

El tensor de radiación y las playas

ANTONIO LECHUGA ÁLVARO (*)

RESUMEN En este artículo se da un repaso a las características más esenciales del tensor de radiación, sobre todo en aguas poco profundas y en su relación con la dinámica sedimentaria en las playas. Desde que Longuet-Higgins y Stewart sacaron a la luz el concepto y la aplicación del tensor de radiación, han sido múltiples los estudios donde se ha relacionado este con algunos aspectos de las propiedades integrales de la no linealidad del oleaje. Primeramente se describe que es el tensor de radiación y cuales son sus componentes. En segundo lugar se definen los componentes principales del tensor y las relaciones entre componentes cuando se produce un cambio de coordenadas estableciendo los operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales. Finalmente se estudia el caso de una playa a resguardo de un obstáculo usando coordenadas polares. La simplificación de las expresiones de la circulación sedimentaria en este caso es importante. La sola consideración de estas expresiones nos ayuda a entender mejor los procesos en aguas someras y en aguas profundas. De todo esto se extraen las oportunas conclusiones.

THE RADIATION STRESS AND BEACHES

ABSTRACT In this paper we summarize the main characteristics of the radiation stress on shallow water and its relation ship with the sediment transport. After Longuet-Higgins and Stewart presented the concept and applications of the radiation stress there have been several studies showing some aspects of the integral characteristics of the wave nonlinearity. First of all we describe the radiation stress and its components. Secondly we define the relationship between components when we change coordinates. Thirdly we generalize the coordinates using the differential operators in orthogonal curvilinear coordinates. The problem is strongly simplified and also is the sedimentary circulation and dynamics. A quick look at the term of the equation shows us the main characteristics of sediment transports both in deep and shallow water. Some conclusions can be drawn of it.

Palabras clave: Tensor de radiación; Playas a resguardo; Circulación costera.

1. INTRODUCCIÓN

En un bien conocido artículo del año 1964 M. S. Longuet-Higgins y R.W. Stewart introdujeron el concepto del tensor de radiación como indicador integral de las propiedades no lineales de las ondas de gravedad. En este trabajo, incluso desarrollaron algunas aplicaciones del tensor de radiación al cálculo del "set-up" y ondas largas en playas con una fuerte componente de no linealidad.

La definición del tensor de radiación es la siguiente: Es el exceso de flujo de la cantidad de movimiento debido a la presencia de las ondas de gravedad:

En moderna notación compacta podemos escribir:

$$S_{ij} = \left\langle \int_{-h}^{\eta} (u_i u_j - w^2 \delta_{ij}) dz + \frac{1}{2} g \zeta'^2 \right\rangle \quad [1]$$

En donde S_{ij} representan las distintas componentes del tensor de radiación para fondo uniforme, h , y donde u_i representan las velocidades horizontales, w la velocidad vertical y ζ' la superficie libre. En todos los casos la $\langle \rangle$ representa la parte fluctuante de la cantidad a la que se refiere. El orden de magnitud es (ka^2) , el símbolo $\langle \rangle$ significa el promedio sobre la fase de las ondas de superficie.

Si suponemos un oleaje cuya dirección de aproximación forma un ángulo θ con el eje de las x , tendremos que en teoría lineal,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= gkh & k &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ y \quad k_1 &= k \cos \theta & k_2 &= k \sin \theta \end{aligned} \quad [2]$$
$$S_{ij} = \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{c_g}{c} + \frac{\delta_{ij}}{2} \left(\frac{2c_g}{c} - 1 \right) \right\} E$$

en donde c y c_g son respectivamente la celeridad de la onda y la celeridad de grupo. Llamando

$$\begin{aligned} n &= \frac{cg}{c} = \frac{1}{2}(1+G) \\ G &= \frac{2kh}{Sh2kh} \end{aligned} \quad [3]$$

las componentes del tensor de radiación se escriben:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= En \cos^2 \theta + \frac{E}{2}(2n-1) \\ S_{xy} &= En \cos \theta \cdot \sin \theta \\ S_{yy} &= En \sin^2 \theta + \frac{E}{2}(2n-1) \end{aligned} \quad [4]$$

Como veremos la importancia real del tensor de radiación consiste en que sintetiza, resume y unifica los elemen-

[*] Jefe del Área de Costas del Centro de Estudios de Puerto y Costas del CEDEX (Ministerio de Fomento).

tos no lineales del oleaje cuya relación con el transporte de sedimentos en las playas es esencial.

2. TENSORES PRINCIPALES

Teniendo en cuenta las componentes del tensor de radiación en coordenadas cartesianas (4), los tensores principales se obtienen igualando a cero el determinante en las respectivas componentes según el problema de autovalores,

$$\begin{vmatrix} S - S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S - S_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

$$S^2 - (S_{xx} + S_{yy})S + S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2 = 0 \quad [5]$$

$$S_I = \frac{E}{2}(4n - 1)$$

$$S_{II} = \frac{E}{2}(2n - 1)$$

Como vemos los tensores principales S_I y S_{II} se corresponden con la dirección de propagación del oleaje (S_I), y la dirección perpendicular a la misma (S_{II}). Esto último se comprueba haciendo $\theta = 0$ en (4) con lo que se obtiene: $S_{xx} = S_I$ y $S_{yy} = S_{II}$.

En función de estas tensiones principales la expresión en cartesianas en un eje que formen θ grados con la dirección de propagación se escribe,

$$\begin{aligned} S_{xx} &= (S_I - S_{II})\cos^2\theta + S_{II} \\ S_{xy} &= (S_I - S_{II})\sin\theta\cos\theta \\ S_{yy} &= (S_I - S_{II})\sin^2\theta + S_{II} \end{aligned} \quad [6]$$

Las componentes S_{xx} , S_{xy} , y S_{yy} se pueden obtener mediante la construcción gráfica del círculo de Mohr (véase figura n° 1).

3. CAMBIO DE COORDENADAS

Las reglas de cambio de coordenadas cartesianas se escriben

$$\begin{aligned} \dot{S}_{xx} &= S_{xx}\cos^2\alpha + 2S_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + S_{yy}\sin^2\alpha \\ \dot{S}_{xy} &= (S_{yy} - S_{xx})\sin\alpha\cos\alpha + S_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ \dot{S}_{yy} &= S_{xx}\sin^2\alpha + S_{yy}\cos^2\alpha - 2S_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned} \quad [7]$$

en donde $\dot{S}$ son las nuevas componentes en unos ejes que forman un ángulo α con los primitivos.

En notación matricial se puede escribir (7), como,

$$\begin{pmatrix} \dot{S}_{xx} & \dot{S}_{xy} \\ \dot{S}_{xy} & \dot{S}_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

o simbólicamente

$$\dot{S} = A \cdot S \cdot A^T$$

La figura n° 2 ilustra este cambio de coordenadas gráficamente.

4. LA DIVERGENCIA DEL TENSOR DE RADIACIÓN

En las aplicaciones más comunes del tensor de radiación, por ejemplo en el transporte de sedimentos, lo que realmente aparece en las formulaciones es la divergencia del tensor de radiación. Por lo tanto nos detendremos brevemente en sus consideración.

La divergencia de un tensor es un vector cuyas componentes cartesianas se escriben como,

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \\ T_y &= \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \end{aligned} \quad [8]$$

Es muy importante la generalización de la expresión de la divergencia del tensor de radiación en coordenadas curvilíneas ortogonales (ξ, η).

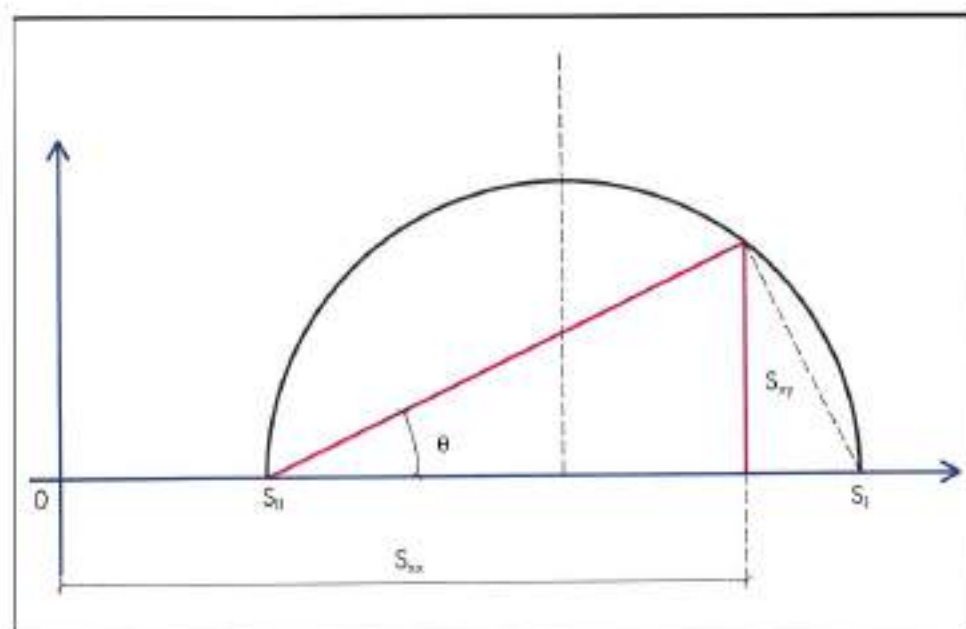


FIGURA 1. Construcción gráfica de los componentes del tensor de radiación.

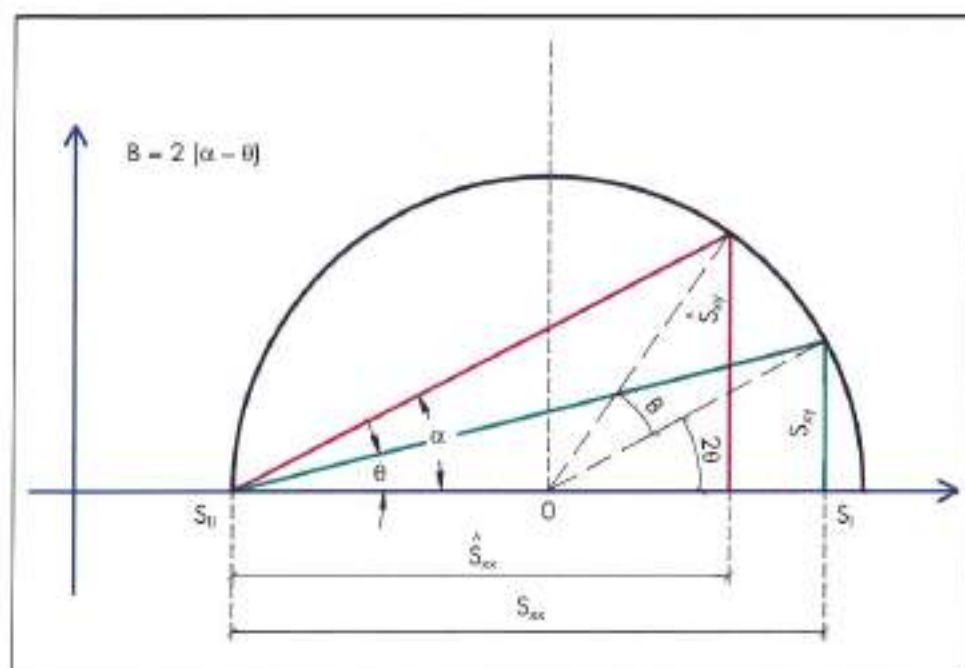


FIGURA 2. Cambio de orientación de los ejes coordenados. Construcción gráfica de los componentes.

Las componentes T_ξ , T_η se escriben:

$$\begin{aligned} T_\xi &= \frac{\delta S_{\xi\xi}}{\delta \xi} + \frac{S_{\xi\xi} - S_{\eta\eta}}{J} \cdot \frac{\delta J}{\delta \xi} + \frac{\delta S_{\xi\eta}}{\delta \eta} + 2 \frac{S_{\xi\eta}}{J} \frac{\delta J}{\delta \xi} \\ T_\eta &= \frac{\delta S_{\eta\eta}}{\delta \eta} + \frac{S_{\eta\eta} - S_{\xi\xi}}{J} \cdot \frac{\delta J}{\delta \eta} + \frac{\delta S_{\xi\eta}}{\delta \xi} + 2 \frac{S_{\xi\eta}}{J} \frac{\delta J}{\delta \eta} \end{aligned} \quad [9]$$

en donde

$$J = \frac{\delta \xi}{\delta x} = \frac{\delta \eta}{\delta y}$$

Para cada tipo de coordenadas curvilíneas son fáciles de obtener los valores del vector divergencia una vez conocido el valor de J . Esto último puede simplificar el problema cuando por consideración de simetría un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales sea más apropiado. Así por ejemplo si la propagación del oleaje es más fácilmente reproducible en unas determinadas coordenadas curvilíneas la componente mixta del tensor de radiación puede ser nula obteniéndose expresiones muy sencillas para la divergencia del tensor de radiación. En todos estos casos nos estamos refiriendo a un tensor bidimensional. Como ejemplo en coordenadas polares bastará hacer $\xi = \ln r$, $\eta = \theta$, $J = r$ para que (9) se escriba,

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{\delta S_{rr}}{\delta r} + \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\delta S_{r\theta}}{\delta \theta} \\ T_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\delta S_{r\theta}}{\delta r} + \frac{2S_{r\theta}}{r} + \frac{\delta S_{\theta\theta}}{\delta \theta} \end{aligned}$$

5. MODELOS DE CIRCULACIÓN. LA CORRIENTE LONGITUDINAL EN LAS PLAYAS

Con las hipótesis habituales de playa rectilínea, sin tener en cuenta la interacción onda-corriente, Liu y Dalrymple hace veinte años expresaron las ecuaciones de la velocidad media de la corriente en sentido perpendicular a la playa (U) y en sentido longitudinal, V como,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} \{ [\bar{\zeta} + h] U \} + \frac{\delta}{\delta y} \{ [\bar{\zeta} + h] V \} \\ U \frac{\delta U}{\delta x} + V \frac{\delta U}{\delta y} = -g \frac{\delta \bar{\zeta}}{\delta x} - \frac{1}{\rho [\bar{\zeta} + h]} \left\{ \frac{\delta S_{xx}}{\delta x} + \frac{\delta S_{xy}}{\delta y} + \tau_{Bx} \right\} \\ U \frac{\delta V}{\delta x} + V \frac{\delta V}{\delta y} = -g \frac{\delta \bar{\zeta}}{\delta y} - \frac{1}{\rho [\bar{\zeta} + h]} \left\{ \frac{\delta S_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta S_{yy}}{\delta y} + \tau_{By} \right\} \end{aligned} \quad [11]$$

en donde τ_B representa la fricción con el fondo. Como vemos el término de impulsión es la correspondiente componente de la divergencia del tensor de radiación en coordenadas cartesianas (8).

Alternativamente la linearización de (11) cuando la circulación no es estacionaria nos lleva (Grimshaw et al), a:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{\zeta}}{\delta t} + \frac{\delta U}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta y} &= 0 \\ \frac{\delta U}{\delta x} + g h \frac{\delta \bar{\zeta}}{\delta x} &= - \frac{\delta S_{xx}}{\delta x} - \frac{\delta S_{xy}}{\delta y} \\ \frac{\delta V}{\delta x} + g h \frac{\delta \bar{\zeta}}{\delta y} &= - \frac{\delta S_{xy}}{\delta x} - \frac{\delta S_{yy}}{\delta y} \end{aligned} \quad [12]$$

con el mismo valor del término de impulsión como la divergencia del tensor de radiación.

Como sabemos la segunda ecuación de (11) y (12) nos sirve para el cálculo del set-up, mientras que la tercera permite la evaluación de la corriente longitudinal (V) y por lo tanto del transporte de sedimentos a lo largo de la playa.

Estrictamente considerada, por tanto, la corriente longitudinal y por consiguiente el transporte de sedimentos a lo largo de la playa es proporcional a la componente T_y de la divergencia del Tensor de radiación.

Teniendo esto último presente, a continuación, vamos a ver algunos ejemplos de como con el oportuno cambio de coordenadas se simplifican las expresiones de las corrientes generadas por el oleaje.

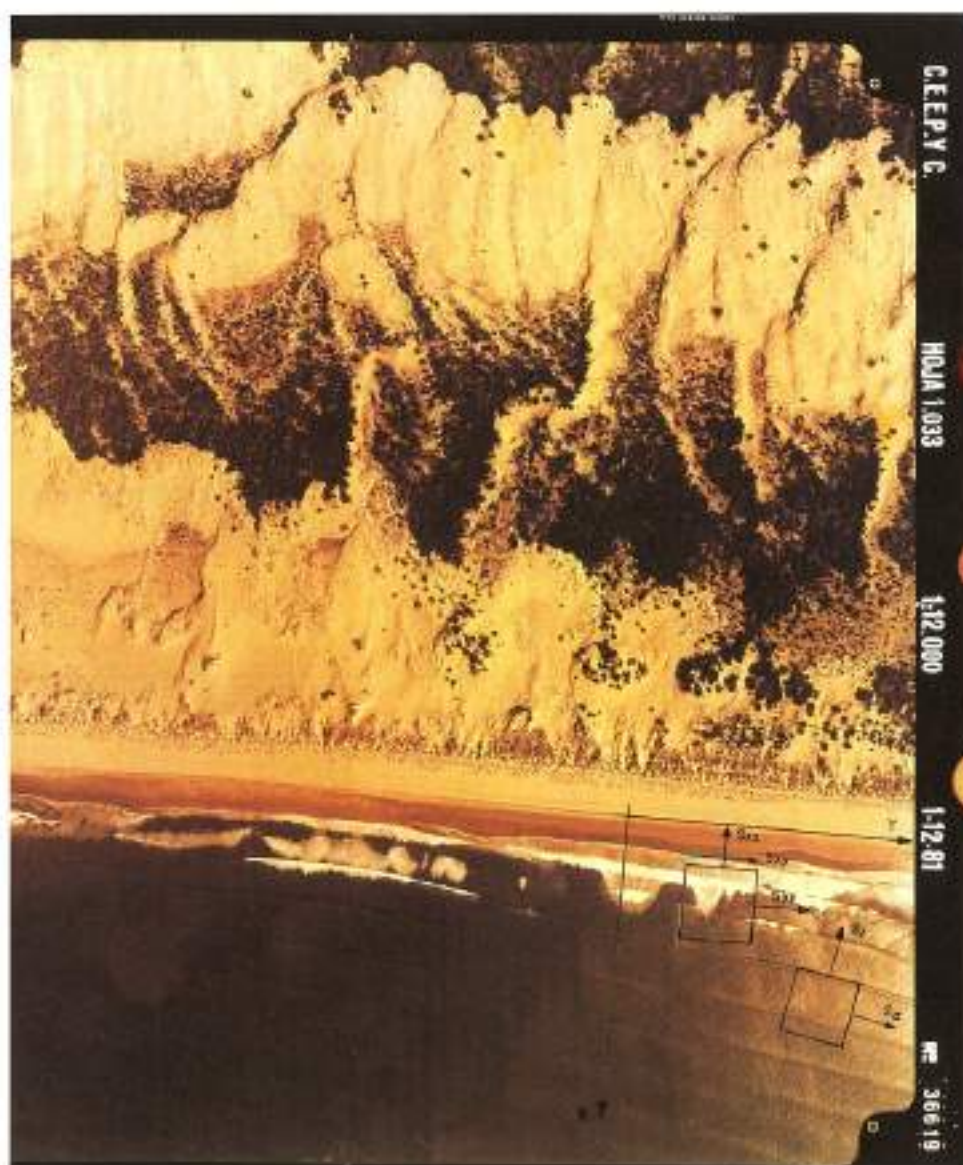


FIGURA 3. Playa de Doñana en Huelva, ilustrando las componentes cartesianas y principales del tensor de radiación.

6. EJEMPLOS DE APLICACIÓN. PLAYAS A RESGUARDO

Supongamos que nos encontramos en un caso de difracción del oleaje alrededor de un polo. Es el caso típico de todas las playas a resguardo de un obstáculo (promontorio, morro de dique, etc.).

La pregunta podría ser: ¿Cuáles son las pautas del transporte de sedimento en la playa a resguardo?

Considerando coordenadas polares con polo en el extremo de la obra y eje paralelo a los frentes de propagación, tendríamos:

$$\begin{aligned} U_r \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} &= -g \frac{\delta \zeta}{\delta r} - \frac{1}{h} (T_r + \tau_r) \\ U_r \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} &= -g \frac{\delta \zeta}{\delta \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_\theta + \tau_\theta) \end{aligned} \quad [13]$$

en donde T_r y T_θ se obtienen con las expresiones (10).

Si consideramos que los frentes son aproximadamente circulares (una vez difractados), los tensores principales se corresponden con la dirección r y θ por lo tanto,

$$\begin{aligned} S_{rr} &= \frac{E}{2} (4n - 1) & S_{\theta\theta} &= \frac{E}{2} (2n - 1) \\ S_{r\theta} &= 0 & E &= \frac{1}{8} H^2 \end{aligned}$$

y tendríamos:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{\delta}{\delta r} \left(\frac{E}{2} (4n - 1) \right) + En \\ T_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \theta} \left(\frac{E}{2} (2n - 1) \right) \end{aligned}$$

La primera observación a destacar es que el transporte sólido litoral, proporcional como sabemos a T_θ depende de la derivada según la tangente del frente de onda y además está implicada la segunda componente del tensor principal, $S_{\theta\theta}$. Por lo tanto el transporte de sedimentos es proporcional a la componente de sobreelevación,

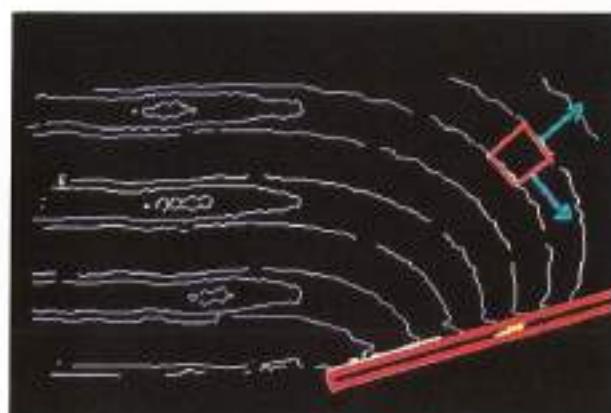


FIGURA 4. Difracción del oleaje mediante un obstáculo. La dirección de los componentes principales del tensor de radiación aparece en la zona a resguardo.

$$\frac{\delta E}{\delta \theta}$$

que tan agudamente intuyó Iribarren.

Sin lugar a dudas el modelo completo de circulación de sedimento se obtiene mediante la ecuación (13), ya que en estos casos no es posible asimilar la playa a unos ejes rectangulares cartesianos.

El no uso de las coordenadas curvilíneas es probablemente la principal causa del mal funcionamiento de los modelos de evolución en las playas a resguardo de obstáculos.

Si consideramos los valores límites de, n , obtenemos los siguientes resultados:

En aguas profundas $n = 0,5$ y por lo tanto

$$Tr = \frac{1}{2} \frac{\delta E}{\delta r} + \frac{E}{2}, \quad y \quad T_\theta = 0$$

En aguas profundas, por tanto, no hay transporte de sedimentos aunque hubiese sobrelevación.

En aguas someras $n = 1$, como límite, y en este caso

$$Tr = \frac{3}{2} \frac{\delta E}{\delta r} + E, \quad y \quad T_\theta = \frac{1}{2r} \frac{\delta E}{\delta \theta}$$

Es en aguas someras por lo tanto donde es de esperar el máximo transporte de sedimentos; T_θ es el máximo a igualdad del resto de los factores. Así mismo en aguas poco profundas es máximo el set-up que como sabemos es proporcional a T_θ .

7. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El tensor de radiación es el exceso del flujo de la cantidad de movimiento debido a la presencia del oleaje y es, como ya señalaron Longuet-Higgins y Stewart un indicador integral de las propiedades no lineales de las ondas de superficie. Para la dinámica sedimentaria en las playas el tensor de radiación es esencial ya que de una manera sencilla engloba todas las características que tienen alguna relación con el transporte de sedimentos.

Hemos visto que la transformación de este tensor bidimensional se efectúa de una manera análoga al tensor de

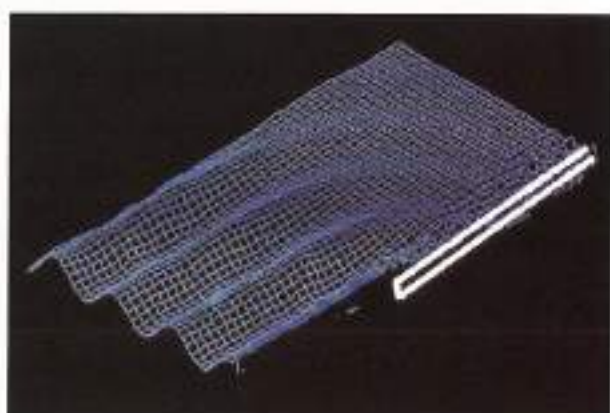


FIGURA 5. Vista tridimensional de la difracción del oleaje mediante un obstáculo.

tensión en elasticidad. En particular es aplicable la construcción geométrica del círculo de Mohr.

En el desarrollo de los diferentes modelos de circulación en las zonas costeras próximas a la playa la componente impulsora aparece siempre bajo la forma de la divergencia del tensor de radiación. Por lo tanto, el transporte de sedimentos y la sobrelevación son proporcionales a las componentes de dicha divergencia.

La aplicación inmediata e interesante es el estudio del tensor de radiación en coordenadas curvilíneas ortogonales, que en algunos casos describen más aproximadamente el fenómeno de la propagación del oleaje. En particular la aplicación de las coordenadas polares al caso simple de la difracción producida por un obstáculo arroja mucha luz sobre la dinámica sedimentaria de las playas a resguardo de promontorios u obras artificiales. Con el uso de coordenadas curvilíneas apropiadas la circulación sedimentaria en las áreas costeras se convierte en un problema sencillo fácilmente abordable.

8. BIBLIOGRAFÍA

- GRIMSHAW, R.; PEI SUM; QIN SUDI and TANG SHIMIN (1993). The generation of edge waves by radiation stress. *Continental Shelf Research* Vol 13, No. 7 pp 777-802.
- LECHUGA ÁLVARO, A. (1997). Corrientes de retorno (rip currents) y ondas de orilla en playas. *Ingeniería Civil* Nº 107 pp 89-93.
- LONGUET-HIGGINS, M. S. and R. W. STEWART (1964). Radiation stresses in water waves: a physical discussion, with applications. *Deep sea Research*. Vol II. pp 529-562.
- LIU, P. L. F. and R. A. DALRYMPLE (1978). Bottom frictional stresses and longshore currents due to waves with large angles of incidence. *Journal of Marine Research* pp 357-375.
- SMITH J. M.; M. LARSON and N. KRAUS (1993). Longshore Current on a Barred Beach: Field Measurements and Calculation. *Journal of Geophysical Research* Vol. 98 C/2. pp 22717-22723.
- STIVE, M. J. F. and H. G. WINDE (1982). A study of radiation stress and set-up in the nearshore region. *Coastal Engineering*, 6,1. pp 1-26.
- SVENDSEN IB. A. (1992). Hydrodynamics of the Surf Zone. *Short Course ICCR*, 92, pp 109-145.

BUENA QUÍMICA



En Bettor MBT, S.A., como empresa dedicada a la fabricación de productos químicos para la construcción, sabemos la importancia que tiene la buena química. Un año después de la fusión entre Bettor y MBT, los resultados obtenidos nos han situado en una privilegiada posición de liderazgo en el sector. La química ha funcionado.

La buena química entre dos excelentes grupos de profesionales nos ha permitido mejorar y agilizar nuestros procesos productivos, informáticos y logísticos, aumentando la capacidad de servicio y suministro. También contribuye a este éxito la importante labor que realizan nuestros dos centros de I+D, pioneros en la investigación y desarrollo de nuevos productos y sus aplicaciones para la construcción.

Hay una química inmejorable con nuestros clientes y amigos, gracias a la atención personal de nuestro gran equipo de expertos, al día en las últimas innovaciones tecnológicas, dispuestos a escuchar, orientar y buscar conjuntamente la mejor solución a cada caso planteado.

La buena química es, por supuesto, la base de nuestros productos de alta calidad. Productos competitivos que responden a las necesidades de un mercado exigente y, a la vez, a nuestro compromiso para mantener un perfecto equilibrio con el medio ambiente que nos rodea.

En Bettor MBT, S.A., la buena química nos ha permitido llegar a lo más alto y contribuir al desarrollo de la industria nacional de la construcción.

BETTOR
PRODUCTOS QUÍMICOS
PARA LA CONSTRUCCIÓN

MBT
Master Builders
Technologies