

Análisis estructural de puentes de arcos de fábrica. Modelo de equilibrio

JOSÉ ANTONIO MARTÍN-CARO; JAVIER LEÓN GONZÁLEZ; HUGO CORRES PEIRETTI (*)

RESUMEN Los puentes de fábrica forman un importante grupo dentro de la red estatal de carreteras española. Este artículo pretende señalar la importancia del análisis estructural de los puentes arco de fábrica, a través de una breve recapitulación de los diferentes métodos existentes hasta la fecha. Asimismo, se muestran los resultados obtenidos con un programa de ordenador desarrollado por los autores y basado en los estudios de Heyman sobre la formación de mecanismos, que pretende estimar la carga última de rotura. En él se da lugar a la intervención de las principales variables que inciden en el comportamiento estructural del puente.

Se ha puesto de relevancia, mediante un somero estudio de sensibilidad, la importancia relativa de las variables anteriormente citadas. Al mismo tiempo se pone de manifiesto el grado de precisión del método, comparando los resultados obtenidos con el programa (método de equilibrio) y los resultados obtenidos con los diversos métodos mencionados, incluyendo los resultados de los ensayos de rotura realizados por el TRRL (Transport and Road Research Laboratory) sobre un grupo de cinco puentes.

Por último se citan las ventajas y desventajas del método, indicándose posibles vías para su mejora.

STRUCTURAL ANALYSIS OF MASONRY ARCH BRIDGES. BALANCE METHOD MODEL

ABSTRACT *Masonry arch bridges form an important part on the roads network of Spain. This paper intends to underline the importance of the structural analysis of masonry arch bridges, through a brief recapitulation of the different methods currently existing. Results of the ultimate load obtained with a simple computer program developed by the authors and based on Heyman's studies on collapse mechanisms, are presented. The program considers the main variables that are involved in the structural behaviour of masonry arch bridges.*

There has been an attempt to point out the relative importance of the variables previously mentioned by a simple sensitivity analysis. In addition, the different results obtained in five different bridges with the various methods presented, including the ultimate load reached during the test performed by the TRRL (Transport and Road Research Laboratory), are compared with the program's results in order to define the accuracy of the program.

Finally, advantages and disadvantages are referred, as well as future vias of improvements.

Palabras clave: Puentes arco; Fábrica; Análisis estructural.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. NECESIDAD

La fábrica, tanto de piedra como de ladrillo, es el material compuesto más antiguo que existe, y es también el más numeroso en la mayoría de los países de nuestro entorno. El carácter monumental de los puentes de piedra es también conocido y apreciado en muchos casos, y no tanto en otros, resultando ya obvia (actitud que denota un notable progreso en la mentalidad de la sociedad) la necesidad de conservar en correcto estado de uso tanto la red de carreteras como la ferroviaria, dentro de las cuales las estructuras de fábrica forman un importante grupo no sólo cualitativo sino también cuantitativo. Baste decir que el 40% de los puentes de la red estatal española de carreteras son de fábrica.

El tratamiento de estas singulares estructuras debe ser contemplado desde un punto de vista general, englobando por tanto diversas ciencias, dentro de las cuales el aspecto estructural no puede ser olvidado. A pesar de haber sido arquitectos (hasta el siglo XVIII) e ingenieros los autores de estas obras, llama poderosamente la atención el desconocimiento que de estas estructuras tienen los ingenieros actuales.

En la mayoría de los casos, estas estructuras, que se crearon para satisfacer necesidades concretas del momento en que se construyeron, están siendo utilizadas para dar paso al tráfico moderno, lo que conlleva la construcción de plataformas (ampliadas con muy desigual fortuna) y el consiguiente aumento de la carga permanente, más el notable aumento de las sobrecargas. Desde el punto de vista estructural muchos proyectistas han venido confiando en el enorme coeficiente de seguridad que presentan estas estructuras (debido a la gran preponderancia de las cargas permanentes), efectuando análisis simplificados (o no tanto) pero con validez casi nunca contrastada. A título de ejemplo, rara vez se tiene en cuenta el estado real de la estructura, como

(*) ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid.



FIGURA 1. Puente de Valnusa.

punto de partida, ni la degradación producida durante los años de vida de la estructura en cuestión, cuyo deterioro se ha visto acelerado en los últimos años por causas diversas.

Con herramientas contrastadas que permitan conocer los mecanismos de comportamiento y estimar con razonable aproximación el nivel de seguridad de estas estructuras, el técnico que ha de abordar estas tareas estaría en condiciones de dar una respuesta más en consonancia con el grado de precisión con que se resuelven otros problemas en la ingeniería estructural, es decir, con un mayor y mejor grado de conocimiento y reducción de gastos: *analizar lo máximo para intervenir lo mínimo* como asegura L. M. Ortega Bassigóiti [33].

En este trabajo se plantea inicialmente como objetivo encontrar la configuración pésima de cargas que delimite superiormente la carga máxima que la estructura puede soportar, tanto en términos de mecanismo de colapso como conjunto de sólidos rígidos, como de agotamiento por superarse un determinado nivel tensional.

1.2. ESTUDIOS ANTERIORES

Panorámica general

Los puentes de fábrica, en su forma arco, se han venido utilizando en las civilizaciones tempranas de Mesopotamia, Nilo y Asia Central desde finales del tercer milenio antes de Cristo. Su desarrollo y evolución a lo largo de la historia ha sido enorme, dejando numerosos ejemplos. Este desarrollo de la fábrica no se ha visto acompañado de un conocimiento teórico de la misma hasta el siglo XVIII, alcan-

zando la cumbre de su desarrollo a comienzos del siglo XX, destacando la monumental obra de Séjourné [83]. Debido a la irrupción masiva del hormigón y, aún antes del acero, los puentes de fábrica de nueva planta dejaron de construirse, decayendo con ello el saber hacer y el conocimiento del comportamiento de los puentes de fábrica. A finales del siglo XX, como queda dicho, el conocimiento del comportamiento de los puentes de fábrica se reduce a unos pocos especialistas. Esto contrasta con el avanzado estado del conocimiento de otras tipologías, que si bien son utilizadas profusamente en la actualidad, su importancia en conjunto es equiparable a la de la fábrica tanto en sus aspectos técnico-científicos, económicos y culturales (gran parte de los puentes de fábrica están catalogados dentro del Patrimonio Histórico Nacional).

Las primeras noticias que se tienen sobre el análisis científico-técnico y diseño de los arcos de fábrica datan de finales del siglo XVII y principios del XVIII (La Hire, 1697, 1712; Couplet, 1729-30). Estos primeros análisis tratan tanto aspectos teóricos como experimentales de la línea de presiones y de posibles mecanismos de colapso. En 1697 se menciona la catenaria por primera vez como posible directriz del arco (Gregory). Las teorías de Couplet son recogidas y ampliadas por Coulomb, pero no es hasta 1833, cuando Navier enuncia la regla del tercio central, obligando así a la línea de presiones a circular por el tercio central del arco, para evitar las tensiones de tracción. Rankine (1898) fue el primero en darle una aplicación práctica siendo Barlow [4] y Fuller los encargados en desarrollar la parte gráfica de la línea de presiones. En 1879 Castigliano abre una nueva vía para el análisis de los arcos de fábrica, dando entrada al análisis elástico vía planteamientos energéticos de mínima energía; en los cálculos, las partes del arco que se encontraban en tracción eran suprimidas, repitiéndose el análisis con la nueva geometría.

Mecanismos de colapso y teorema de la mínima energía constituyen hoy en día (150 años después), las únicas referencias sencillas y fiables en el acercamiento al análisis en agotamiento de los arcos de fábrica [25], [34]. El Método de los Elementos Finitos carece todavía de una fiabilidad aceptable como se verá posteriormente.

Hasta ahora se ha venido mencionando el arco como componente único del puente, lo que lleva a una subestimación estructural del mismo, pues el relleno, los tímpanos, las alas, diafragmas y otros posibles rigidizadores vienen a contribuir a aumentar la capacidad portante de la estructura. La importancia del relleno es ya mencionada por Rankine, Alexander y Thomposon, a principios de este siglo, distinguiendo la diferente contribución estructural del relleno según su constitución. También se menciona la diferente importancia del relleno según las distintas directrices del arco llegando a tratar los arcos semielípticos como arcos hidroestáticos (arcos construidos según una directriz antifunicular de una presión de la misma intensidad en todas las direcciones). Desgraciadamente muchos de los otros fenómenos anteriormente citados no aparecen ni mencionados. En otros casos, su inclusión en los modelos de comportamiento estructural no presenta una fiabilidad aceptable.

Pippard y el primer planteamiento energético

Pippard, Chitty y otros colaboradores han venido contribuyendo significativamente desde mediados del siglo XX al análisis estructural de los puentes de fábrica [36], [37]. Aunque su trabajo engloba tanto el campo experimental como el de los mecanismos de colapso, su mayor aportación se centra en el planteamiento elástico. Pippard plantea un método ba-

sado en un análisis elástico donde se limita la tensión de compresión de la fábrica y se pasa de la regla del tercio central a la de la mitad central. El trabajo experimental llevado a cabo había demostrado que la condición del tercio central era excesivamente restrictiva, ya que obligar a la línea de presiones a circular por el tercio central del arco daba como resultado cargas más bajas que las obtenidas experimentalmente. Posteriormente, Pippard y sus colaboradores desarrollaron un procedimiento que englobaba también los mecanismos de colapso analizados en el siglo anterior por Coulomb y Couplet. Aunque este último procedimiento no se denominó nunca como de análisis plástico, dejaba el camino libre para que Heyman, años después, planteara su análisis límite de la fábrica realizando casi las mismas hipótesis de partida.

Heyman y el planteamiento del equilibrio límite

El análisis plástico se ha venido desarrollando a lo largo de los últimos dos siglos principalmente, acelerándose a raíz del planteamiento del mismo para puentes metálicos. En los arcos de fábrica, a partir del planteamiento elástico de Pippard, se pasó a una interpretación última de la línea de presiones. Los métodos plásticos buscan configuraciones de cargas que transformen la estructura en un mecanismo mediante la formación de las rótulas necesarias [5], [29], [24]. Éstas se formarán cuando la línea de presiones sea tangente al arco, ya que no puede salir del mismo. En este análisis se realizan las siguientes hipótesis (Heyman):

- La fábrica tiene una resistencia a compresión infinita: $\sigma_{compresión} = \infty$.
- La fábrica no admite tracciones: $\sigma_{tracción} = 0$.
- Se considera que la fábrica es un sólido indeformable: $E = \infty$.
- No existe deslizamiento, ya que aunque la resistencia al mismo sea baja, la línea de presiones es casi perpendicular a la superficie de deslizamiento en aparejos buenos.
- Los estribos proporcionan una rigidez infinita.

- Se plantea sobre un ancho unidad de bóveda (no se cuenta con la contribución de los tímpanos ni se considera el efecto del reparto transversal).

Estas hipótesis culminan con la formulación de los teoremas del límite superior e inferior:

Límite superior: Siempre que sea posible encontrar una línea de presiones en equilibrio con las cargas exteriores, interior al espesor del arco éste será estable, sin necesidad de que esta configuración sea la real.

Límite inferior: Si es posible encontrar una línea de empujes que represente un estado de equilibrio para la estructura sometida a la acción de determinadas cargas exteriores, que se encuentre dentro del arco y que permita la formación de suficientes articulaciones para transformar la estructura en un mecanismo, la estructura estará a punto de colapsar.

Una vez que se ha llegado a la formación de las rótulas, la carga se obtendrá planteando el equilibrio del sistema, es decir, tomando momentos en las rótulas y efectuando la suma de fuerzas horizontales y verticales.

Métodos de análisis energéticos en puentes de fábrica

Castigliano primero y Pippard y Heyman después han dado pie a la formulación de los métodos más comunes de análisis de puentes de fábrica. Crisfield y Packman, trabajando para el TRRL¹, desarrollaron un procedimiento de cálculo de la carga mínima *Método del Mecanismo Modificado* en el que se busca la carga de mínima energía [1] [12]. Se transformará el arco en una estructura isostática mediante la formación de las rótulas necesarias. Posteriormente, se dará un desplazamiento vertical unidad en el lugar de actuación de la carga (coincidiendo siempre con la ubicación de una de

¹ TRRL (Transport and Road Research Laboratory), organismo que se viene ocupando del mantenimiento y conservación de la red de carreteras y ferroviaria del Reino Unido.



FOTO 2. Puente de Castro.

las rótulas), por último y haciendo uso del teorema de los trabajos virtuales, se calculará el trabajo virtual. La carga mínima será, por tanto, la que se obtenga del trabajo virtual mínimo. En este método se cuenta con la contribución del relleno y con el trabajo a compresión en las rótulas; por el contrario no cuenta con la rigidez adicional de los tímpanos, ni evalúa el grado de empotramiento de los estribos.

$$P + \Delta P + V1 \Delta_1 = V2 \Delta_2 + V3 \Delta_3 + Hf \Delta_f + \\ + \frac{1}{2} \sigma_n \Delta \theta_n + \frac{1}{2} \sigma_t \Delta \theta_t + (1 + \Delta \theta_2) + \\ + \frac{1}{2} \sigma_r \Delta \theta_r + \frac{1}{2} \sigma_s \Delta \theta_s$$

Posteriormente, en 1995, Gilbert y Melbourne [29] mejoraron notablemente este método. Se plantea un análisis de las estructuras de fábrica a través de la interpretación de los movimientos de las dovelas como sólidos rígidos. Siguiendo con el principio de la mínima energía se procede a una discretización del arco mucho más precisa y se contempla también la rigidización de los tímpanos, estribos, fenómenos de separación de diferentes hiladas, puentes de varios arcos, sin más que introducir las ecuaciones de compatibilidad necesarias entre los diferentes elementos.

Método de los Elementos Finitos

Durante los últimos 15 años se han publicado numerosas artículos en los que se intenta una aproximación al problema estructural de los arcos de fábrica mediante una herramienta tan poderosa como es la de los Elementos Finitos. Pero, a pesar del esfuerzo (improbo y del trabajo concienzudo que se ha venido desarrollando desde Sawko y Towler, hasta Choo y Yang [10], [11], pasando por Loo y Crisfield [13], [14], [15] hoy en día sigue siendo más bien un método en desarrollo con escasa validez práctica.

Otras ventajas añadidas de los elementos finitos, en su formulación más potente, son:

- El poder representar la fisuración (apertura de juntas) sin necesidad de duplicar cálculos, sin más que adoptar

un criterio de no-tracción en la fábrica. La microfisuración de la fábrica por excesiva compresión también puede y debe ser tenida en cuenta [11], [32].

- Los fenómenos de no linealidad geométrica, que hasta entonces eran ignorados (si bien es verdad que en la mayoría de las ocasiones las deformaciones apenas son perceptibles, por lo que su influencia en la geometría inicial puede despreciarse).
- La inclusión de criterios de rotura de suelos, que pueden adoptarse para el relleno (Mohr-Coulomb o Drucker-Prager) [15], [18].

No hay duda de que el futuro de esta herramienta es tan prometedor que podrá llegarse a una modelización completa de la estructura, un acercamiento en 3-D que permitirá tener en cuenta las variables más importantes: relleno, tímpanos, estribos, parapetos, aletas, etc. Hasta ahora se han venido utilizando modelos 1-D [10], en 2-D [14] y por último el planteamiento del problema en 3-D se ha utilizado en ciertas ocasiones para el análisis concreto de una variable, o para el análisis local de una parte de la estructura (cimentación), pero sin llegar a poder formular, hoy por hoy, un modelo general.

Trabajo experimental

Hasta la fecha, la mayor parte de los ensayos han sido realizados por los británicos a través del citado TRRL, principalmente [20], [21], [30], [35]. Éstos han servido para contrastar los métodos y programas que se iban desarrollando. Hendry ha desarrollado al mismo tiempo que los ensayos a escala real, una campaña de ensayos en modelo reducido en los que se pone de manifiesto la importancia de ciertos fenómenos como la rigidización debida al tímpano o la separación de las diferentes rosas. El peso que se le da todavía a estos resultados experimentales es muy grande, lo que deja entrever el grado de desconocimiento que se tiene de los puentes de fábrica (dicho sea en tono elogioso, por cuanto tiene de pragmático y prudente).

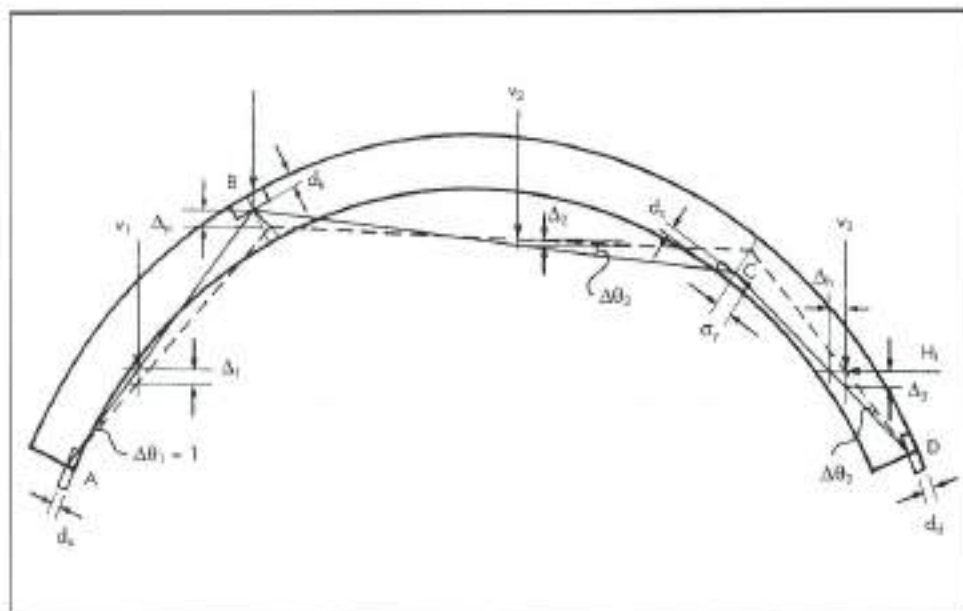


FIGURA 2. Art. "A mechanism program for computing the strength of masonry arch bridges". Crisfield y Packham.

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE EQUILIBRIO LÍMITE INFERIOR

2.1. DEFICIENCIAS DEL CÁLCULO ELÁSTICO

El planteamiento en estos casos de un cálculo elástico con modelos de estructuras de barras presenta deficiencias más acusadas que en otras tipologías, con un grado de complejidad e incertidumbre alto. Entre otras razones se encuentran las siguientes:

- Modelización geométrica difícil, especialmente en las zonas de arranque, que hace restar validez a la representación mediante barras de elementos volumétricos masivos.
- Difícil caracterización de las propiedades mecánicas, empezando por el módulo de deformación longitudinal E , de muy difícil caracterización apriorística, si bien es preciso acercarse hoy en día a este valor mediante ensayos como el de los gatos planos [1], [2], [23], [26]. Unido a este problema está el de la caracterización de parámetros como el área y, sobre todo, la inercia, que suelen partir de secciones brutas (no fisuradas) y que deberían modificarse a medida que se produzcan separaciones en las juntas (análisis no lineal).

Otra dificultad adicional que presenta el análisis de estos arcos estriba en conocer la configuración resistente actual. Es frecuente que a lo largo de la vida de la estructura se produzcan movimientos en la cimentación. Un corrimiento de unos pocos centímetros en los arranques de un arco biempotrado supone un aumento de luz, un descenso en clave y, muy probablemente la formación de tres rótulas, pasando de una posible configuración hiperestática de 2º orden a una estructura isostática. Muchas veces esto sucede desde el momento del descimbrado.

Por todas estas razones se ha dicho que el plantear las ecuaciones de compatibilidad del análisis elástico carece de sentido. En definitiva debido a la dificultad que entraña conocer la configuración resistente en cada momento (evolución de la línea de presiones), realizar un análisis elástico presenta menos ventajas que inconvenientes, salvo en casos

particulares donde sea necesario un estudio más preciso o se quiera evaluar el comportamiento en servicio, y aún en tales casos será preciso tener en cuenta de alguna forma estas hipótesis de partida.

2.2. MODELO PLANTEADO

Para la evaluación de la capacidad última de los puentes arco de fábrica, se ha planteado un modelo de cálculo que permita tener en cuenta los efectos más importantes que *a priori* concurren en su estudio. El modelo desarrollado está basado en la teoría de los mecanismos de colapso, comentada más arriba y desarrollada principalmente por Heyman. En el modelo se contempla la formación de 4 rótulas en un arco biempotrado, hasta la transformación del mismo en un mecanismo bajo la acción de las cargas permanentes y la de una carga puntual. El método de cálculo se basa simplemente en plantear las ecuaciones de equilibrio en un arco una vez formadas las cuatro rótulas, donde dada una posición de la carga puntual se obtendrá el valor de la misma y el de las reacciones para que cumplan equilibrio. El objetivo no es otro que el obtener la carga mínima que hace colapsar el arco en cuestión, por ello se debe buscar la configuración pésima de rótulas. El programa desarrollado hace variar la ubicación de las rótulas, manteniendo una debajo de la carga puntual y calculando en cada uno de los casos la carga en equilibrio con el sistema. Al final del proceso la carga condicionante es la mínima.

Es importante tener en cuenta que lo que realmente se está obteniendo al utilizar este procedimiento, es la carga mínima y no la carga que produce el trabajo mínimo.

Descripción geométrica

La discretización del puente es sencilla como se puede ver en la Fig. 3. Se divide el conjunto en 4 partes longitudinalmente iguales ($L/4$), tomando para cada una de ellas un ancho unidad (se desprecia el reparto transversal). Los parámetros geométricos necesarios para definir el puente son pocos, la luz (L), la altura en clave (h_c), la altura en rítores (h_r), espesores del arco en arranques (t) y en clave (e) y por último el espesor del relleno en clave (h_o). Se ha utilizado la nomenclatura

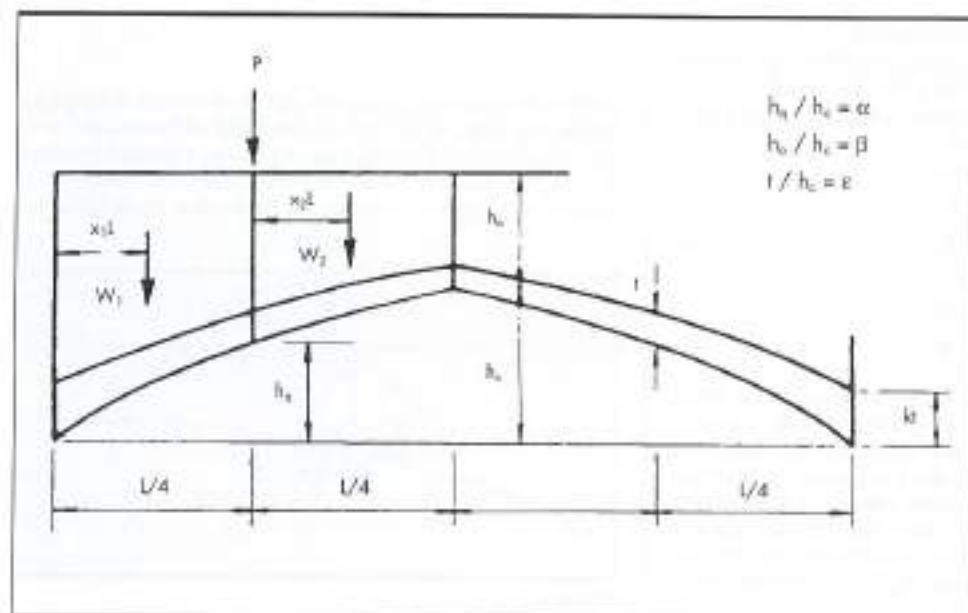


FIGURA 3. libro "Estructuras de fábrica" Heyman.

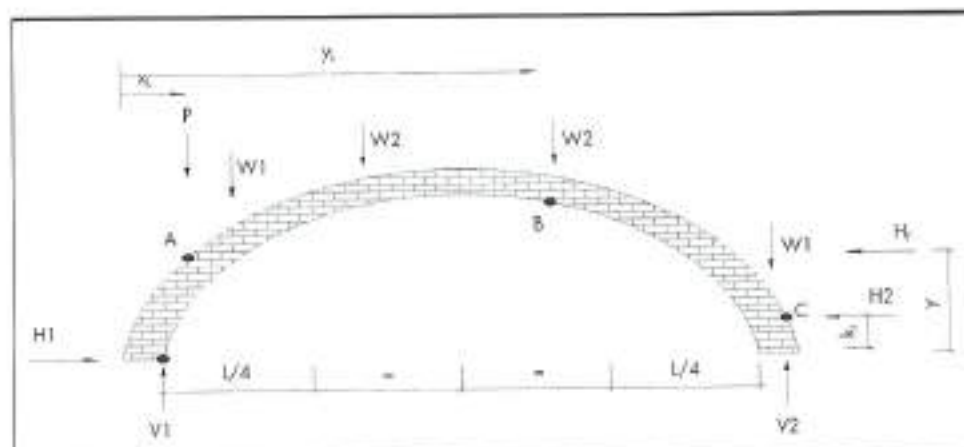


FIGURA 4.

tura que aparece en los artículos de Heyman y que se indica en la figura 3. Por otra parte, el programa en sí, crea una serie de variables adicionales. En cuanto a los parámetros mecánicos tan sólo se necesita el peso específico (γ), que se supone el mismo para relleno y rosca. Esta discretización geométrica tan sencilla tiene sus ventajas e inconvenientes. Dentro de las primeras está la simplicidad de entrada de datos y es muy útil cuando no se tienen demasiados datos geométricos de la estructura. Como inconveniente principal, el no poder distinguir muchas veces entre directrices similares.

Ubicación de las rótulas. Dos de las rótulas se fijan en un principio en los arranques del arco, una de ellas en el intradós y la otra en el trasdós (como se verá posteriormente el modelo permite la variación de estas rótulas en arcos muy peraltados o en aquellos en los que se pueda contar con un relleno rígido). La posición de las dos rótulas restantes varía a lo largo de la longitud del arco, estando una de ellas debajo de la carga puntual aplicada (posición que viene marcada por el parámetro xL , donde x es adimensional) y que va recorriendo la mitad izquierda del arco. La posición de la otra rótula recorre la mitad derecha y marca su posición el parámetro yL (y es también adimensional y como x , está comprendida entre 0 y 0.5). Para cada configuración de rótulas se hallará la carga puntual aplicada planteando equilibrio en el arco como se indica en la figura 4.

Los pesos de las partes del arco son $W1$, $W2$ (hay simetría con respecto al eje vertical central), $H1$, $V1$, $V2$, $H2$ son las reacciones en los apoyos. Por último quedan la carga puntual P y la reacción del relleno Hf .

Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_c &= 0\end{aligned}$$

Dependiendo de la situación de las rótulas y de la carga puntual, pueden plantearse 4 casos diferentes en cuanto a los términos que aparecen en las ecuaciones de equilibrio. Por último la carga se obtiene para un ancho unidad del arco, no teniéndose cuenta el reparto transversal (en ocasiones los arcos son casi bóvedas al tener más anchura que luz y el reparto transversal sí debería tenerse en cuenta). La carga total se obtiene multiplicando la P_{min} obtenida con el programa por la anchura total del puente.

Modificaciones

Reparto de la carga a través del relleno

Aunque no se tuviera en cuenta el relleno estructuralmente, se debería tener en cuenta el efecto de reparto a través de él. Como se ve en la Fig. 5 una carga puntual aplicada en la su-

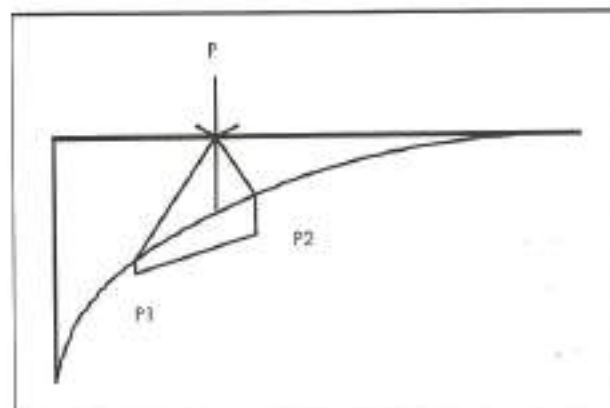


FIGURA 5.

perficie de rodadura, se supone que se distribuye triangularmente a lo largo del terreno hasta llegar al trasdós del arco. En la fig. 5 se ha admitido que $p1$ y $p2$ sean proporcionales a la profundidad, y la variación entre ellas será lineal. En el modelo para tener en cuenta este efecto (Fig. 6), se halla pri-

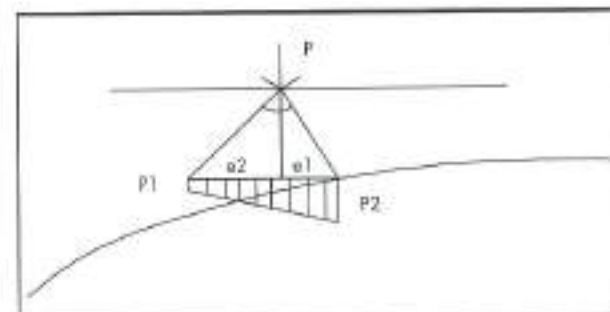


FIGURA 6.

mero el valor $e1$ considerando un semiángulo de distribución 1. Se hace la simplificación de considerar la línea de carga como horizontal y se calcula $e2$, $p1$ y $p2$ para que la suma de fuerzas considerando una variación lineal entre $p1$ y $p2$, sea igual a P y los momentos resultantes en el punto de aparición de la rótula (en la vertical de la carga P) sea 0. Además, deberá prefijarse también un factor que relacione $p1$, y $p2$. (Fig. 6).

Como puede verse en la Fig. 6, el semiángulo 2 es diferente al 1, siendo este último el resultado de ajustar, como se ha dicho, los restantes parámetros.

Cuando la carga esté aplicada cerca de los arranques del arco, debido a este reparto triangular, parte de ella será recogida directamente por la cimentación. Si no se tiene en cuenta este efecto, los resultados de la $P_{mín}$ cerca de los arranques se ven falseados en gran medida, dando unas cargas excesivamente bajas como se verá posteriormente.

Contribución del relleno

La contribución del relleno es notoria, pero para contar con sus efectos hay que cerciorarse de su existencia y de su estado. Para arcos peraltados, como los circulares, la cuantificación de este efecto resulta decisiva, pues si no fuera tenido en cuenta las cargas de colapso saldrían excesivamente bajas. Este efecto del relleno se modeliza mediante una fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad del trapecio de empuje que representa la reacción del relleno sobre el arco cuando este se desplaza hacia él. Esta reacción horizontal (H_f de la Fig. 4) simula el empuje pasivo, el empuje al reposo, o el empuje activo según el sentido y la magnitud del movimiento.

El coeficiente de empuje viene dado por:

$$k_p = (1 + \operatorname{sen}(\varphi)) / (1 - \operatorname{sen}(\varphi)) \quad \varphi = \text{ang. de roz. del relleno}$$

$$h_p = 1$$

$$h_q = 1 - \operatorname{sen}(\varphi)$$

Como se verá posteriormente, la contribución del relleno es definitiva en algunos casos, si bien es verdad que para cuantificar este efecto se debe asegurar un movimiento real entre arco y relleno.

Relleno rígido

En ciertas ocasiones, cerca de los estribos, el relleno puede encontrarse muy compactado debido al proceso constructivo, (muchos de estos arcos fueron construidos por voladizos sucesivos y aún en el caso de que fueran construidos mediante

cimbra, sólo se utilizaba ésta en su tramo central, apoyándose la construcción provisional en los extremos de estos puentes ya construidos y compactando en gran medida el terreno (relleno), o por estar formado por mampuestos rocosos (Fig. 8). En ambos casos el puente resultante reducirá el ángulo de desarrollo del arco α , comportándose más como dos voladizos con un tramo central en arco, que como un arco completo (Fig. 7). Para contar con esta reducción del arco en el modelo se elevaran las rótulas de los arranques un ángulo adecuado a la directriz del puente y a la rigidez del relleno. Ejemplos de la construcción cantilever, son los puentes romanos de Pont d'Augusto, Severus Bridge, Pont sur Laye, Ponte d'Arli y Puente Bibey.

3. ESTUDIO DE SENSIBILIDAD

Se ha realizado un estudio somero de la sensibilidad de los parámetros que a priori tenían cierta importancia dentro de la estructura. Para ello se ha calculado la carga mínima con el programa desarrollado para cada uno de los casos resultantes al variar dichas variables.

Los gráficos utilizados en la presentación de los resultados, marcan en ordenadas la carga mínima dividida por el peso del puente², para hacerla adimensional. En el eje de abscisas se representa el parámetro x , adimensional que señala la posición de la carga puntual y de una de las rótulas en la mitad izquierda del arco. La ubicación de la rótula que circula por el lado derecho se fija para cada gráfico, siendo esta posición normalmente la pésima (ej. arcos circulares: $y = 0,76 \times L$).

3.1. VARIABLES GEOMÉTRICAS

• Directriz

Las directrices de los arcos presentan infinitas posibilidades arcos circulares, parabólicos de segundo orden, parabólicos de tercer orden, elípticos, semielípticos, estenariños, escarbanos, botareles, etc. Todas estas tipologías se pueden reagrupar en dos grandes categorías, debido al tiempo de análisis que se hace con este modelo y a la pobre discretización geométrica, anteriormente comentada, arcos peraltados y arcos rebajados, fijando la frontera en una relación flecha/luz de 1/3.5, que es la aceptada normalmente, aunque no existe un valor standard.

² El peso del puente comprende arco, relleno y timpanes calculado con la misma densidad para los tres elementos.

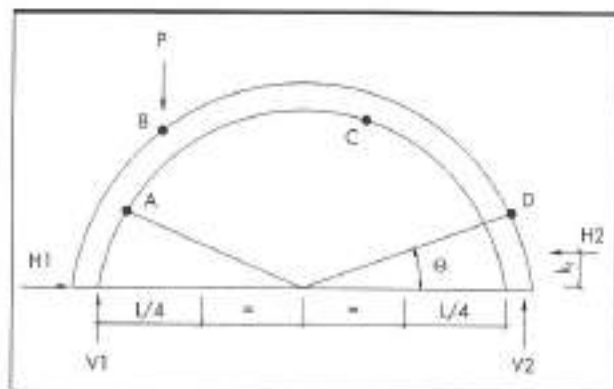


FIGURA 7.

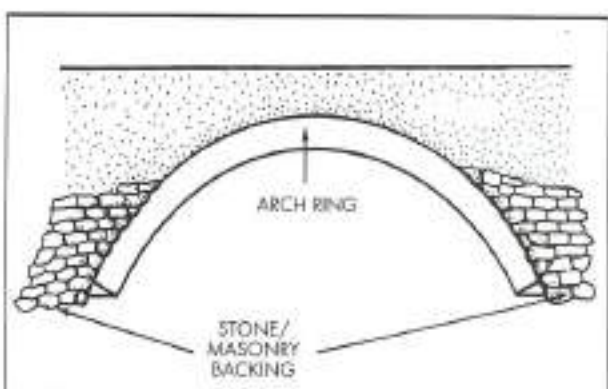


FIGURA 8.

Dentro del primer grupo se ha escogido un arco circular como elemento más representativo del conjunto, por su abundancia. En concreto se ha tomado el segundo arco del puente del Torrent de Valencia, de 6 m de radio.

Del segundo grupo se ha tomado una directriz parabólica del libro "Puentes de Fábrica y Hormigón Armado" Tomo III de Ribera, dando los espesores aconsejados en el mismo libro.

	L	hc	hq	hc	ct	lt	σ	α
ARCO CIRCULAR	12	6	5.1962	1.2	0.9	1.036	30°	20°
ARCO PARABÓLICO	12	3	2.6	1.2	0.9	1.036	30°	20°

ct, representa el ángulo de reparto de carga a través del relleno.
q, es el ángulo de roz. interno del relleno.

TABLA I.

Se ha tomado un peso específico en ambos casos de $\gamma_p = 1.87 \text{ Mp/m}^3$ y el empuje activo del relleno.

Del análisis realizado se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1. Los efectos de reparto de carga en el segundo tipo de puentes tiene menor incidencia que en el primero.
2. En el segundo grupo hay que tener cuidado si se quiere tener en cuenta una disminución del ángulo de desarrollo (relleno rígido), ya que al elevar las rótulas para simular este efecto, se puede reducir el arco a una viga de resistencia infinita, en el caso de que en el tramo que quede como arco sea imposible la formación de las rótulas

debido a que siempre sea posible encontrar una línea de presiones que sólo toque el contorno del arco en un punto.

En los arcos rebajados el efecto del empuje al reposo es cuantitativamente menor, pero no cualitativamente. Como se puede ver en las figuras 9 y 10 la configuración de rótulas para la carga mínima en el caso del arco parabólico es distinta que para el circular ($y=0.5$, $y=0.76$, respectivamente). Esto es debido a una subestimación de la respuesta estructural del puente en el caso del arco parabólico debido a una cuantificación errónea del empuje del relleno. Resumiendo, el no precisar el empuje del relleno en los arcos rebajados no lleva, no sólo a una subestimación de la carga mínima, sino a una configuración pésima equivocada.

• Luz

La luz, como variable, se encuentra en los términos de la matriz de equilibrio de forma lineal. La evolución de la carga mínima con la luz, es por tanto, fácilmente predecible. Tomando el caso del arco circular, fijando la rótula derecha a $0.76L$ del arranque izquierdo, y obteniendo la carga mínima para las diferentes posiciones de la misma, para tres luces diferentes, 10, 14, 16, se llega a los resultados que se indican en la figura 11, como puede verse, para variables de diseño con valores normales, la variación de la luz supone un desplazamiento vertical de la gráfica P_{min}/x_p una magnitud directamente relacionada con la luz. Fig. 11.

• Espesores

Antes de entrar en el estudio, es obligado comentar que en un análisis límite de equilibrio, el espesor del anillo no tiene tanta importancia como pueda parecer a priori, ya que es contabilizado como variable geométrica. En las conclusiones se llama la atención sobre este aspecto. Teniendo en cuenta

FIGURA 9. Carga mínima. Rótula derecha $y = 0.5$.

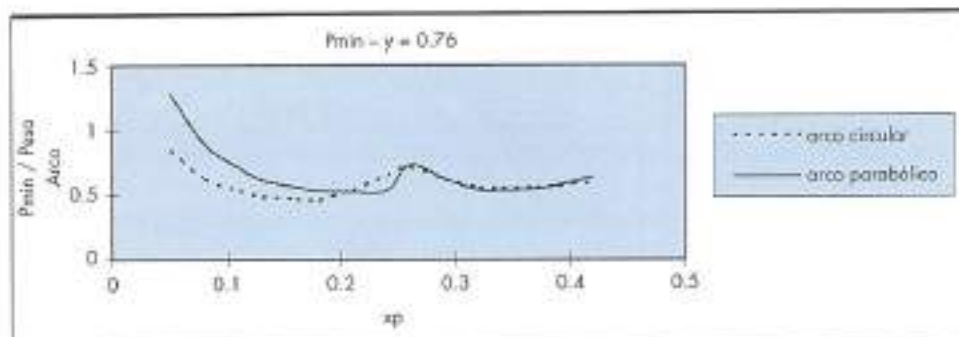
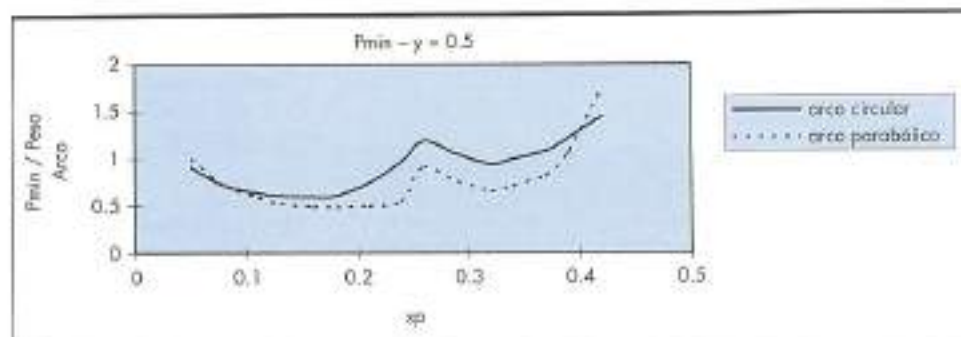


FIGURA 10. Carga mínima. Rótula derecha $y = 0.76$.

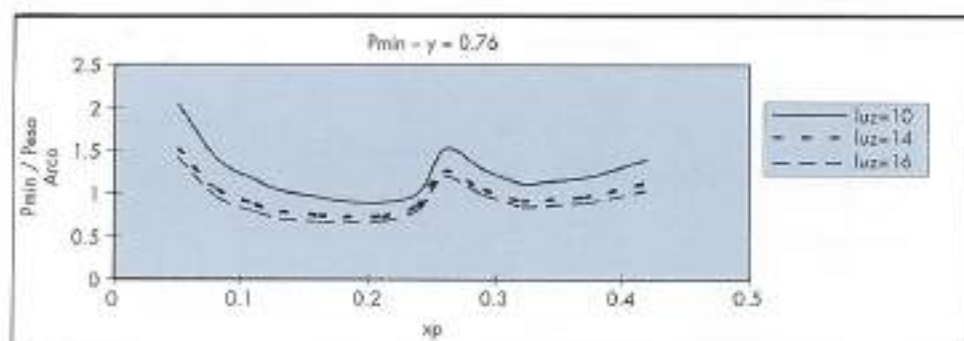


FIGURA 11.

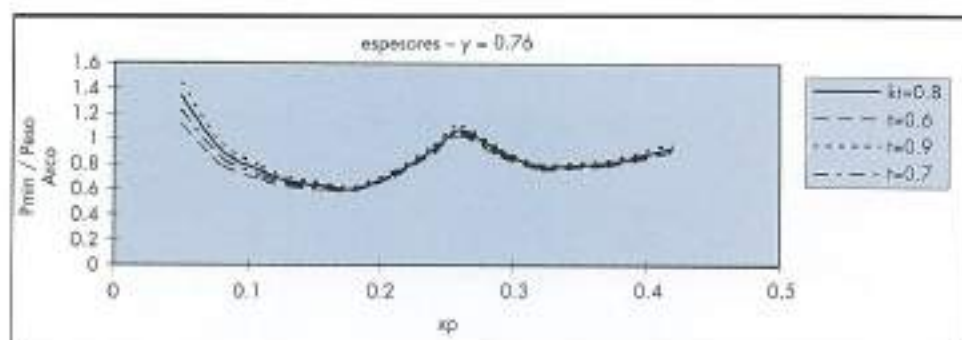


FIGURA 12.

esto último, su influencia en el conjunto es similar al anterior caso de la luz, como se aprecia en la figura 12.

3.2. VARIABLES DE CONTORNO

• Reparto de carga

Dentro de este efecto cabe distinguir entre dos variables independientes, por un lado el semiángulo de distribución de carga a lo largo del terreno y por otro lado el factor que relaciona las cargas p_1 y p_2 .

Este parámetro N , ($p_2=Np_1$), que no se había mencionado hasta ahora, viene a representar la diferencia de profundidades de los puntos de intersección del triángulo de cargas con el trasdós del arco. Este factor depende en cada posición de la carga de la geometría del arco.

En cuanto a la otra variable α_2 representa el ángulo de distribución de la carga a través del relleno. Al acercarse a los arranques existe un efecto de transmisión de cargas directamente a los apoyos, de otra manera, las cargas mínimas de esta zona estarían muy subestimadas, siendo además las condicionantes en arcos peraltados. En la figura 13 se puede observar que a medida que se adoptan ángulos de reparto mayores, (15° , 20° , 25° , 30°), la aparición de la carga mínima se retrasa de $x_p=0.19$ a $x_p=0.23$. Este efecto se aprecia de manera notoria cuando se pasa de semiángulos normales a $\alpha_2=30^\circ$.

Un $\alpha_2=30^\circ$, representa en realidad un ángulo total de reparto de 60° , valor mayor que el adoptado en suelos (45°). En el caso de puentes de terreno está confinado en todos los planos posibles, lateralmente por los tímpanos, superiormente por el tablero o en su caso por la superficie de rodadura e inferiormente por el propio arco, por lo que aún cogiendo un semiángulo de 22.5° estaremos del lado de la seguridad.

• Coeficiente de empuje del terreno

El empuje del relleno es, con gran diferencia, el efecto más importante. Como se verá a continuación puede hacer variar los resultados hasta un orden de magnitud. La primera decisión que se debe tomar es la del tipo de empuje que se va a tener en cuenta, pasivo, activo, o al reposo. Las diferencias entre uno y otro son considerables. Por ejemplo si se considera un relleno con un ángulo de rozamiento interno $\phi=30^\circ$, el coeficiente de empuje pasivo será:

$$K_p = 1 + \frac{\sin(\phi)}{1 - \sin(\phi)} = 3,$$

el coeficiente al reposo:

$$k_r = p_2 = N \cdot p_1 / k_p = 1$$

y el coeficiente de empuje activo:

$$k_a = 1 - \frac{\sin(\phi)}{1 + \sin(\phi)} = 0.5$$

El primero es 6 veces más grande que el último. Para poder considerar el empuje pasivo hay que asegurar que se produce un movimiento real del arco hacia el terreno o de otra manera se estará considerando un empuje inexistente. Si se observa la literatura existente, sobre todo en los ensayos a rotura realizados por los ingleses, no cabe duda que en la inmensa mayoría de los ensayos el movimiento que se produce es muy apreciable, incluso visualmente. Este se produce para estados muy avanzados de carga, siendo casi nulo el movimiento durante el 90% de la fase de carga. En ocasiones el colapso no se produce por medio de la formación de un mecanismo, esto ocurre en los casos de "snap-through" donde al formarse una de las rótulas el hormigón cercano se microfisura, produciéndose una pérdida de materia y por tanto de geometría, colapsando el arco por inestabilidad. En estos casos no se moviliza empuje pasivo ni antes ni después de alcanzar la carga mínima. Como conclusión, pues, decir que no se debe contabilizar el empuje como pasivo salvo en

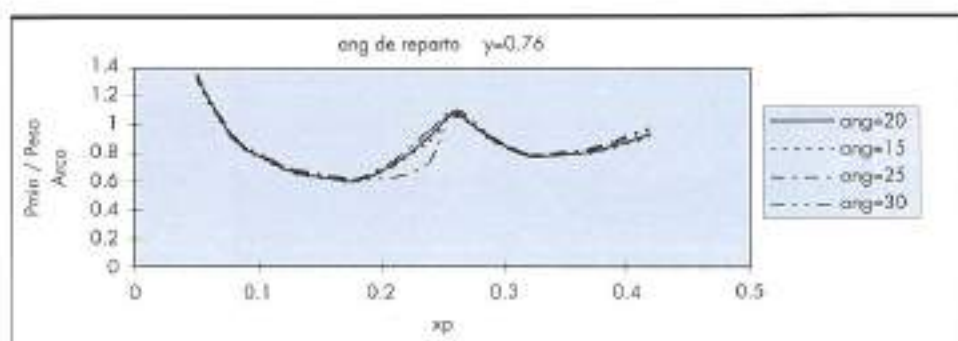


FIGURA 13.

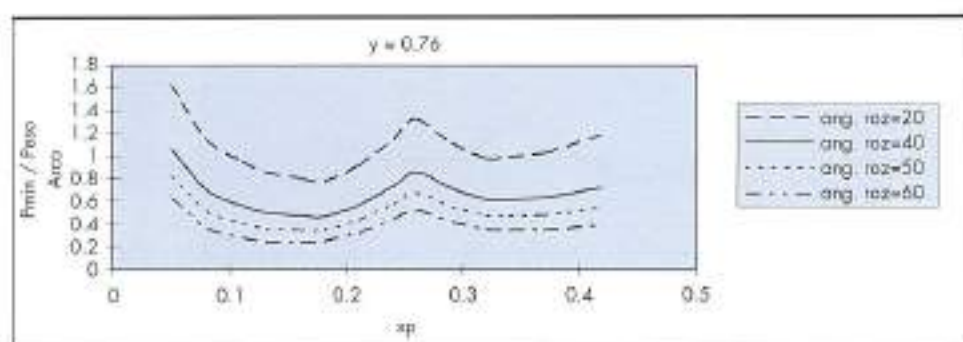


FIGURA 14.

los casos donde se tenga la certeza del colapso mediante mecanismo y en un análisis límite.

A la hora de realizar el estudio, se ha contado sólo con el empuje activo (subestimando el empuje total) y se han ido dando diferentes ángulos de rozamiento crecientes 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, para los que el coeficiente de empuje disminuye ($k_p = 1 - \sin(\phi)$). El resultado puede apreciarse en la figura 14.

3.3. VARIABLES MECÁNICAS

La única variable mecánica que entra en juego en este análisis es el peso específico, cuyo rango de variación del mismo suele estar entre 1,8 y 2,0 Mp/m^3 para fábrica de ladrillo, y 2,0-3,0 para fábrica de piedra. Cuanto mayor sea éste, mayor es la carga mínima, debido a que, como se ve en las ecuaciones de equilibrio, el efecto del peso del puente en las rútilas es contrario a la acción de la carga puntual. En los resultados expuestos hasta ahora se ha cogido $\gamma = 1,87 \text{Mp/m}^3$. Tomar valores más altos llevaría a cargas mínimas más altas que estarían eventualmente limitadas por las tensiones.

3.4. COMPARACIÓN CON RESULTADOS EXPERIMENTALES

En el Reino Unido se han venido realizando a la largo de los últimos 20 años una campaña de ensayos sobre puentes de fábrica reales y en modelo reducido. Existe abundante literatura acerca de éstos, donde se comparan los resultados experimentales con los resultados de los programas comentados más arriba y del siempre mencionado MEXE (desarrollado en el periodo de entreguerras y basado en una teoría elástica bastante difusa). A continuación se presentan los resultados experimentales de cinco de los puentes encajados, junto a las cargas obtenidas con el programa inglés y el expuesto aquí (tabla 2).

Los resultados obtenidos con el método de equilibrio límite inferior muestran que la predicción es en efecto un límite inferior de la capacidad portante real, que puede resultar suficiente en la mayor parte de los casos. Cabe añadir que la predicción, siempre del lado de la seguridad con relación a los valores experimentales, puede afinarse más si se pueden definir de mejor manera los datos de partida, especialmente los geométricos.

4. ASPECTOS COMPLEMENTARIOS

4.1. ANÁLISIS TENSIONAL

Ha de realizarse siempre un análisis tensional después de plantear el método de equilibrio. La fábrica trabaja normalmente a valores muy bajos, sobre todo la fábrica de piedra, generalmente más antigua, por lo que se le presupone valores infinitos de resistencia a compresión. Pero en ciertas ocasiones se ha hecho trabajar a la fábrica a valores más rentables y en estos casos plantear el método del equilibrio límite llevaría a cargas geoméricamente correctas pero tensionalmente muy incorrectas. La carga límite estaría limitada entonces por las tensiones en las secciones condicionantes (secciones reducidas por la fisuración, y con mayores esfuerzos).

En el epígrafe 2.2. se comentó que el espesor del arco tenía tan sólo una importancia geométrica, la misma importancia que la altura de relleno sobre la clave (en algunos análisis publicados, estas dos variables vienen agrupadas en una sola). Realizando un análisis tensional del arco, que debe de ser obligado, el espesor cobra la importancia resistente que le es propia.

En arcos rebajados existen estudios sobre el "snap-through" (Crisfield, Hendry, Page), [12], [20], [35], donde la no linealidad geométrica y el colapso local del hormigón en las rútilas provocan la rotura antes de la formación del mecanismo.

	BARGOVER	BRIDGEMILL	PRESTON	PRESTWOOD	TORKSEY
Tipo	Piedra	Piedra	Piedra	Ladrillo	Ladrillo
Luz	10.360	18.290	5.180	6.550	4.900
Recha	5.180	2.84	1.636	1.428	1.154
Espesor de arco	0.558	0.771	0.360	0.220	0.343
Altura del relleno en clave	1.200	0.203	0.380	0.165	0.241
Anchura	8.680	8.300	5.700	3.800	7.160
Directriz	semi-circ	poligonal	semi-elíptica	distorsionado	Poligonal
Peso Esp.	2.4	2.15	2.25	2.0	2.05
Kp ⁴	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
α^2	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5
Carga Experimental	560	310	210	22.8	106
Programa del TRRL ¹	575.772	254.364	124.176 ²	177	141.5
3XMEKE ³	385	109	180	5.3	67.7
Programa Límite	427	200	74 ⁴	17.17	78.76
Coef. de seguridad	1.31	1.55	2.83	1.32	1.34

¹ Del TRRL se dan dos valores, límite superior y límite inferior, supuestamente el valor debe quedar entre ambos. La amplitud del intervalo nos da una idea de la adecuación del método en las diferentes casos.

² Los resultados MEKE vienen multiplicados por un factor de seguridad de tres.

³ Rótula isométrica ubicada 23° por encima de la línea horizontal.

⁴ El coeficiente de empuje en el programa límite, no se ha considerado en todos los casos como tres.

⁵ Se consideró una elevación de rótula de 0.20rad, ya que en este caso se sabía con certeza de la existencia de un relleno rígido.

TABLA 2.

4.2. FISURACIÓN

Existen dos tipos de fisuración en la fábrica: fisuración por tracción (apertura de juntas) y microfisuración inducida por compresión localizada en las rótulas. Ninguna de ellas ha sido tenida en cuenta en la elaboración del método. Loo, Choo, Coutie, Yang han realizado diversos estudios mediante E.F. acerca de la sección eficaz que debe de ser contabilizada debido a los fenómenos de fisuración. Otros autores han tratado con este fenómeno recalculando el arco una vez descontadas las zonas de tracción halladas en la primera pasada de cálculo. La fisuración por tracción sí parece que debe de tenerse en cuenta. Molins y Roca han aportado una metodología de análisis en esa línea.

La microfisuración, en cambio, es un fenómeno mucho más complejo al menos en la fábrica, que depende del tipo de roca o ladrillo, del espesor de junta, del mortero, en definitiva de parámetros mecánicos difícilmente cuantificables. Se han desarrollado diferentes modos de contabilizar este fenómeno, el mencionado de los E.F., el método energético donde se tiene en cuenta el trabajo a compresión en las rótulas y en el método expuesto aquí donde se reduce el espesor del arco en un 10% que representa la formación de las rótulas en una capa concéntrica interior respecto al trasdós o al intradós del arco.

4.3. EMPUJE DEL RELLENO

Ya se ha mencionado con anterioridad la importancia de este efecto, cuantificarlo es un paso previo y fundamental, para pasar a analizar otros factores en profundidad. Posibles campos de desarrollo podrían ser: simulación del relleno mediante muelles (equivalente a los modelos 1-D de

E.F.) donde parametrizar la constante del muelle se adivina como la misión más complicada. Otro sistema viable, desarrollado en parte por Gilbert y Melbourne, consiste en modelizar el continuo por medio de bloques que se mueven como sólidos rígidos y minimizando el trabajo de los bloques (el trabajo del relleno dependerá del movimiento de sus bloques doblemente, ya que la fuerza de cada uno de ellos será función del desplazamiento).

4.4. ELEVACIÓN DE RÓTULAS

Cuando se pueda contar con un relleno rígido o muy compactado, la tipología real del puente varía. La elevación de las rótulas de los arranques un ángulo $\alpha=15^\circ-20^\circ$ transformará el arco en un semiarco muy rebajado. La elevación excesiva de las rótulas puede conducir a resultados de carga infinita, pues, en ese caso se habrá transformado el arco en una viga donde la formación del mecanismo no es factible.

Por otra parte, el no tener en cuenta este efecto cuando se haya comprobado la existencia del relleno rígido, llevará a subestimaciones grandes de la carga mínima, hasta de un orden de magnitud. Sin duda alguna será preciso estudiar a fondo la cuestión con objeto de dar criterios que ayuden a tomar la decisión de establecer no.

4.5. COMPORTAMIENTO NO-LINEAL GEOMÉTRICO

A pesar de la importancia de la geometría en los arcos, no se ha tenido en cuenta la no linealidad geométrica debido a los pequeños movimientos.

4.6. TÍMPANOS Y ALETAS

La rigidización de los tímpanos y aletas llegan a aumentar en algunos casos la carga mínima en un 75% (Hendry, Roy-

les, Melbourne, Gilbert) [31]. Parece por tanto necesario el contar con su contribución en los casos en los que se pueda asegurar la unión entre el arco y el tímpano. Para ello se deberá plantear un modelo global de la estructura.

4.7. PUENTES DE VARIOS ARCOS

Todo el análisis realizado hasta ahora ha sido en puentes de un sólo arco, donde la ubicación de las posibles rótulas tiene un rango de variación limitada. Muchos de los puentes antiguos de varios arcos pueden ser tratados como puentes independientes de un sólo arco, ya que la rigidez de las pilas se lo permite. En los casos en que esto no sea posible el planteamiento de la pésima configuración presenta mayor complejidad. C. Melbourne y M. Wagstaff han llevado a cabo en el Bolton Institute una campaña de ensayos para localizar las posibles rótulas en puentes de tres vanos, en los que se necesitan siete rótulas. En estos casos la ubicación de las rótulas va a depender de: la esbeltez de las pilas, la capacidad del cimiento, de la rigidez de los estribos y, por supuesto, del arco en sí. En caso de realizar un estudio teórico de este tipo de puentes se deberán tener en cuenta todos estos parámetros, ya que la carga obtenida en los ensayos era menor que la que supuestamente obtenida mediante el análisis de cada arco independientemente.

4.8. SEPARACIÓN DE ROSCAS

En arcos de fábrica de ladrillo donde no existe una trabazón clara entre las diferentes roscas, puede producirse una separación de las mismas, lo que trastoca completamente el comportamiento estructural del puente. Este fenómeno ha sido estudiado por Gilbert y debe de ser tenido en cuenta.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. ABDUNUR. Direct stress to stresses in concrete and masonry bridges.
- [2] R. ASTUDILLO; B. MARTÍNEZ (1996). Inspección y Auscultación de Puentes. GEHO - CEB. Estado del Arte en Reparación y Refuerzo de Estructuras de Hormigón.
- [3] S. R. AGRAWALL (1973). Survey and tabulation method of assessment and strengthening of masonry arch bridges. *Journal Institution Engrs. Civ. Engrs. Division 53*, 3 pp 148-160.
- [4] W. H. BARLOW (1846). On the existence (practically) of the line of equal horizontal thrust in arches, and the mode of determining it by geometrical construction. *Min. Proc. Inst. Civ. Eng.* 5.
- [5] T. E. BOOTHBY. Collapse modes of masonry arch bridges. *Proc. Int Historic Bridges Conf. Ohio Historical Soc.*
- [6] BOLTON INSTITUTE (1995). *Proceedings 1st International Conference on Arch Bridges*. BOLTON, UK, 1995.
- [7] R. J. BRIDLE and T. G. HUGHES. An energy method for arch bridge analysis. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Part 2*, September 1990.
- [8] BRITISH RAILWAYS BOARD. Assessment of the live load carrying capacity of underbridges. Chief Civil Engineer. February 1976.
- [9] C. S. CHETTOE; W. HENDERSON (1957). Masonry arch bridges: a study. *Proc. Inst. Civ. Eng.* 723-755.
- [10] B. S. CHOO. Et al finite elements analysis of masonry arch bridges using tapered elements. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Part 2*, December 1991.
- [11] B. S. CHOO; M. G. COUTIE and N. G. GONG. The effects of cracks on the behaviour of masonry arches. *Proceedings of the ninth International Brick Masonry Conference*, Berlin 1991.
- [12] M. A. CRISFIELD and A. J. PACKMAN. A mechanism program for computing the strength of masonry arches. *TRRL Research Report 124*, 1987.
- [13] M. A. CRISFIELD. A finite element computer program for the analysis of masonry arches. *TRRL laboratory report 1115*, 1984.
- [14] M. A. CRISFIELD. *Finite Element and Mechanism Method for the Analysis of Masonry and Brickwork Arches*. Res. Rep. 19, TRRL, Crowthorne, Becka.
- [15] M. A. CRISFIELD. Plasticity computations using the Mohr-Coulomb yield criterium. *Eng. Computing*.
- [16] S. R. DAVIES. The assessment of load carrying capacity of masonry arch bridges. *Proc 2nd. Int. Conf. on Civil and Structural Engineering Computing*, Vol. 2.
- [17] DEPARTMENT OF TRANSPORT. *Bridge Inspection Guide*. HMSO, London.
- [18] D. C. DRUCKER. Coulomb friction, plasticity and limit loads trans. *ASME*, Vol. 76, 1954.
- [19] W. J. HARVEY and F. W. SMITH. The behaviour and assessment of multi-span arches. *The Structural Engineer*, Vol. 69, Dec. 91.
- [20] A. W. HENDRY. Test on stone masonry arch at Bridgemill.
- [21] A. W. HENDRY. Test on stone masonry arch at Bargover.
- [22] A. W. HENDRY. Masonry properties for assessing arch bridges. *TRRL Contractor Report, CR 244*, 1990.
- [23] A. W. HENDRY. Masonry properties for assessing arch properties. *TRRL Contractor Report CR 244*, 1990.
- [24] J. HEYMAN. The estimation of the strength of masonry arches. *Proc. Inst. Civil Engineering. Part 2*.
- [25] T. G. HUGHES and R. J. BRIDLE. The influence of certain parameters on the strength of masonry arch bridges. *Brithis Masonry Society proc.* 4, 1990.
- [26] T. G. HUGHES et al. The determination of in-situ stress in masonry rings. *Centenary Bridge Conference*, Cardiff, 1994.
- [27] A. KOOHARIAM. Limit analysis of voissor (segmental) and concrete arches. *Jnl. Am. Concrete Inst.*, Vol. 89.
- [28] C. MELBOURNE. The behaviour of brick arch bridges. *Proceedings of the British Masonry Society*, No 4, Ed. H. W. West, 1990.
- [29] C. MELBOURNE and P. J. WALKER. Load test to collapse of a full scale brickwork masonry arch. *TRRL. Contractor Report CR. 189*, 1990.
- [30] C. MELBOURNE. The assessment of masonry arch bridges, the effects and defects. *Proceedings from the first International Conference on Bridge Management*, March 1990, pp 523-53.
- [31] C. MOLINS; P. ROCA. Un modelo para el análisis del comportamiento resistente de construcciones de obra de fábrica. Tesis Doctoral. U.P.C.
- [32] L. M. ORTEGA BASAGOITI. Analizar lo máximo para intervenir lo mínimo. *Acueducto de Segovia*. GEHO, 1995.
- [33] J. PAGE. State of the art review on the masonry arch bridge. *TRRL. Department of transport*.
- [34] J. PAGE. Load test to collapse on two arch bridges at Preston, Shropshire and Prestwood, Staffordshire. *Res. Rep. 110*. TRRL, Crowthorne.
- [35] A. J. S. PIPPARD. The approximate estimation of save loads on masonry bridges. *Civil Engineering*, Vol 1.
- [36] A. J. S. PIPPARD; E. TRANTER and L. CHITTY. The mechanics of the voissor arc. *J. Inst. Civ. Eng.* 4, 281.
- [37] F. SAWKO and K. TOWLER. Limit state behaviour of brickwork arches. *Proc 6. Inst. Brick Masonry Conf. Rome* 1982.
- [38] SEJOURNÉ. *P. Grandes Voûtes*. Bourges. 1913-1916. 3. Voûs.
- [39] R. C. DE VEKEY. Non destructive test methods for masonry structures. *Proc. 8 Inter. Brick and Block Masonry Conference*.
- [40] WOLFSON. Bridge Research Unit. Inspection, assessment and repair of masonry arch bridges. University of Dundee, June 1991.