas químicamente o ecosistemas alterados en su medio físico pertenecen a los estados ambientales E₁, E₂ y E₃. Las características ecológicas, físicoquímicas y usos potenciales de las aguas de cada uno de estos cinco estados ambientales pueden ser consultadas en Docampo (1995). En la tabla 5 se dan los valores necesarios del índice de diversidad de Shannon (H) y del índice biótico de Chandler (Ch) para poder determinar respectivamente P(H)

y P(Ch) mediante la ecuación (2), obteniéndose en los tramos fluviales analizados los estados ambientales E₅, E₄, E₃ y E₂ muy correlacionados con la composición físicoquímica de las aguas, que se indica en términos de Demanda Química de Oxígeno (D.Q.O.), oxígeno disuelto, conductividad eléctrica y concentraciones de nitrato y fósforo total.

6. BIBLIOGRAFÍA

- AMVISA. 1995. *Red de vigilancia de la calidad físicoquímica y biológica del río Zadorra en el entorno de la planta depuradora de aguas residuales de Crispiana*. Amvisa, Informe Técnico no publicado. Vitoria-Gasteiz.
- CANAVOS, G. C. 1991. *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. McGraw-Hill. México. 651 pp.
- DOCAMPO, L. 1994. Métodos para la determinación de la calidad de las aguas fluviales. *Belarra*, (10-11):31-48.
- DOCAMPO, L. & G. de BIKUNA, B. 1994. Development and application of a diversity index (D) to the benthic macroinvertebrates communities in the rivers of Biscay (North of Spain). *Archiv für Hydrobiologie*. 129 (3): 353-371.
- DOCAMPO, L. & G. de BIKUNA, B. 1995. The Basque Method for determining instream flows in Northern Spain. *Rivers*, 4 (4): 292-311.
- DOCAMPO, L. 1995. Calidad ecológica del agua. Comparación del índice físicoquímico de Prati con el índice "E" del estado ambiental de los ríos. *Tecnología del Agua*, 144: 85-97.
- GOBIERNO VASCO. 1995. *Red de vigilancia de la calidad de las aguas y del estado ambiental de los ríos de la C.A.P.V.* Dpto. de Urbanismo, Vivienda y Medio Ambiente. Viceconsejería de Medio Ambiente del Gobierno Vasco. Vitoria-Gasteiz. 178 pp + 6 mapas.
- LLAMAS, J. 1993. *Hidrología general. Principios y aplicaciones*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco. Bilbao 635 pp.
- UNION EUROPEA. 1994. *Propuesta de directiva 94/C222/06 sobre la calidad ecológica del agua*. Diario Oficial de las Comunidades Europeas. Actos Jurídicos Preparatorios (II). 6 pp + 6 Anexos.
- WALPOLE, R.E. & MYERS, R.H. 1987. *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. Interamericana. México. 733 pp.
- WOLFRAM, S. 1991. *Mathematica. A system for doing mathematics by computer*. Addison Wesley. New York. 961 pp.

G E O M E M B R A N A

geocan

POLIETILENO ALTA DENSIDAD

Geomembranas de polietileno de alta densidad (PEAD) solución de **GARANTIA TOTAL** para impermeabilización de obras hidráulicas y vertederos.



Embalse regulación de agua riego. Lepe (Huelva).



Vertedero Residuos Químicos (REPSOL). Puertollano (Ciudad Real).



Vertedero de alpechines y balsas de tratamiento. Quero (Toledo).

TODOS los fabricantes de membranas de PEAD tenemos una marca registrada.

ALGUNOS informamos sobre la entidad fabricante de la materia prima.

MUY POCOS presentamos la garantía contractual de dicho fabricante, junto con la nuestra.

No deje de exigir la garantía del fabricante de la materia prima, asegúrese de su procedencia.

CANDEA IPSA fabricante de las membranas, desde hace más de quince años viene investigando, desarrollando y produciendo junto con REPSOL QUIMICA fabricante de las materias primas, la más avanzada gama de impermeabilizantes de PEAD monocapa y multicapa bajo la marca GEOCAN.

Las membranas GEOCAN se producen mediante un proceso de tecnología punta de COEXTRUSION con boquilla plana y calandrado, que les confieren un extraordinario acabado superficial y **GARANTIZA LA UNIFORMIDAD DEL ESPESOR**, requisito imprescindible para una **SOLDADURA DE CALIDAD** y por tanto **GARANTIZA LA ESTANQUEIDAD**.

Todos nuestros tipos GEOCAN cumplen sobradamente las **NORMAS UNE 104.300 y/o UNE 104.311**.



ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE LA IMPERMEABILIZACIÓN



candea
industrias plásticas, s.a.

SAN BERNARDO, 17 • 28015 Madrid (Spain)
Telf.: (1) 541 16 00 • Fax: (1) 548 32 59



COMITÉ ESPAÑOL DE PLÁSTICOS EN AGRICULTURA (C.E.P.L.A.)

Drayfil®



Fábrica de SEAT-VOLKSWAGEN (MARTORELL) 1994. 24.000 m² Impermeabilizados con DRAYFIL.

Marca la diferencia para culminar cualquier obra bien hecha.

Drayfil EDIFICIOS

Drayfil EMBALSES

Drayfil AGUA POTABLE

Drayfil TÚNELES

Drayfil PISCINAS

AISCONDEL LAMINADOS, S.A. es pionera en España en la investigación y desarrollo de las láminas impermeabilizantes de PVC para todo tipo de instalaciones, en la construcción, obras públicas, embalses y agricultura.

Esta larga experiencia, unida a los constantes avances tecnológicos, la sitúa en la primera línea del sector.

Todas las láminas impermeabilizantes de PVC-P fabricadas por AISCONDEL LAMINADOS, S.A. bajo la marca DRAYFIL, poseen la certificación AENOR.



MINISTERIO DE LA PRESIÓN EN FAVOR DE LOS PLÁSTICOS PARA LA PROTECCIÓN DEL MEDIO AMBIENTE



AISCONDEL
LAMINADOS, S.A.

