Uso de la función Beta y de los polinomios de Legendre para la estimación de eventos hidrológicos extremos

LLAMAS, J. (*); NARANJO-BREÑA, M. (**); ANTIGUEDAD I. (***)

RESUMEN En este trabajo se propone un nuevo método para la estimación de la frecuencia de eventos hidrológicos extremos. Se utiliza una función clave, función *Beta* en su forma rectangular, mejorada con una serie de *polinomios ortogonales de tipo Lengendre*. La calibración del modelo se ha hecho generando una muestra aleatoria de 500 valores perteneciente a la familia Beta [0,7000]. Finalmente se ha validado el modelo con una muestra de precipitación de la ciudad de Méjico, siendo los resultados altamente satisfactorios.

THE BETA FUNCTION AND THE POLYNOMIALS OF LEGENDRE AS A TOOL FOR HYDROLOGICAL EXTREME VALVES PREDICTION

ABSTRACT *In this paper, an improved probabilistic method for flood analysis using the* Beta *function and* polynomials orthogonal Legendre's *is proposed. In order to increase its convergence toward the real flood probability density function, rectangular density, considered as a degenerated form of Beta family, has been improved with a series of polynomials of Legendre type.. The model has been tested using a sample of five hundred generated random data belonging to Beta function. Finally, a real word application, using precipitation series from Mexico city showed the accuracy of this new approach to frequency analysis and hydrological extreme values prediction.*

Palabras clave: Función Beta; Polinomos de Legendre; Valores hidrológicos externos.

INTRODUCCIÓN

El empleo de polinomios ortogonales para implementar el ajuste estadístico de funciones de distribución de tipo clásico, nace de la necesidad de extraer una mayor información de las muestras históricas disponibles y por consiguiente de racionalizar económicamente la gestión de las redes hidrológicas. Si se considera además que la gran mayoría de los fenómenos hidrológicos poseen un entorno finito, por lo general bien definido, el uso de la función beta, enmarcada entre límites reales, parece justificado para representar la frecuencia de tales fenómenos. Tomemos, por ejemplo, el estudio de caudales de un pequeño río. Parece evidente que los valores mínimos posibles no pueden ser inferiores a 0, y en cuanto a los máximos, aun siendo más nebuloso el valor exacto del límite, nadie puede dudar de su existencia. Ponerlo en duda, argumentando que si se fijara este valor siempre cabría la posibilidad de encontrar en el futuro uno mayor, sería caer en la paradoja de Aquiles y la tortuga.

Investigaciones previas (Llamas et al., 1986, Díaz 1991, Llamas 1994) han mostrado que el hecho de fijar un límite superior a los caudales, da una mayor coherencia y estabilidad al proceso de la estimación de eventos extremos. La condición necesaria para poder aplicar esta metodología es evidentemente la existencia de muestras de buenas dimensiones y calidades, que permitan extrapolar la similitud entre la población y la muestra más allá de los dos o tres primeros momentos.

Ahora bien la función Beta presenta a veces formas asintóticas o puntos de brusca singularidad (por ejemplo cuando $0 < p,\ q < 1$) lo que puede dificultar su empleo en algunos casos por lo cual es conveniente tener a mano nuevos métodos para resolver el problema de la estimación. En este artículo tratamos de abrir un camino para evitar situaciones problemáticas en la búsqueda de frecuencias extremas de caudales eliminando, los conflictos posibles. Se ha elegido como función clave, la forma alotrópica más simple de la función Beta, sea la función rectangular, que se produce cuando $p = q = 1$. Hay que señalar, sin embargo, que la facilidad operacional y este campo de acción más extendido, tienen

(*) Catedrático de la Universidad Laval, Facultad de Ciencias y de Ingenería, Quebec, Canadá.

(**) Doctora por la Universidad Laval, Facultad de Ciencias y de Ingeniería, Quebec, Canadá.

(***) Catedrático de la Universidad del País Vasco. Departamento de Geodinámica, 48940 Leioa (Bizkaia).

como contrapartida una convergencia más lenta hacia la verdadera función de distribución.

Los polinomios ortogonales asociados a la función rectangular son de tipo Legendre, es decir de la familia Jacobi con parámetros $\alpha = \beta = 0$.

Definición analítica de la función Beta

La función de densidad Beta, entre los límites 0 y 1, tiene como expresión:

$$f(y) = \frac{1}{B_{(p,q)}} y^{p-1}(1-y)^{q-1} \qquad 0 \leq y \leq 1 \qquad [1]$$

Los momentos al origen de la variable y pueden obtenerse directamente de la función generadora siguiente:

$$\mu'_m = \frac{\beta(p+m,q)}{\beta_{(p,q)}} = \frac{\Gamma(p+m)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+m)} = \frac{p^{[m]}}{(p+q)^{[m]}} \qquad [2]$$

teniendo m un valor entero mayor que 1; $p^{[m]}$ es la función factorial ascendente, o símbolo de Pochhammer definida como:

$$p^{[m]} = p(p+1)\ldots(p+m-1) \qquad [3]$$

Desarrollo matemático de la función Beta completada con polinomios ortogonales de Legendre

Los polinomios de Legendre constituyen un caso particular de los polinomios de Jacobi estando definidos por la función:

$$(1-2xt+t^2)^{-0,5} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \qquad |t| < 1 \qquad [4]$$

La derivada de orden k de esta expresión, con relación a t, permite obtener el polinomio de orden k. Los primeros polinomios de Legendre son:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = 1/2\,(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = 1/2\,(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = 1/8\,(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$P_5(x) = 1/8\,(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Siendo la ecuación recurrente:

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{xP_n(x) - P_{n-1}(x)}{n+1} \qquad [5]$$

lo que permite, conociendo $P_0(x)$ y $P_1(x)$, calcular los otros polinomios.

La figura 1 muestra la forma de algunos polinomios de Legendre.

La ortogonalidad se expresa por la relación:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad \text{cuando } m \neq n$$
$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1} \qquad \text{cuando } m = n \qquad [6]$$

Esta última expresión se obtiene a partir de la función generadora (4).

Los polinomios de Legendre, así como los de Tchebychev-Hermite, Laguerre o Jacobi, forman un conjunto completo

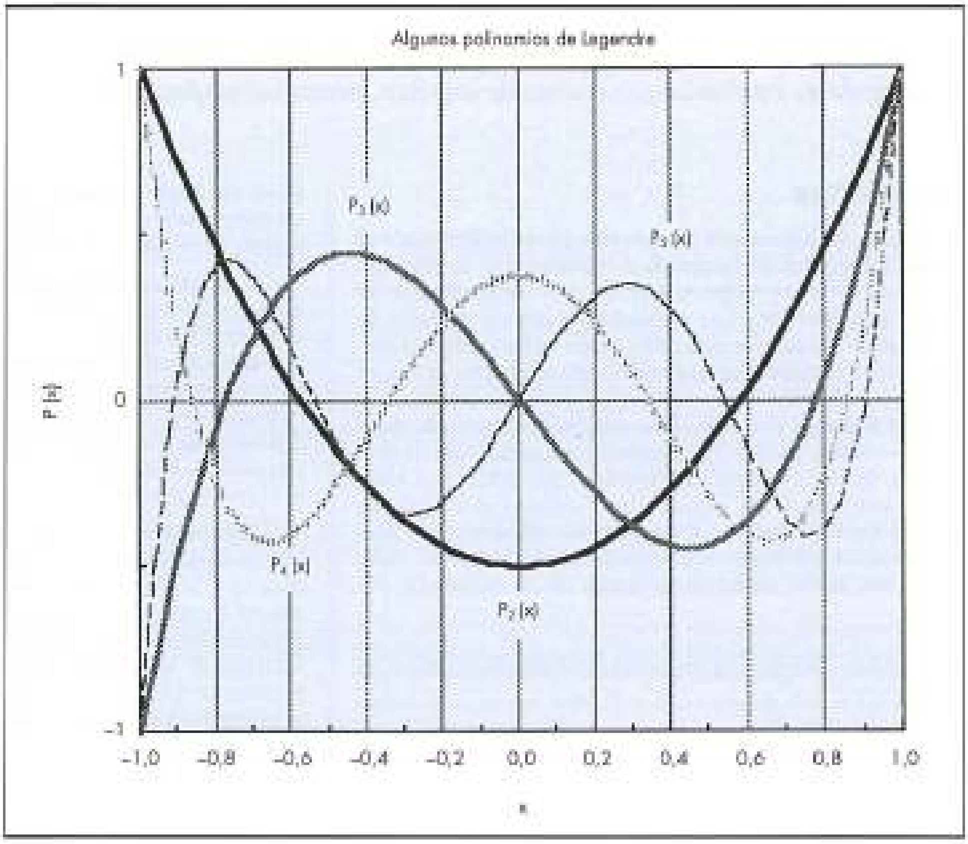

FIGURA 1. Representación gráfica de polinomios de Legendre.

que puede utilizarse para evaluar una función de densidad de probabilidades cuyo número de momentos comunes entre la muestra y la población es igual al grado del polinomio.

Este conjunto es de la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) = f(x) \qquad [7]$$

con una función clave de tipo rectangular. El valor de los coeficientes a_k puede calcularse multiplicando la serie (7) por $P_n(x)$ e integrando término a término teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad, ya definida.

Si definimos la función clave en el intervalo [0,1], el valor de a_n es:

$$a_n = (2n+1)\sum_{k=0}^{n} C_k^n (-1)^k K\left[\frac{(1+n)^{[k]}}{k!}\right]\mu'_k \qquad [8]$$

En esta expresión:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

μ'_k = momento al origen de orden k

$h^{[a]} = h(h+1)(h+2)\ldots(h+a-1)$ símbolo de Pochhammer

El modelo puede expresarse ahora bajo la forma:

$$f(y) = \sum_{n=0}^{m}\left[(2n+1)\sum_{k=0}^{n} C_k^n(-1)^k \frac{(1+n)_k}{k!}\mu'_k\left[\sum_{k=0}^{n} C_k^n(-1)^k \frac{(1+n)_k}{(1)_k} y^k\right]\right] \qquad [9]$$

siendo m un parámetro de aproximación y $0 < y > 1$. Teóricamente el valor de m es infinito, en la práctica depende de la dimensión y de la calidad de la muestra. Las muestras hidrológicas de hoy día permiten truncar la expresión (9) con valores de m comprendidos entre 4 y 7.

Para completar el modelo sólo queda demostrar que (9) es una función de densidad para cualquier valor de m, es decir:

$$\int_0^1 f(y)dy = 1 \qquad \forall m$$

Definamos en primer lugar la función hipergeométrica

$$_2F_1\langle a,b,c|x\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{[n]}b^{[n]}}{c^{[n]}} \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad [10]$$

los índices 2 y 1 de F representan respectivamente el número de símbolos de Pochhamer del numerador y del denominador. En el caso de los polinomios de Legendre se tiene la identidad:

$$P_n(x) = {}_2F_1\left\langle -n, n+1, 1\left|\frac{1-x}{2}\right.\right\rangle$$

y si la variable es $0 \le x \le 1$, entonces $P_n(x) = {}_2F_1\langle -n, n+1, 2|1\rangle$

Volvamos a la ecuación (7). Disociando el término $n = 0$, se tiene:

$$\int_0^1 f(y)dy = a_0 P_0(n) + \sum_{n=1}^{m} a_{n2}F_1\langle -n, n+1, 2; 1\rangle =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{m} a_{n2}F_1\langle -n, n+1, 2|1\rangle$$

y según el teorema de Rainville (Rainville, 1965):

${}_2F_1\langle -n, n+1, 2|1\rangle = 0$ y la prueba está completada.

Calibración del modelo Beta-Legendre

Veamos ahora el comportamiento del modelo Beta-Legendre en el análisis de precipitaciones sobre una cuenca. Es conveniente establecer desde el principio algunos criterios de utilización con objeto de conocer el alcance y los límites reales de ajuste del modelo.

El primer criterio es que el uso del modelo se extiende a los casos en que la función Beta a dos parametros, estimados con la información de la muestra, hubiera ofrecido una forma asintótica. Esta circunstancia dificultaría el empleo de los polinomios de Jacobi en su forma general.

No hay que imaginar, y éste es el principal criterio restrictivo, que a medida que aumentamos el número de polinomios, mejoramos indefinidamente la calidad del ajuste. En realidad existe un máximo a partir del cual la precisión del ajuste disminuye de manera drástica. Esto indica que, en un momento dado, hemos agotado toda la información útil contenida en la muestra. Este nivel óptimo de momentos útiles, puede obtenerse de dos maneras: Calculando de forma interactiva el grado del polinomio que ofrece el mejor ajuste con la función experimental de Weibull, o terminando el proceso en el momento en que uno de los polinomios origine frecuencias negativas u oscilaciones anormales en las extremidades de la función de densidad.

Para calibrar el modelo Beta-Legendre se ha utilizado una serie generada de 500 valores aleatorios de una distribución Beta [0; 7.000]. Las razones por las que se eligió esta ley fueron varias. En primer lugar para garantizar los límites reales de la distribución; en segundo lugar para examinar la convergencia del modelo utilizando una larga serie de valores cuya distribución era conocida a priori y por último para observar la sensibilidad del modelo con relación al número de momentos empleados.

Los resultados de la calibración del modelo son bastante satisfactorios como puede observarse en la figura 2 en la que la función analítica ha sido obtenida con polinomios de sexto grado.

Validación del modelo. Ejemplo de aplicación con datos históricos

Como aplicación del modelo Beta-Legendre se han utilizado 30 años de precipitación de la ciudad de Méjico. La estación anual de lluvias es de 6 meses de los cuales 4 son netamente lluviosos (junio, julio, agosto y septiembre) y 2 de transición (mayo y octubre). Siendo la lluvia homogénea en los meses lluviosos, se ha elegido la muestra formada por 120 valores independientes (30 * 4).

El modelo ofrece resultados francamente satisfactorios revelando la importancia de los momentos de orden superior. Las figuras 3 y 4 muestran como la precisión aumenta con el número de momentos hasta alcanzar el óptimo de 5.

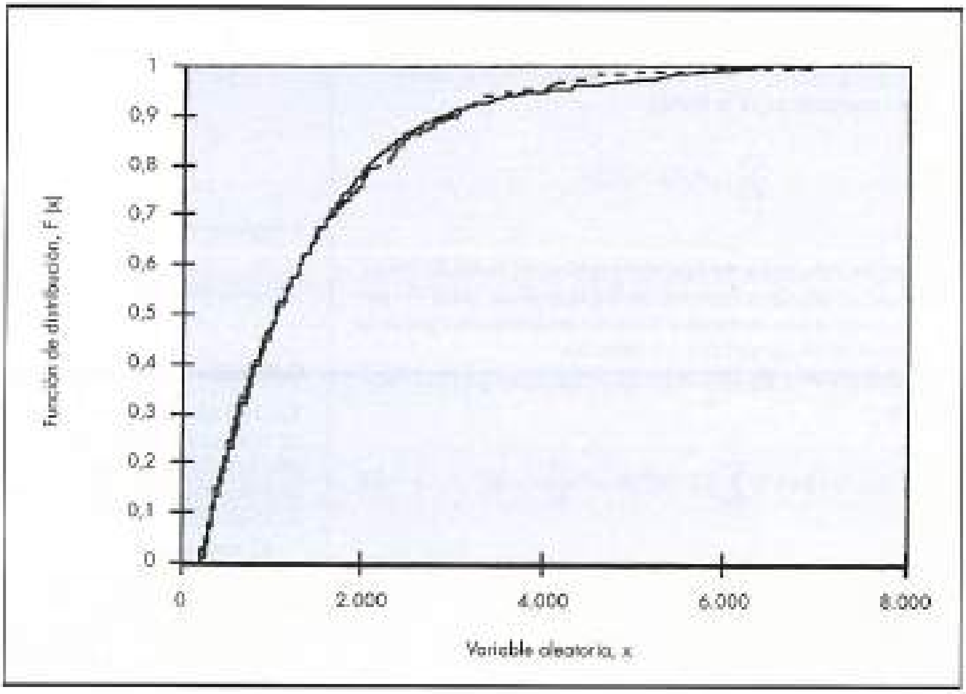

FIGURA 2. Calibración del modelo Beta-Legendre.

Para obtener la función de densidad (o de distribución) más representativa, se han aumentado progresivamente el número de momentos, utilizando los criterios de selección definidos anteriormente. De esta forma puede observarse la convergencia (que puede ser analizada por un test de Kolmogorof, por ejemplo), y a partir de un cierto grado del polinomio, 5 en este caso, la mejora de la función Beta es discutible e injustificada. Esto prueba que la dimensión de la muestra es el argumento central para elegir el grado límite del modelo.

El método Beta-Legendre para analizar eventos extremos de frecuencia, reposa sobre dos hipótesis bastante lógicas: la existencia de límites físicos finitos de la gran mayoría de los fenómenos hidro-meteorológicos y la precisión del ajuste al aumentar el número de momentos similares entre la población y la muestra. Además, en muchas situaciones reales se observan densidades de tipo multimodal que la función Beta-Legendre puede simular y representar con fidelidad, a diferencia de las funciones clásicas con reducido número de parámetros.

REFERENCIAS

ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I. A. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., N.Y., 1972.
AYANT, Y. Fonctions Spéciales, Dunod, Paris 1971.
BAILLARGEON, G. y RAINVILLE, J. Introduction à la statisque appliquée, Les editions S.M.G. Trois Rivières, 1975.
BORGMAN, L. E. The frequency distribution of near extremes. J. Geophys. Res., 66 (10), 1961.
CARLSIN, B. C. Special Functions of Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1975.
CHOW, V. T. Editor in Chief Handbook of Applied Hydrology. McGraw-Hill, 1964.

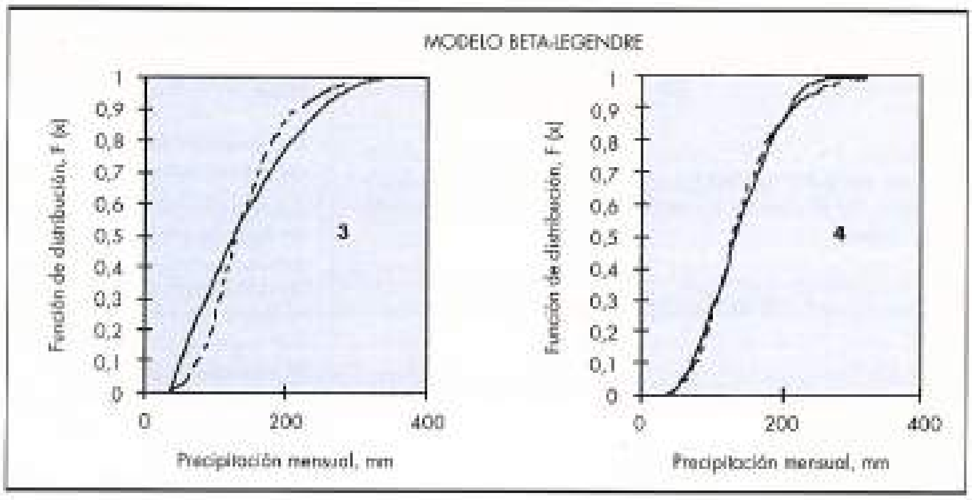

FIGURA 3. Resultados del modelo con 3 y 4 polinomios.

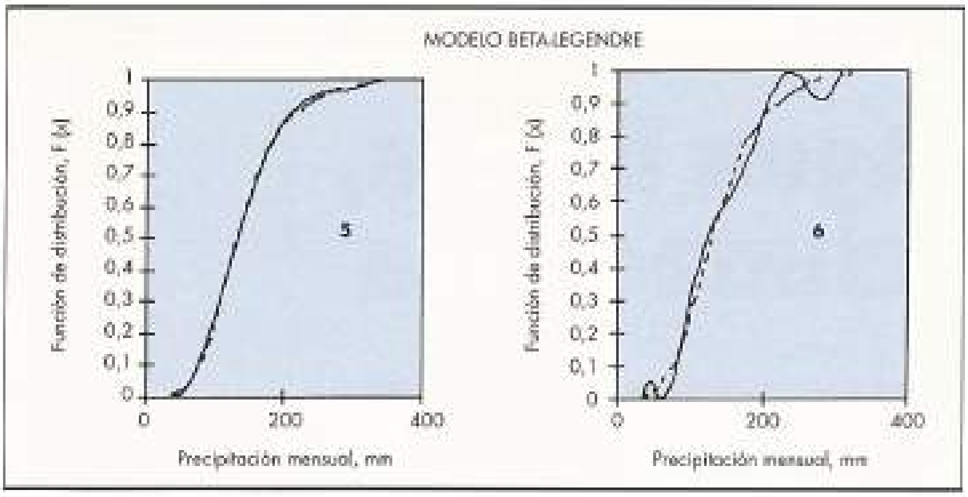

FIGURA 4. Resultados del modelo con 5 y 6 polinomios.

COURANT, R. y HILBERT, D. Methods of Mathematical Physics, Interscience Publishers, Inc., New York. Vol I, 1970.

DÍAZ DELGADO, C. Application de la fonction Bêta et des polynômes de Jacobi en hydrologie,thèse de doctorat, Université Laval 1991.

DÍAZ DELGADO, C. La fonction Bêta appliquée à l'analyse statistique d'événements extrêmes en hydrologie, Mémoire de maîtrise, Université Laval 1988. Chapitres 1, 2, 3, 4.

GUMBEL, E. J. Statistiques of Extremes, Columbia University press, 1969. 7-16, 26-34, chaptres 3,5.

GUY, B.; DÍAZ DELGADO, C. y LLAMAS, J. Limites d'application de la fonction bêta pour l'analyse statistique. Congrès du premier centenaire du Génie Civil au Canada, Mai 1987.

HOYT, W. G. y LANGBEIN, W. B., Floods, Princeton university Press, 1955. 5-34, 162-186 pp.

JOHNSON, N. y KOTZ, S. Continous univariate distributions. Distribution in statistiques. Wiley series in probability and mathematical statistics, 1970, Vol. I and II.

KENDALL, M. G. y STUART, A. The advanced theory of statistics. Hafner Publ. Co., New York, 1963. Vol. I and II

LAWLESS, J. F. Statistical models and methods for lifetimes data. Wiley, New York, N.Y. 1982.

LINSEY, R.; KOHLER, M. y PAULHUS, J. Hydrology for Engineers. Third edition. McGraw-Hill, 1982, ch. 13 and 14.

LLAMAS, J., Cuadernos de apoyo a la docencia Análisis matemático en hidrología. Universidad Autónoma de Querétaro, México, 1986.

LLAMAS, J.; CHARBONNEAU, R. y RASSAM, J. C. Analyse statistique d'événements extrêmes.IAHS proceedings, Italy, 1986.

LLAMAS, J. Hydrologie générale: Principes et applications. Gaëtan Morin Editeur, 1985. 650p.

LUKE, Y. The special functions and their approximations. Academic Press, New York and London, vol. I, 1969.

Mc CUEN, R. y SNYDER, W. Hydrologic Modeling, Statistical Methods and applications. Prentice-Hall, 1986.

MIQUEL, J. Guide practique d'estimation des probabilités de crues. Editions Eyrolles, Paris, 160 pp. 1984.

RAINVILLE, E. D. Special Functions. The Macmillan Company, New York, 1965. pp. 104-169.

SERVUK, B. y GEIGER, H. Selection of distribution types for extremes in precipitation Operational Hydrology Rep. 15. WMO, Geneva, 65 pp. 1981.

SZEGO, G. Orthogonal Polynomials, 4th ed. Amer.Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1975.

Agua limpia, ciudad viva

El conocimiento y experiencia en el control del agua son diagnóstico, proyecto, decisivos para operar diseño, construcción, en óptimas condi- mantenimiento, ex- ciones y contribuyen, plotación y gestión en términos econó- de plantas de trata- micos y medioam-

bientales al desarrollo y futuro de nuestras ciudades. Para elegir el proceso de depuración más adecuado para el tratamiento de las aguas, CADAGUA pone a su disposición, ingeniería, miento y depuración de aguas. Porque usted es el primer beneficiado, haga un trato con el agua. Trate con CADAGUA.

IDAM AGRAGUA,
GRAN CANARIA.

ETAP VENTA ALTA
BILBAO

Cadagua

TEL. (94) 481 73 00 • FAX: (94) 481 73 01 • EMAIL: