El problema del "tapón salino" en estuarios. III: Solución en régimen transitorio intermareal

A. RUIZ MATEO (*)

RESUMEN Este es el último de una serie de tres artículos dedicados a presentar algunos procedimientos para calcular la distribución longitudinal de salinidades en estuarios transversalmente homogéneos. Los dos primeros se publicaron en números anteriores de esta misma revista; en el presente artículo se plantea el problema en régimen transitorio intermareal y se obtiene la solución para un caso particularmente interesante: el paso desde una situación de equilibrio correspondiente a un caudal determinado en cabecera, hacia otra situación de equilibrio correspondiente a un caudal distinto. Se presenta una solución analítica mediante desarrollo en serie y se aplica al caso concreto del estuario del Guadalquivir. La numeración de fórmulas, figuras y tablas es continuación de la utilizada en los artículos anteriores.

THE "SALINE PLUG" PROBLEM IN ESTUARIES

ABSTRACT *This is the last in a series of three articles dedicated to the presentation of several procedures for calculating the longitudinal distribution of salinities in estuaries that are transversely homogenous. The first two parts appeared in previous issues of this journal and now, in this article, we look at the problem in intertidal unsteady flow and a solution is found for a particularly interesting case: the transition from a equilibrium situation corresponding to a certain level of headwaters to another equilibrium situation corresponding to a distinct water level. We present an analytical solution using series expansion and it is applied to the specific case of the Guadalquivir estuary. The numbering applied to the formulas, figures and tables is a continuation of that used in the foregoing articles.*

Palabras clave: Transitorio; Intermareal; Salinidades; Estuarios.

INTRODUCCIÓN

En los dos primeros artículos de esta serie se ha analizado en profundidad el problema de determinar la posición de equilibrio de la distribución de salinidad en estuarios por integración de la ecuación de dispersión en régimen permanente. En el primero de ellos [1] se hizo un estudio de las condiciones de contorno más adecuadas y se presentaron varias soluciones analíticas; en el segundo [2] se explicó un procedimiento de integración numérica y se aplicaron ambos tipos de soluciones a dos casos concretos: los estuarios del Guadalquivir y del Guadalete.

Lo que hemos visto hasta ahora nos permite conocer cual es la salinidad media en cualquier sección del estuario en función de los parámetros geométricos, hidráulicos y dispersivos. La verificación de un modelo de este tipo parece, en principio, una tarea bastante simple; basta con elegir un conjunto de puntos a lo largo del estuario y, en cada uno de ellos, medir la salinidad varias veces en cada ciclo de marea durante varios ciclos de marea. El valor medio de todas estas medidas para cada punto debe coincidir con los resultados suministrados por el modelo.

En la práctica, sin embargo, se plantea el problema de la interpretación de los promedios experimentales debido a que los caudales en cabecera no permanecen constantes durante el periodo de toma de muestras, y se sabe que a cada caudal corresponde una solución de equilibrio diferente.

Por lo tanto, las soluciones en régimen permanente aportan ya una información que excede de aquella que puede obtenerse normalmente a partir de datos experimentales: permiten determinar unívocamente la situación de equilibrio correspondiente a un caudal dado en cabecera, y sobre todo permiten calcular el impacto que tendría una hipotética variación de dicho caudal antes de decidir llevarla a cabo.

Sin embargo resulta muy conveniente disponer de soluciones en régimen transitorio intermareal. Recordemos que éste se caracteriza porque las variaciones de salinidad se producen lentamente en comparación con la duración de un ciclo de marea, y se aplica al resultado de promediar las salinidades durante varios ciclos de marea consecutivos. Este tipo de soluciones permitiría resolver la importante cuestión de cuál es la velocidad con la que una situación de equilibrio correspondiente a un caudal dado tiende a la situación de equilibrio correspondiente a un caudal diferente cuando se produce una variación rápida de este caudal. Conociendo la respuesta se podría saber con qué antelación es necesario

(*) Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Centro de Estudios de Puertos y Costas del CEDEX (Ministerio de Fomento).

llevar a cabo la maniobra de cambio de caudal para conseguir el efecto deseado en una fecha determinada.

En el presente artículo se deduce una solución analítica para este problema concreto para el caso en el que el coeficiente de dispersión varía de forma inversamente proporcional al área de la sección transversal en cada punto. Dicha solución analítica tiene, además la ventaja de que la dependencia con respecto al tiempo de cada término de la serie es expresable mediante una función exponencial, con lo cual pueden hacerse deducciones teóricas con respecto a la velocidad de acercamiento a la situación de equilibrio.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN

Como se explicaba en [1], por ser las mareas un fenómeno cuasi-periódico, los desplazamientos netos producidos por éstas son muy pequeños (sobre todo si se consideran periodos de 2, 28 o 56 ciclos) comparados con los producidos por el caudal de agua dulce. Para sustancias muy conservativas (como es el caso que nos ocupa) el interés se centra sobre todo en la evolución a lo largo de periodos de tiempo mucho mayores que la duración de un ciclo de marea. Por ello se suele suponer en estos casos que la acción de las mareas se reduce a un reforzamiento de la dispersión longitudinal y a una traslación periódica de las concentraciones fácilmente calculable mediante consideraciones de volúmenes almacenados. El problema **transitorio intermareal** se plantea entonces de forma análoga al de un río, pero con secciones transversales y coeficientes de dispersión mucho mayores de lo normal.

Por integración respecto al tiempo de las ecuaciones generales durante un tiempo T igual a la duración de un ciclo de marea se obtuvieron las ecuaciones [9] y [13] de [1], que repetimos aquí:

$$\frac{\partial(A_T C_T)}{\partial t} + \frac{\partial(A_T C_T U_r)}{\partial x} = \frac{\partial(A_T E_{rT}\,\partial C_T / \partial x)}{\partial x} \qquad [9]$$

$$\frac{\partial A_T}{\partial t} + \frac{\partial(A_T U_r)}{\partial x} = 0 \qquad [13]$$

siendo A_T, C_T y E_{rT} los promedios durante un ciclo de marea del área de la sección transversal, de la concentración de sal y del coeficiente de dispersión longitudinal.

Integrando respecto a x la ecuación [13] desde la cabecera del estuario hasta una sección cualquiera de abcisa x se obtiene:

$$A_T U_r = Q_d - \frac{\partial V_0}{\partial t} \qquad [14]$$

donde Q_d es el caudal introducido en el estuario por la cabecera, V_0 es el volumen almacenado en cada instante entre la cabecera y la sección de abcisa x y, finalmente, U_r es la velocidad neta de desagüe a través de esta sección.

Usando la ecuación [13] vamos a transformar el primer miembro de la ecuación [9]:

$$\frac{\partial(A_T C_T)}{\partial t} + \frac{\partial(A_T C_T U_r)}{\partial x} = A_T\frac{\partial C_T}{\partial t} + C_T\frac{\partial A_T}{\partial t} + A_T U_r\frac{\partial C_T}{\partial x} + C_T\frac{\partial(A_T U_r)}{\partial x} = A_T\frac{\partial C_T}{\partial t} + A_T U_r\frac{\partial C_T}{\partial x}$$

Al igual que en [1], vamos a hacer la hipótesis de que el producto $A_T E_{rT}$ es constante a lo largo del estuario. Esta hipótesis está basada en que el coeficiente de dispersión aumenta cuanto mayor es el recorrido longitudinal en cada ciclo de marea y éste, a su vez es en cada punto inversametne proporcional al área de la sección transversal.

De esta forma, la ecuación [9] se convierte en:

$$A_T\frac{\partial C_T}{\partial t} + A_T U_r\frac{\partial C_T}{\partial x} = A_T E_{rT}\frac{\partial^2 C_T}{\partial x^2} \qquad [73]$$

Si multiplicamos esta ecuación por $T/s_0 A_T$ y hacemos los cambios de variables:

$$\begin{aligned} x &= \lambda L \\ t &= \tau T \\ C_T &= \sigma s_0 \end{aligned} \qquad [74]$$

se obtiene la ecuación adimensional:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + u^*\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} = E^*\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2} \qquad [75]$$

siendo:

L, longitud total del estuario
s_0, salinidd del agua del mar
$u^* = U_r T/L$, velocidad adimensional
$E^* = E_{rT} T/L^2$, coeficiente adimensional de dispersión

La solución de esta ecuación en régimen permanente para un caudal constante en cabecera Q_d fue obtenida en el primer artículo de esta serie (referencia [1]) para diversas formas de expresar la correspondiente condición de contorno. Allí se vió que para valores elevados del número de Péclet:

$$Pe = \frac{Q_d L}{A_T E_{rT}} = \frac{U_r L}{E_{rT}} = \frac{u^*}{E^*} \qquad [76]$$

la condición de contorno puede tomar la forma más sencilla

$$C_T(x=0) = 0 \qquad [24a]$$

y la solución es:

$$C_T = s_0\frac{e^{Pe\,\lambda} - 1}{e^{Pe} - 1} \qquad [26a]$$

que puede escribirse como:

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{Pe\,\lambda} - 1}{e^{Pe} - 1} \qquad [77]$$

En el presente artículo queremos encontrar una solución analítica en régimen transitorio de la ecuación [75] tomando como condición inicial la situación en régimen permanente correspondiente a un caudal de cabecera Q_{d*}, cuando se produce un cambio súbito (en t = 0) a un nuevo caudal Q_d, que se mantiene constante durante todo el tiempo.

Matemáticamente, las condiciones que definene el problema son:

a) Condiciones de contorno:

$$\sigma(0,\tau) = 0$$
$$\sigma(1,\tau) = 1$$

b) Condición inicial:

$$\sigma(\lambda, 0) = f_0(\lambda)$$

Siendo $f_0(\lambda)$ la solución en régimen estacionario de la misma ecuación, pero con un valor del número de Péclet correspondiente al caudal anterior Q_{d0}. De acuerdo con la expresión [26a], si llamamos Pe_0 a dicho valor, se tendrá:

$$f_0(\lambda) = \frac{e^{Pe_0 \cdot \lambda} - 1}{e^{Pe_0} - 1} \quad [78]$$

Para resolver este problema comenzaremos por descomponer la solución buscada en suma de dos funciones:

$$\sigma(\lambda, \tau) = f_\infty(\lambda) + \varepsilon(\lambda, \tau) \quad [79]$$

siendo $f_\infty(\lambda)$ la solución en régimen estacionario correspondiente al número de Péclet actual:

$$f_\infty(\lambda) = \frac{e^{Pe \cdot \lambda} - 1}{e^{Pe} - 1} \quad [80]$$

Sustituyendo [79] en [75] y teniendo en cuenta que $f_\infty(\lambda)$ es una solución en régimen estacionario, se obtiene que la función $\varepsilon(\lambda, T)$ tiene que satisfacer la ecuación:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + v^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = E^* \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \lambda^2} \quad [81]$$

y las condiciones de contorno e iniciales siguientes:

$$\begin{aligned} &\varepsilon(0, \tau) = 0 \\ &\varepsilon(1, \tau) = 0 \\ &\varepsilon(\lambda, 0) = f_0(\lambda) - f_\infty(\lambda) \end{aligned} \quad [82]$$

La función $\varepsilon(\lambda, T)$ nos dice cómo van disminuyendo las diferencias entre la condición inicial y la solución en régimen estacionario para el número de Péclet actual. Por lo tanto, corresponde exactamente a lo que vamos buscando.

Trataremos de encontrar una solución por el método de separación de variables (ver por ejemplo, la referencia [3]). Supongamos:

$$\varepsilon(\lambda, \tau) = \Lambda(\lambda) \cdot T(\tau) \quad [83]$$

Sustituyendo en [81], dividiendo por ΛT y separando funciones de variables diferentes se obtiene:

$$\frac{T'}{T} = E^* \frac{\Lambda''}{\Lambda} - v^* \frac{\Lambda'}{\Lambda} \quad [84]$$

Esta ecuación solo puede ser cierta si ambos miembros son iguales a una constante. Por lo tanto:

$$T' / T = -\alpha \quad [85]$$

$$E^* \Lambda'' / \Lambda - v^* \Lambda' / \Lambda + \alpha = 0 \quad [86]$$

La solución de la primera es:

$$T = e^{-\alpha\tau} \quad [87]$$

Multiplicando la segunda por Λ/E^* y haciendo $\alpha^* = \alpha/E^*$ se obtiene

$$\Lambda'' - Pe\Lambda' + \alpha^* \Lambda = 0 \quad [88]$$

Teniendo en cuenta [82] y [83], la soluciones de esta ecuación deben satisfacer tambien las condiciones:

$$\Lambda(0) = 0 \qquad \Lambda(1) = 0 \quad [89]$$

Las únicas soluciones no triviales de este sistema corresponden al caso en que [88] tiene raíces complejas. Operando se obtiene:

$$\Lambda(\lambda) = B_n e^{p\lambda} sen\left(\lambda \sqrt{\alpha_n^* - p^2}\right) \quad [90]$$

siendo:

$$\begin{aligned} &p = Pe / 2 \\ &\alpha_n^* = \alpha_n / E^* = n^2\pi^2 + p^2 \end{aligned} \quad [91]$$

Por lo tanto, una solución general de la ecuación [81] sujeta a las condiciones de contorno [82a y b] será:

$$\varepsilon(\lambda, \tau) = e^{p\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n \tau} sen(n\pi\lambda) \quad [92]$$

Esta expresión nos permite ya dar respuesta a una de las cuestiones planteadas anteriormente. Concretamente, la de conocer la velocidad con la que las salinidades tienden a la solución en régimen permanente. En efecto, para un n dado, cualquiera que sea el valor de B_n el armónico correspondiente se amortiguará con el tiempo de acuerdo con la función $e^{-\alpha_n \tau}$. Las propiedades de este amortiguamiento exponencial son bien conocidas; así, por ejemplo, se sabe que cada vez que transcurre un tiempo

$$\tau_{1/2(n)} = (\ln 2) / \alpha_n$$

el armónico correspondiente se divide por la mitad. Si suponemos que el armónico más importante es el primero, el valor de $\tau_{1/2(1)} = (\ln 2)/\alpha_{(1)}$ nos dará una idea del tiempo necesario para que las diferencias entre las salinidades de una situación cualquiera y las del régimen permanente se reduzcan a la mitad. Como orientación diremos que para $E^* = 2 \cdot 10^{-4}$ y $v^* = 5 \cdot 10^{-3}$ (valores típicos del tramo central del Guadalquivir para un caudal de cabecera de 10 m³/s) resulta $\tau_{1/2(1)} = 22{,}6$ períodos de marea.

Los coeficientes B_n de la expresión [92] deben calcularse de forma que se satisfaga tambien la condición inicial [82c].

El problema se reduce, por lo tanto, a desarrollar en serie de Fourier de senos la función:

$$F(\lambda) = e^{-p\lambda} [f_0(\lambda) - f_\infty(\lambda)] \quad [94]$$

en el semirango (0,1). La solución puede encontarse en cualquier manual de matemáticas (por ejemplo, ref. [4]):

$$B_n = 2 \int_0^1 F(\lambda) sen(n\pi\lambda) d\lambda \quad [95]$$

Teniendo en cuenta [78] y [80], $F(\lambda)$ puede ponerse en la forma:

$$F(\lambda) = \sum_{m=1}^{4} \frac{e^{a_m \lambda}}{b_m} \quad [96]$$

siendo:

$$\begin{aligned} a_1 &= Pe_0 - p & b_1 &= e^{Pe_0} - 1 \\ a_2 &= -p & b_2 &= 1 - e^{Pe_0} \\ a_3 &= Pe - p = p & b_3 &= 1 - e^{Pe} \\ a_4 &= -p & b_4 &= e^{Pe} - 1 \end{aligned} \quad [97]$$

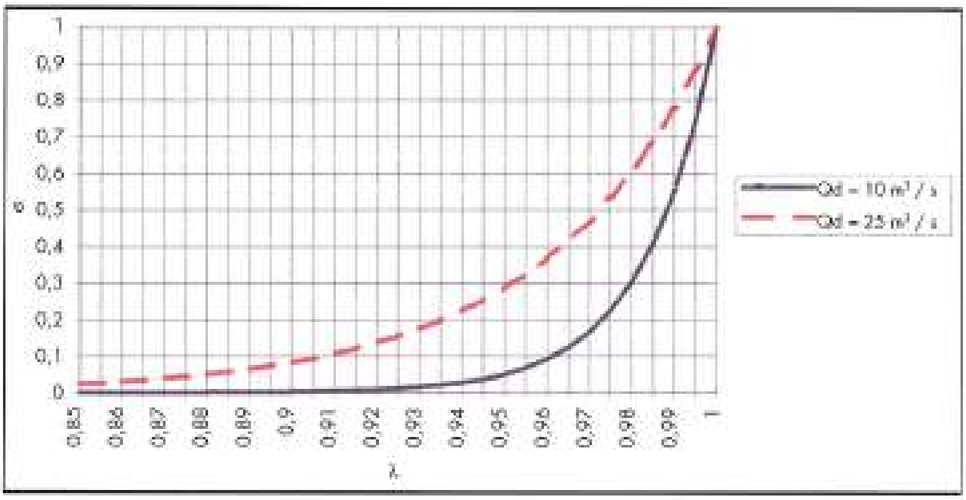


FIGURA 5. Aplicación al estuario del Guadalquivir: soluciones en régimen permanente para los caudales indicados.

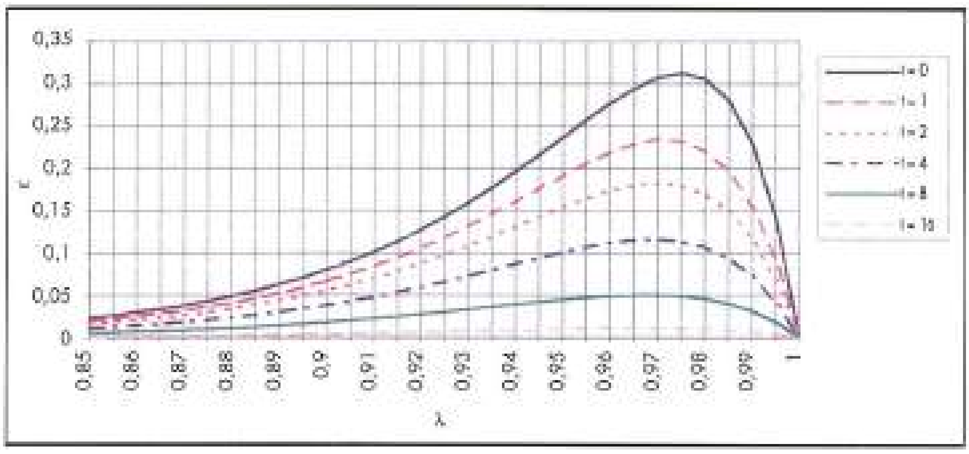


FIGURA 6. Aplicación al estuario del Guadalquivir: evolución temporal de las diferencias cuando el caudal de cabecera pasa de 10 m³ / s a 25 m³ / s.

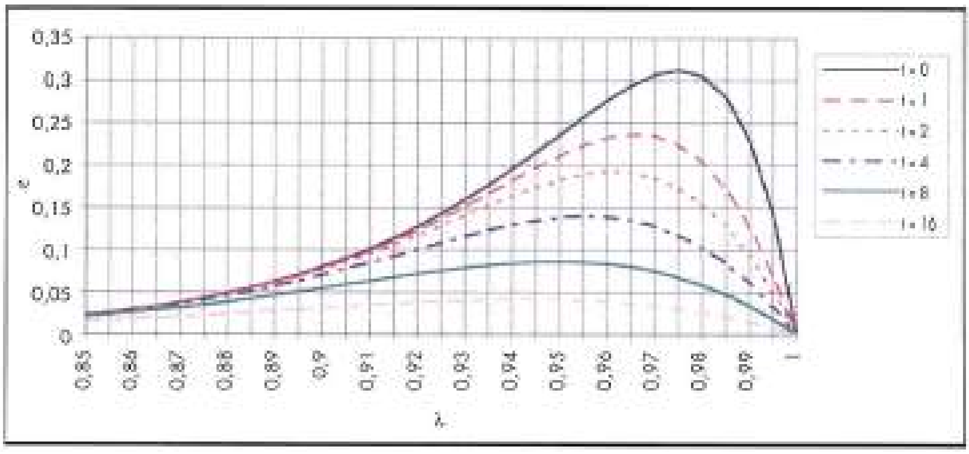


FIGURA 7. Aplicación al estuario del Guadalquivir: evolución temporal de las diferencias cuando el caudal de cabecera pasa de 25 m³ / s a 10 m³ / s.

y por lo tanto:

$$B_n = 2\sum_{m=1}^{4}\int_0^1 \frac{e^{\alpha_m\lambda}\,sen(n\pi\lambda)}{b_m}\,d\lambda = 2\sum_{m=1}^{4}\frac{[(-1)^{n+1}e^{\alpha_m}+1]\cdot n\pi}{b_m\,(\alpha_m^2+n^2\pi^2)} \qquad [98]$$

Obsérvese que para calcular los coeficientes B_n solo se necesita conocer los números de Péclet Pe y Pe_0, y no los valores de v^* y E^* por separado. Sin embargo, para calcular α_n' sí resulta necesario conocer E*. Además, si nos fijamos en [91b] podemos ver que para un mismo valor de Pe, α_n es proporcional a E^*, lo cual quiere decir que si se multiplican los coeficientes de dispersión por un factor, los tiempos necesarios para alcanzar el régimen permanente se dividen por el mismo factor.

Otra observación importante es que α_n crece con el cuadrado de Pe que, a su vez, es proporcional al caudal en cabecera. Una consecuencia inmediata es que el problema que hemos resuelto no es en absoluto conmutativo, es decir, si se parte de la solución correspondiente al caudal Q_1 y se aumenta éste hasta un valor Q_2, la nueva solución de equilibrio se alcanza más rápidamente que si partiendo de Q_2 se disminuyera el caudal hasta Q_1.

Como ejemplo de aplicación, se ha calculado la evolución de las salinidades en el río Guadalquivir cuando, partiendo de la situación de equilibrio para un caudal en cabecera de 10 m³/s, se pasa a un caudal de 25 m³/s, el cual se mantiene indefinidamente. A partir de los datos del segundo artículo de esta serie (ref. [2]) obtenemos para el primer caso:

$$E_0^* = 2\cdot 10^{-4} \quad v_0^* = 5\cdot 10^{-3} \quad Pe_0 = 25$$

y para el segundo:

$$E^* = 2\cdot 10^{-4} \quad v^* = 1{,}2\cdot 10^{-2} \quad Pe = 60$$

En la figura 5 se han representado las soluciones en régimen permanente para ambos casos en el tramo donde las diferencias son significativas. En la figura 6 se representa la función $\varepsilon(\lambda,T)$ para varios valores de τ cuando el caudal de cabecera pasa de 10 m³/s a 25 m³/s, y en la figura 7, cuando se pasa de nuevo a la situación anterior.

Debemos hacer notar que la serie [92] converge muy lentamente, y como consecuencia, son necesarios muchos términos para tener buenas aproximaciones. Como ilustración, en la tabla VI se dan algunos valores de B_n y las correspondientes desviaciones máximas calculadas respecto a la solución teórica, para el caso particular $\tau = 0$, en el cual [92] se convierte en [93].

n	B (n)·10¹⁵	Desviaciones máximas
1	2422,7	0,7002
6	953,1	1,1649
11	331,1	0,5364
21	70,2	0,1686
41	10,8	0,0320
81	1,4	0,0038

TABLA VI. Desviaciones máximas de la suma de los primeros n términos de la serie respecto a la solución teórica para el instante inicial.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea dar las gracias a Angel Lara Dominguez, Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos del Centro de Estudios Hidrográficos del CEDEX porque de él recibió el impulso para terminar esta serie de tres artículos.

NOTACIÓN

- σ : salinidad relativa ($\sigma = C_T / s_o$)
- C_T : salinidad promediada durante varios ciclos de marea
- s_o : Salinidad del agua del mar
- τ : tiempo adimensional ($\tau = t/T$)
- t : tiempo dimensional
- T : duración de un ciclo de marea
- λ : abcisa adimensional ($\lambda = x/L$)
- x : abscisa dimensional (distancia a la presa de cabecera)
- L : longitud del estuario
- v^* : velocidad adimensional ($v^* = vL/T$)
- v : velocidad dimensional ($v = Q_d / A_T$)
- Q_d : caudal de agua dulce en cabecera
- A_T : sección transversal promediada respecto a las mareas
- E^* : coeficiente de dispersión adimensional ($E^* = E_T T / L^2$)
- E_{xT} : idem dimensional promediado respecto a las mareas
- Pe : número de Péclet ($Pe = v^*/E^*$)
- Pe_o : ídem en la situación inicial
- $f_o(\lambda)$: distribución inicial de salinidades relativas
- $f_\infty(\lambda)$: solución en régimen permanente con las condiciones de contorno actuales
- $\varepsilon(\lambda,\tau)$: desviaciones de la salinidad actual $\sigma(\lambda,\tau)$ con respecto a $f_\infty(\lambda)$
- p : seminúmero de Péclet ($p = Pe/2$)
- α : constante de integración
- α_n : únicos valores posibles de α ($\alpha_n / E^* = n^2\pi^2 + p^2$)
- $\tau_{1/2(n)}$: tiempo necesario para que la amplitud del armónico "n" se reduzca a la mitad ($\tau_{1/2(n)} = ln\ 2/\alpha_n$)

REFERENCIAS

[1] RUIZ MATEO, A. (1987). *El problema del "tapón salino" en estuarios: I. Planteamiento y soluciones analíticas.* Ingeniería Civil nº 64.

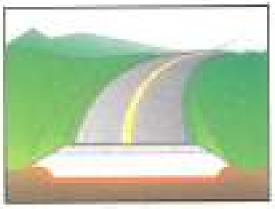
[2] RUIZ MATEO, A. (1988). *El problema del "tapón salino" en estuarios: II. Soluciones numéricas en régimen permanente.* Ingeniería Civil nº 65.

[3] TIJONOV, A. y SAMARSKY, A. (1980). *"Ecuaciones de la Física Matemática"*, p. 227 Mir.

[4] SPIEGEL, M. R. (1968). *"Mathematical Handbook"*, p. 131 Mc Graw Hill.

El mundo entero construye sobre Polyfelt

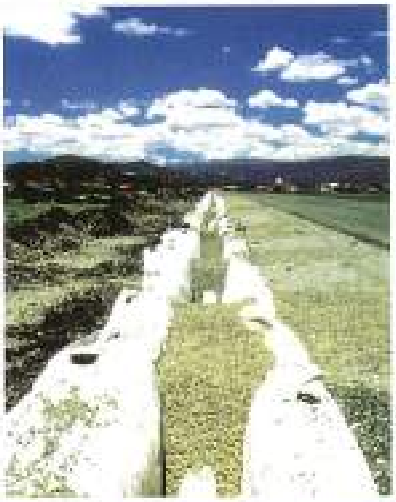
Geotextiles Agujados de *Filamento Continuo*

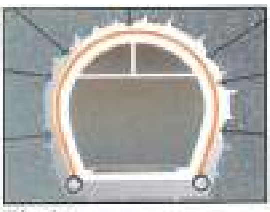


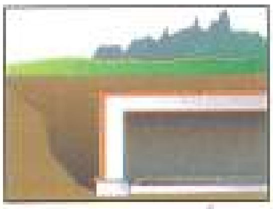
Construcción de carreteras

Terraplenes

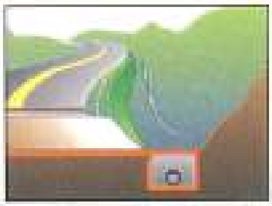
Vías férreas



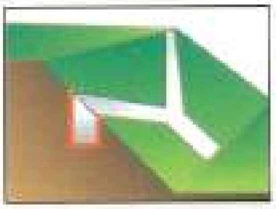




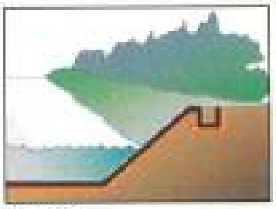
Túneles



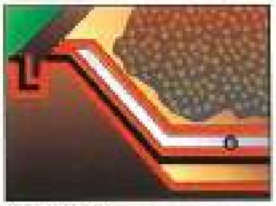
Zanjas de drenaje



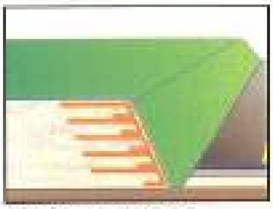
Drenaje de taludes



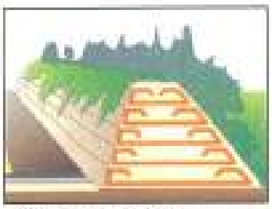
Canales



Vertederos



Refuerzo de taludes



Barreras antirruido

reconocidos expertos en Geosintéticos

Polyfelt Geosynthetics Iberia, S.L.
c/ Azalea, 1, Edificio E - 2.ª
Miniparc 1 - El Soto de la Moraleja
28109 Alcobendas (Madrid)
Telfs.: (91) 650 63 18 - 650 64 61
Fax: (91) 650 98 28

polyfelt®
Polyfelt Gruppe