

Frentes de onda en aliviaderos planos de cajeros convergentes

CRISTÓBAL MATEOS IGUÁCEL (*)

RESUMEN Se plantean las ecuaciones del movimiento del agua en un aliviadero de solera plana con cajeros convergentes, lo que origina la presencia de frentes de onda. Se efectúa un análisis bidimensional estacionario, deduciéndose las líneas características así como las relaciones de evolución a lo largo de ellas en términos de velocidades del fluido y celeridades locales de onda. Los resultados del modelo numérico que resuelve las ecuaciones son congruentes con los resultados experimentales.

WAVE FRONTS IN PLANE SPILLWAYS WITH CONVERGING WALLS

ABSTRACT Equations are set out for water movement in a flat-bottomed weir with converging training walls, which provoke the generation of wave fronts. A two dimensional, stationary analysis is made, thus deducing the characteristic lines as well as the evolution ratios throughout them in terms of fluid speeds and local wave celerities. The results of the numerical model that resolves the equation are congruent with the experimental results.

Palabras clave: Aliviaderos; Ondas; Flujos convergentes; Frentes de onda; Flujos convergentes.

1. INTRODUCCIÓN

Se actualiza en este artículo un trabajo anterior [6], con la diferencia de trabajar aquí con variables dependientes dimensionalmente homogéneas.

En los aliviaderos de las presas se presenta con cierta frecuencia la situación de que teniendo una solera plana de fuerte inclinación sea, sin embargo, preciso el efectuar un cierto estrechamiento de los cajeros. Este tipo de situación se produce por ejemplo cuando aun teniendo un valle estrecho sea preciso un vertedero ancho por conveniencias de la explotación. En estas circunstancias se producen frentes de onda abruptos a lo largo de todo el aliviadero.

Así la consecuencia práctica de este tipo de dispositivos es la de que si no se analiza con acierto la posición de los frentes de onda se da origen a concentraciones de flujo que son perjudiciales, no solo a lo largo del aliviadero por dar origen a irregularidades de las velocidades y a necesitarse una mayor altura de cajeros, sino especialmente en los cuencos de resalto o en los trampolines de lanzamiento, que son las dos formas habituales con que se terminan tales aliviaderos.

Aun supuestas fijadas las anchuras en coronación y en el pie del aliviadero, las ondas se encuentran fuertemente afectadas por cual sea la forma concreta que se de a los cajeros que las originan. Por ello esta cuestión que recibe siempre la atención del proyectista es resuelta frecuentemente mediante ensayo en modelo reducido. Se pretende en este texto mostrar que de forma alternativa o complementaria se puede también abordar el tema en forma analítica que a su

vez puede resolverse mediante el correspondiente modelo matemático.

La cuestión se aborda por el método de las características y se planteará en dos etapas, en la primera se analizará lo que sucede en el seno de la masa fluida en general y en la segunda se contemplará lo que sucede en el propio frente de onda.

2. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Se va a efectuar un análisis bidimensional de un régimen permanente y para ello se supondrá (figura 1) que en el plano de la solera plana se sitúa el eje X según la dirección máxima pendiente y que ésta forma un ángulo α con la horizontal. Se admitirá que la situación en un punto genérico (x, y) (fuera del frente de onda abrupto) viene suficientemente caracterizado, por el calado h y por las componentes de la velocidad media $\vec{u} = (u, v)$.

Se admitirá también que el gradiente de presiones según una normal al plano de solera es constante y de valor, $g \cos \alpha$, es decir se despreciarán los efectos de curvatura de la lámina según el movimiento (la previsible validez práctica de esta hipótesis se puede contrastar en cada caso, si se desea, con una evaluación posterior una vez obtenidos resultados).

Sobre estas ideas y sobre un elemento prismático de altura h de base dx, dy se considera el equilibrio de las siguientes fuerzas:

diferencia de presiones hidrostáticas:

$$-\gamma \cos \alpha h \operatorname{grad} h \, dx \, dy$$

acción de la gravedad:

$$\gamma \sin \alpha h \, dx \, dy \, i$$

(*) Catedrático E.T.S.I., Caminos. Director del laboratorio de Hidráulica del CEDEX, Ministerio de Fomento.

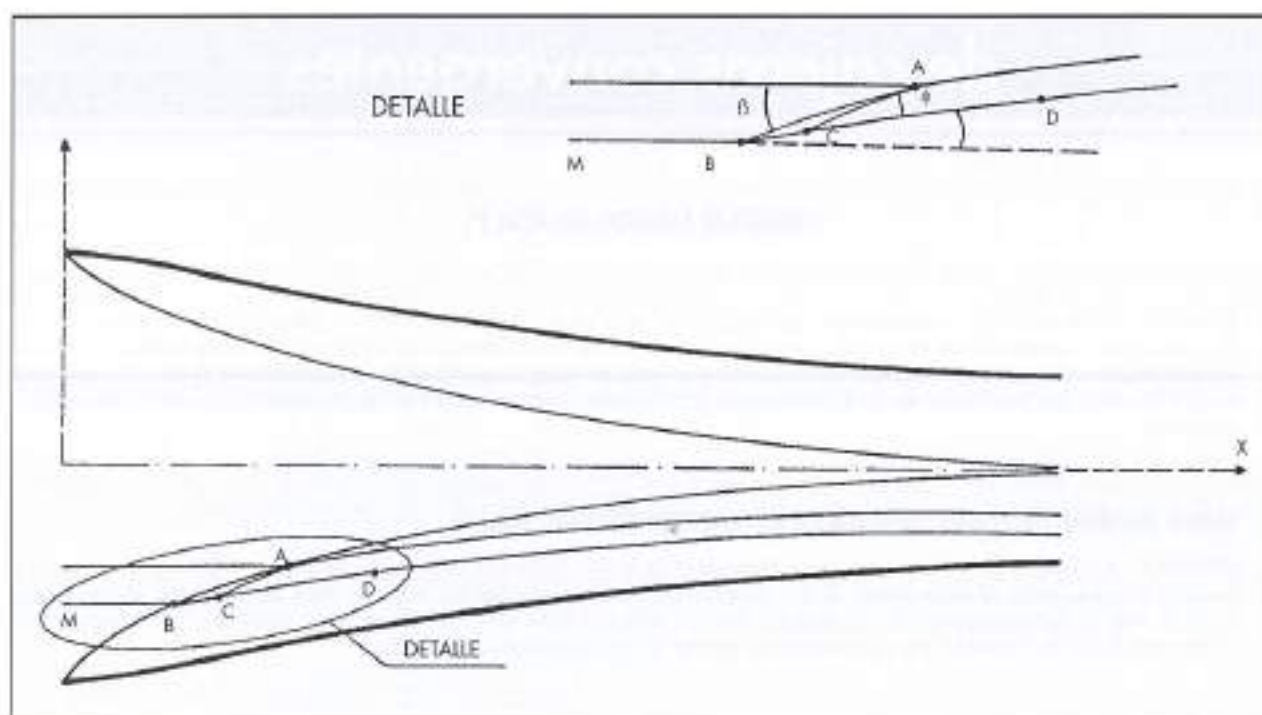


FIGURA 1. Trayectorias y frentes de onda.

fricción en solera:

$$-\gamma \frac{n^2 |\bar{u}| \bar{u}}{h^{4/3}} dx dy$$

fuerzas de inercia (solo hay convectivas):

$$\rho h \frac{d\bar{u}}{dt} dx dy$$

En lo anterior g es la aceleración de la gravedad; γ peso específico; ρ , densidad, $\bar{u}$, vector unitario según el eje X , y n un coeficiente de rugosidad tipo Manning que se puede utilizar para compensar, al menos en parte, algún efecto generalmente menor no incluido en las fuerzas consideradas.

Estableciendo el equilibrio y dividiendo por factores comunes resulta:

$$\frac{1}{g} \bar{u} \cdot g \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dt} + \cos \alpha \bar{g} \frac{d\bar{u}}{dt} h + \frac{n^2 |\bar{u}| \bar{u}}{h^{4/3}} - \text{sen} \alpha \cdot \bar{u} = 0 \quad [1]$$

que se utilizará como ecuación de la dinámica. Como ecuación de conservación de masa es fácil obtener

$$d(\bar{u} h) = 0 \quad [2]$$

Si se utilizan las componentes de $\bar{u}$ y se proyecta la ecuación (1) en sus componentes se obtiene:

$$\frac{1}{g} u u_x + \frac{1}{g} v u_y + \cos \alpha \cdot h_x + \frac{n^2 |u|}{h^{4/3}} \cdot u - \text{sen} \alpha = 0 \quad [3]$$

$$\frac{1}{g} u v_x + \frac{1}{g} v v_y + \cos \alpha \cdot h_y + \frac{n^2 |v|}{h^{4/3}} \cdot v = 0 \quad [4]$$

$$h u_x + u h_x + h v_y + v h_y = 0 \quad [5]$$

Poniendo $g h \cos \alpha = c^2$ queda:

$$u u_x + v u_y + 2 c c_x + \frac{n^2 |u|}{h^{4/3}} g u - g \text{sen} \alpha = 0 \quad [3']$$

$$u v_x + v v_y + 2 c c_y + \frac{n^2 |v|}{h^{4/3}} g v = 0 \quad [4']$$

$$c u_x + 2 u c_x + c v_y + 2 v c_y = 0 \quad [5']$$

Ecuaciones que en forma matricial pueden escribirse:

$$\begin{pmatrix} u & 0 & 2c \\ 0 & u & 0 \\ c & 0 & 2u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \\ c_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 2c \\ 0 & c & 2v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n^2 |u|}{h^{4/3}} g u - g \text{sen} \alpha \\ \frac{n^2 |v|}{h^{4/3}} g v \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad [6]$$

3. LÍNEAS CARACTERÍSTICAS

Para hallar las líneas características del movimiento se puede despejar las derivadas respecto de x y hallar los valores y vectores propios de la matriz que así resulta como coeficiente de las derivadas de y , pero es equivalente y resulta más sencillo encontrar los valores de λ que hacen singular a la matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda u + v & 0 & 2\lambda c \\ 0 & \lambda u + v & 2c \\ \lambda c & c & 2(\lambda u + v) \end{pmatrix} = 0 \quad [7]$$

obtenida multiplicando por λ la matriz coeficiente de las derivadas respecto de x en (6) y sumándole la matriz coeficiente de las derivadas respecto de y .

La anulación del determinante de (7) lleva a la ecuación:

$$2(\lambda u + v)^3 - 2(\lambda u + v)\lambda^2 c^2 - 2(\lambda u + v)c^2 = 0 \quad [8]$$

cuyas tres raíces son:



Frentes de ondas producidos por cajeros.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -v/u \\ \lambda_2 &= \frac{-uv + c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{u^2 - c^2} \\ \lambda_3 &= \frac{-uv - c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{u^2 - c^2}\end{aligned} \quad [9]$$

Poniendo por comodidad de notación

$$d = \sqrt{u^2 + v^2 - c^2}$$

puede también escribirse:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -v/u \\ \lambda_2 &= \frac{cd - uv}{u^2 - c^2} \\ \lambda_3 &= \frac{cd + uv}{u^2 - c^2}\end{aligned} \quad [10]$$

A cada uno de estos valores, λ_i , se le asocia una matriz fila (y sus proporcionales) tal que multiplicada por (7) particularizada para λ_i resulta el vector nulo. Puede comprobarse que a λ_1 , λ_2 , λ_3 se les asocia respectivamente:

$$\begin{pmatrix} u & v & 0 \end{pmatrix} \quad [11a]$$

$$\begin{pmatrix} cd - uv & u^2 - c^2 \\ du - cv & du - cv \end{pmatrix} \quad [11b]$$

$$\begin{pmatrix} cd - uv & c^2 - u^2 \\ du - cv & du - cv \end{pmatrix} \quad [11c]$$

Que ya están preparadas de forma que las dos primeras componentes sean las de un vector unitario.

Multiplicando cada uno de estos tres vectores fila por la ecuación matricial (6) y agrupando puede obtenerse:

$$(u \pm 2c) \left(\frac{u}{w} \frac{\delta}{\delta x} + \frac{v}{w} \frac{\delta}{\delta y} \right) \left(\frac{u}{c} \right) + \frac{h^{3/2}}{h^{3/2}} g - g \sin \alpha \frac{u}{w} = 0 \quad [12a]$$

$$(-v \pm 2d) \left(\frac{u^2 - c^2}{du - cv} \frac{\delta}{\delta x} + \frac{uv - cd}{du - cv} \frac{\delta}{\delta y} \right) \left(\frac{u}{c} \right) + \frac{h^{3/2}}{h^{3/2}} g - g \sin \alpha \frac{cd - uv}{du - cv} = 0 \quad [12b]$$

$$(v \pm 2d) \left(\frac{u^2 - c^2}{du - cv} \frac{\delta}{\delta x} + \frac{uv - cd}{du - cv} \frac{\delta}{\delta y} \right) \left(\frac{u}{c} \right) + \frac{h^{3/2}}{h^{3/2}} g - g \sin \alpha \frac{cd + uv}{du - cv} = 0 \quad [12c]$$

Que expresan la evolución a lo largo de las líneas características. Las direcciones de estas resultan ser:

$$u \vec{i} + v \vec{j} \quad (u^2 - c^2) \vec{i} + (uv - cd) \vec{j} \quad (u^2 - c^2) \vec{i} = (uv + cd) \vec{j} \quad [13]$$

Que son fácilmente identificables respectivamente con la dirección del flujo y con las tangentes a una onda circular de celeridad, c , arrastrada por el flujo.

4. FRENTE DE ONDA ABRUPTOS

Para obtener la forma del frente de onda abrupto se va a admitir que existe una línea ideal, el frente de onda, que cuando es atravesada por el flujo este cambia instantánea y sustancialmente de calado, así como de dirección y magnitud de la velocidad. Es una buena aproximación a la realidad pues usualmente la anchura del frente real es solo de algunos decímetros.

Según va a verse, supuestas conocidas las condiciones del flujo al llegar este a un punto cualquiera A del frente de onda, las condiciones en el punto A pero saliendo del frente pueden determinarse si se conoce el ángulo β , entre el flujo de llegada y el frente de onda. Este ángulo es desconocido a priori, pero se puede determinar con ayuda de una característica.

Se procede pues en primer lugar a establecer la relación entre el ángulo β y las condiciones de flujo.

Para ello, ver detalle de fig. 1, se llamará w_1 y w_2 a las velocidades de llegada y salida, que se descompondrán en componente normal y tangencial al frente de onda mientras que h_1 y h_2 serán los calados a ambos lados. Siguiendo el clásico análisis de IPPEN (Ref. 1) se advierte que al pasar el

frente, la componente tangencial debe de conservarse mientras que la normal debe de experimentar un resalto. La única diferencia con el citado análisis está en que ahora las celeridades de onda son

$$c_1 = \sqrt{g \cos \alpha h_1} \quad c_2 = \sqrt{g \cos \alpha h_2}$$

y con ellas se han de calcular los números de Froude:

$$F_1 = \frac{v_1}{c_1} \quad F_2 = \frac{v_2}{c_2} \quad [14]$$

el primero es directamente calculable y debe de introducirse en las fórmulas de IPPEN para obtener la relación de calados, o la de celeridades de onda:

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_1^2 \sin^2 \beta} - 1 \right) \quad [15]$$

y para obtener el ángulo de desvío, Θ , de la línea de corriente cuando atraviesa el frente de onda:

$$\tan \Theta = \frac{\tan \beta \left(\sqrt{1 + 8F_1^2 \sin^2 \beta} - 3 \right)}{2 \tan^2 \beta + \sqrt{1 + 8F_1^2 \sin^2 \beta} - 1} \quad [16]$$

también es fácil deducir que

$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \Theta)} \quad [17]$$

Es decir, como se había anunciado calado y componentes de la velocidad según los ejes aguas abajo del frente son expresables como función de las condiciones de llegada y del ángulo β .

Para poder dilucidar cual es el valor que debe atribuirse a β (y por tanto a calados y velocidades) basta advertir (figura 1) que si se considera el frente de onda atravesado por dos líneas de corriente próximas, una totalmente conocida (la del punto B) y otra conocida solamente en la zona de llegada (la del punto A), es factible trazar la característica CA (cuyo ángulo, ϕ , con la línea BC es según se indicó antes tal que su seno es $1/F_2$).

Con lo que habiendo supuesto conocidos calados y componentes de la velocidad en C, se deduce, utilizando (12b) o (12c) (según la orientación) una relación entre calados y componentes de la velocidad en A, que solo ha de poderse cumplir para un cierto valor de β y este ángulo queda así determinado y como consecuencia la situación en A una vez cruzada el frente.

5. APLICACIÓN PRÁCTICA

Utilizando las fórmulas reseñadas se ha confeccionado el código CALMA que determina simultáneamente un conjunto de líneas de corriente y la posición del frente de onda.

Para ello se toman como conocidos calados y velocidades en varios puntos de una misma abscisa (de la que va a par-

tir el cálculo) lo suficientemente próximas para que los puntos entre ellos puedan estimarse por interpolación lineal. Y se va a determinar las líneas de corriente que pasan por esos puntos.

El proceso avanza por etapas, referidas a abscisas sucesivas determinándose en cada etapa los parámetros hidráulicos en los puntos de corte de las trayectorias con nueva abscisa en función de los valores que toman en la abscisa anterior. Para ello, se utiliza un método implícito que determina para cada uno de esos puntos de corte los puntos de la abscisa anterior de los que provienen las tres características que confluyen en él.

Solo dos situaciones especiales en este esquema de cálculo. Primera cuando se trata de puntos situados en un frente de onda, para los cuales se aplica lo explicado en el apartado anterior, y segunda cuando se trata de filetes contiguos a los cajeros, para los que se avanza utilizando dos características y la condición de borde.

Se ha contrastado esta herramienta, con los frentes de onda en modelo reducido de un aliviadero del norte de España, con resultados satisfactorios.

CONCLUSIONES

El tratamiento conjunto de ondas graduales y frente de onda abruptos en un aliviadero de solera plana y cajeros convergentes en un régimen permanente puede abordarse combinando líneas características, condiciones de borde y la relación de dependencia que hay entre los parámetros de flujo a la salida de un frente de onda con los valores de los parámetros inmediatamente antes de la onda y el ángulo que forma este con el flujo de llegada.

El código —CALMA— que se ha elaborado sobre estas bases ha mostrado una concordancia satisfactoria con los resultados de ensayo en modelo físico.

BIBLIOGRAFÍA

1. GUÍA TÉCNICA N° 5: "Aliviaderos y Desagües" Ed. por Comité Nacional Español de Grandes Presas. En prensa.
2. ICOLD. Boletín N° 81: Aliviaderos (Versión castellana de 1988).
3. IPPEN. *Mechanics of Supercritical Flow*. Trans. ASCE. Vol 116 p-678-694.
4. JEFFREYS. *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*. PITMAN.
5. C. MATEOS. "Canales de descarga. Ondas" en *Comportamiento Hidráulico de las estructuras de desagüe en las presas*. CEDEX. 1985.
6. C. MATEOS. "Frentes de Onda en Aliviadero con Cajeros convergentes". XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Guayaquil 1996. pág. 1 a 11.

HAY CARRETERAS DONDE NI SIQUIERA MODIFAL PODRIA EVITAR EL AQUA-PLANNING.



PERO HAY OTRAS MUCHAS DONDE SI PODRIA, DONDE REDUCIRIA EL NIVEL DE RUIDOS (HASTA 3 DECIBELIOS), DONDE DISMINUIRIA LA FORMACION DE RODERAS Y FISURAS, Y RETRASARIA EL ENVEJECIMIENTO DEL FIRME AUN EN LAS CONDICIONES CLIMATOLOGICAS MAS EXTREMAS. REPSOL PRESENTA MODIFAL. EL PRIMER BETUN MODIFICADO EN EL QUE LA DISPERSION DE LOS POLIMEROS EN EL SENO DE LOS BETUNES ES PERFECTA Y HOMOGenea. ESTA HOMOGENEIDAD ES LA QUE PERMITE A MODIFAL CONSERVAR INTACTAS SUS PROPIEDADES AUN EN PERIODOS PROLONGADOS DE ALMACENAMIENTO. ALGUNAS VECES HAY QUE CAMBIAR ALGO PARA QUE TODO SIGA IGUAL. NOSOTROS HEMOS MODIFICADO NUESTROS BETUNES PARA SEGUIR SIENDO LIDERES EN ASFALTOS.



REPSOL PRODUCTOS ASFALTICOS, S. A.



ALGUNAS VECES LA NATURALEZA NO ES SABIA

La fuerza de la naturaleza hace crecer hierbas y plantas en los lugares más insospechados e innecesarios, creando incluso situaciones de riesgo.

ARSENAL* es un herbicida duradero y total que actúa sobre las malas hierbas en cualquier momento de su crecimiento.

Con una sola Aplicación de **ARSENAL*** el problema queda solucionado.

ARSENAL* respeta el medio ambiente, los animales y por tanto al hombre.



CON ARSENAL* LAS HIERBAS *NO CRECEN DONDE NO DEBEN*

