

# Aplicación de técnicas G.P.S. a la determinación de la ondulación del geoide en la zona central asturiana

BENJAMÍN SÁNCHEZ FERNÁNDEZ; ABEL CAMBLOR ORDIZ;  
DELFIN PUENTE RODRÍGUEZ; LUIS CÁNDIDO GARCÍA GARCÍA (\*)

**RESUMEN** En este artículo proponemos varios métodos para la determinación de la ondulación del geoide a partir de las coordenadas de varios vértices geodésicos de la zona central de Asturias. Las coordenadas a utilizar son, por una parte, las obtenidas con equipos G.P.S. y por otra las suministradas por el INSTITUTO GEOGRÁFICO NACIONAL. La obtención de un modelo de geoide para esta zona, permitirá obtener en ella cotas ortométricas (con respecto al geoide) en el caso de utilizar la técnica G.P.S. para mediciones topográficas.

## USING G.P.S. TECHNIQUES IN THE DETERMINATION OF THE GEOID ONDULATION IN THE CENTRAL PART OF ASTURIAS

**ABSTRACT** In this article we propose various methods for the determination of the geoid ondulation using several geodetic apex coordinates in the central part of Asturias. The coordinates we make use are getting with G.P.S. equipment's joint with others given from National Geographic Institute, both for the same points. Once the geodetic model is obtained we will be able to get orthometric heights in this area of Asturias (with respect to the geoid), if we use the G.P.S. techniques for topographic measurements.

**Palabras clave:** G.P.S.; Geoide; Topografía.

### 1. INTRODUCCIÓN

La técnica G.P.S. permite calcular con precisión la posición relativa de puntos en tierra, mar o en el espacio, en los que se coloca un equipo de recepción G.P.S., respecto de otros en los que también se sitúa otro receptor. Para ello es necesario conocer las posiciones instantáneas de un conjunto de satélites (constelación NAVSTAR) respecto a un sistema de referencia fijo de coordenadas. Esta técnica de medición está basada fundamentalmente en el cálculo de distancias entre los receptores y los diferentes satélites, de modo que para determinar la posición relativa de un punto respecto de otro fijo, se precisa el conocimiento de la posición instantánea de los satélites y la precisa determinación del tiempo de tránsito de la señal entre el satélite y receptor.

Mediante mediciones G.P.S. obtenemos las coordenadas cartesianas tridimensionales de un punto (X, Y, Z); posteriormente por medio de la correspondiente transformación las podemos convertir en coordenadas elipsoidales ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ), donde la altura  $h$  se mide con respecto al elipsoide de referencia. Estas coordenadas podemos transformarlas en planas por medio de una proyección, que en este caso será la UTM (Universal Transversa de Mercator), obteniéndose las

coordenadas del punto en este sistema ( $x_{UTM}$ ,  $y_{UTM}$ ,  $h$ ) aunque la altura  $h$  continua midiéndose con respecto al elipsoide de referencia.

La altura sobre el elipsoide se relaciona con la altura sobre el geoide a través de la fórmula:

$$h = H \cos \epsilon + N$$

El ángulo  $\epsilon$  expresa la desviación existente entre la normal al elipsoide y la normal al geoide para un mismo punto de la superficie terrestre. Su valor no excede de  $30''$  en la mayor parte de las áreas, de manera que para un valor  $H$  de 8000 m se tiene un valor de  $H \cos \epsilon$  de 7999,999915 m, es decir, si despreciamos el  $\cos \epsilon$ , cometemos un error del orden de las centésimas de milímetro que es perfectamente asumible. Por este motivo reemplazaremos la fórmula anterior por:

$$h = H + N$$

El valor de  $N$ , es decir la diferencia entre la cota elipsoidal y la cota ortométrica, se conoce con el nombre de *ondulación del geoide*. Si conocemos la ondulación del geoide en un punto y la altura sobre el elipsoide, obtenida ésta por medición G.P.S., podremos conocer la altura sobre el geoide. Y al revés, si conocemos la cota ortométrica en un punto estaremos en condiciones de conocer la ondulación del geoide en el mismo.

Todos los proyectos de ingeniería requieren el uso de cotas con respecto al geoide, y todos los vértices a utilizar

(\*) Universidad de Oviedo.

como bases de partida deben estar dotados de cotas con respecto al mismo, es decir, cotas ortométricas.

El problema fundamental con el que se va a encontrar cualquier usuario de G.P.S. para su utilización práctica en la medición de desniveles, es el desconocimiento de la undulación del geode en la zona en la cual va a trabajar. Los modelos de geode existentes son a gran escala y, por lo tanto, su utilización no es adecuada en el caso en que sea necesaria una precisión elevada. Por este motivo, si se piensa realizar la topografía de un proyecto por medio del G.P.S., lo primero que se debe hacer es dotar a la zona de trabajo de un modelo de geode, acorde con la precisión que se desee alcanzar posteriormente en la realización de los distintos trabajos altimétricos.

## 2. DETERMINACIÓN DE LA ONDULACIÓN DEL GEOIDE MEDIANTE MEDICIONES G.P.S. - MODELOS DE GEOIDE

Se puede obtener una primera aproximación del modelo de geode mediante una transformación Helmert tridimensional. Para ello supongamos que disponemos de una serie de puntos con coordenadas en el sistema G.P.S. y en el sistema local de coordenadas U.T.M., con las alturas referidas al elipsoide en el primero de ellos y al geode en el segundo, y sea un punto cuyo vector de posición en cada uno de ellos viene dado por  $\vec{X}$  y  $\vec{X}_T$  respectivamente. La transformación de Helmert entre los dos sistemas se formula a través de la expresión:

$$\vec{X}_T = \vec{g} + \mu \vec{R} \vec{X}$$

donde  $\vec{g}$  es un vector de traslación,  $\mu$  es un factor de escala y  $\vec{R}$  es una matriz de giro.

El problema que se plantea es calcular los parámetros de transformación de tal manera que mediante la aplicación de éstos parámetros, dado un punto con cota elipsoidal se pueda obtener la correspondiente geoidal u ortométrica. Los parámetros de transformación vienen dados por un vector de desplazamiento, un factor de escala y una matriz de giro, con lo que se intenta, por medio de los mismos, superponer de forma óptima ambos sistemas. Evidentemente de esta manera más que determinar de una forma precisa la undulación del geode en una zona, obtendremos lo que podemos denominar una *tendencia* lineal y en una sola dirección.

Para la obtención precisa de la undulación debemos recurrir al cálculo de un modelo de geode apropiado a la zona en cuestión. El primer paso a dar para el establecimiento de un modelo de geode, es el conocimiento en todos los puntos de una malla de las cotas con respecto al geode y con respecto al elipsoide. La diferencia entre estas dos cotas será la distancia a la que se encuentre el geode del elipsoide en cada uno de los puntos. Si por medio de cualquier método matemático adecuado somos capaces de extrapolar esta undulación del geode al resto de los puntos interiores a la malla, o exteriores pero cercanos a la misma, habremos determinado un modelo de geode para la zona en cuestión.

La precisión de este modelo, de la cual dependerá la del resto del trabajo, estará en función de la exactitud en la determinación de la undulación en los puntos de la malla y de la bondad del método matemático elegido para el tratamiento de los datos.

Se puede pensar en la existencia de muchos métodos para determinar el modelo de geode. Nos vamos a centrar en tres métodos básicos, que podemos juzgar que son los más adecuados, y que a priori nos definirían el geode con una precisión diferente. Estos serían los siguientes:

- A cada punto se le asocia una diferencia geode-elipsoide igual a la que existe en el punto más próximo a él, y en el que ésta sea conocida.
- A cada punto se le asocia una diferencia geode-elipsoide obtenida como media ponderada de las existentes en los puntos más próximos en los cuales se conozca esta diferencia. Sea P el punto en el que desconocemos la distancia geode-elipsoide, y sean A, B y C los puntos en los cuales conocemos este dato. Llamando N a la undulación del geode y  $d_A$ ,  $d_B$ ,  $d_C$ , las distancias de P a los puntos A, B, y C respectivamente, definiremos este modelo de geode de la siguiente manera:

$$N_P = [N_A / d_A + N_B / d_B + N_C / d_C] / (1/d_A + 1/d_B + 1/d_C)$$

La precisión de este modelo, por lo menos a priori, debería ser superior a la dada por el modelo dado en el apartado A.

De forma general podríamos cambiar el modelo anterior, y asignar como pesos, en lugar del inverso de la distancia, el inverso de la distancia elevada a una potencia:

$$N_P = [N_A / d_A^n + N_B / d_B^n + N_C / d_C^n] / (1/d_A^n + 1/d_B^n + 1/d_C^n)$$

- Un tercer método consistiría en hacer pasar una superficie de orden "m", por los "n" puntos de diferencia elipsoide-geode conocida, de modo que esta superficie proporcionase la undulación del geode con respecto al elipsoide en cualquier otro punto. Su expresión vendría dada por:

$$N_P = a_{00} X^0 + a_{01} X^{0-1} Y + a_{02} X^{0-2} Y^2 + \dots + a_{1m-1} X Y^{m-1} + a_{1m} Y^m + \\ + a_{20} X^2 + a_{21} X^{2-1} Y + a_{22} X^{2-2} Y^2 + \dots + a_{2m-1} X^2 Y^{m-1} + a_{2m} X^2 Y^m + \\ + a_{30} X^3 + a_{31} X^{3-1} Y + a_{32} X^{3-2} Y^2 + \dots + a_{3m-1} X^3 Y^{m-1} + a_{3m} X^3 Y^m + \\ + a_{00} Y^2 + a_{01} X Y + a_{02} Y^2 + a_{13} X + a_{14} Y + a_{15}$$

En teoría, cuanto mayor sea el orden "m" de esta superficie, mayor sería la precisión con que esta se adapte a la superficie real que define la undulación del geode. Pero evidentemente, a mayor orden mayor número de coeficientes incógnitas a determinar, por lo tanto el orden vendrá dado por el número de puntos en los cuales conociéramos ambas cotas.

El número de coeficientes  $a_{ij}$  de la ecuación anterior se calcula mediante la expresión:

$$C(a_{ij}) = (m+2)(m+1)/2$$

En el caso de que se quieran determinar todos los coeficientes de la expresión, debe cumplirse que:

$$C(a_{ij}) \leq n$$

Por otra parte, no debemos perder de vista el hecho de que las cotas ortométricas suministradas por el Instituto Geográfico Nacional para los vértices geodésicos tienen precisiones en torno a los 10-20 cm, y por lo tanto, esta será la mayor precisión que podamos obtener a la hora de determinar la undulación del geode, en el caso de realizar las mediciones sobre vértices geodésicos. Los residuos que se consiguen, aproximando el modelo de geode con superficies de 2.º o 3.º orden, se ha comprobado que no superan en mucho los 10 cm, con lo que, no se obtendría una aproximación mejor del modelo de geode recurriendo a superficies de mayor grado, y en cambio sí se podrían tener errores considerables a la hora de determinar la undulación en puntos distantes de los que han servido como base para obtener los coeficientes de la ecuación.

### 3. APLICACIÓN A LA DETERMINACIÓN DE LA ONDULACIÓN DEL GEOIDE EN LA ZONA CENTRAL ASTURIANA

En primer lugar se procedió a la medición con dos receptores G.P.S., estacionándolos en una serie de vértices de la red del Instituto Geográfico Nacional, de acuerdo con el esquema mostrado en la figura 1.

Esto permitió calcular para cada uno de ellos sus coordenadas G.P.S. del sistema EUREF-89, arrastrándolas a partir del vértice de Tazones, cuyas coordenadas en el mencionado sistema son:

|                   |                                          |
|-------------------|------------------------------------------|
| Latitud:          | 43° 32' 48,24606" N                      |
| Longitud:         | 5° 24' 22,67298" W                       |
| Cota elipsoidal:  | 187,968 m (Referida al elipsoide WGS-84) |
| Cota ortométrica: | 135,270 m                                |

Como ya se ha mencionado, una de las formas de determinar la ondulación del geode consiste en calcular los parámetros que definen la transformación de Helmert.

Para resolver el problema debemos conocer las coordenadas de una serie de puntos en ambos sistemas. Por una parte conocemos las coordenadas G.P.S. que hemos obtenido anteriormente. Por otra parte disponemos de coordenadas U.T.M. en los mismos puntos, suministradas por el Instituto Geográfico y cuyas cotas están referida al geode.

Inicialmente se transforman estas coordenadas U.T.M. con cotas referidas al geode, a un sistema cartesiano geocéntrico, para posteriormente calcular los valores de los parámetros necesarios para superponer ambos sistemas.

Evidentemente, a base de esta transformación, nunca podremos llegar a superponer totalmente un sistema con otro, apareciendo diferencias a la hora de aplicarla sobre los mismos puntos que sirvieron para el cálculo de los parámetros de transformación.

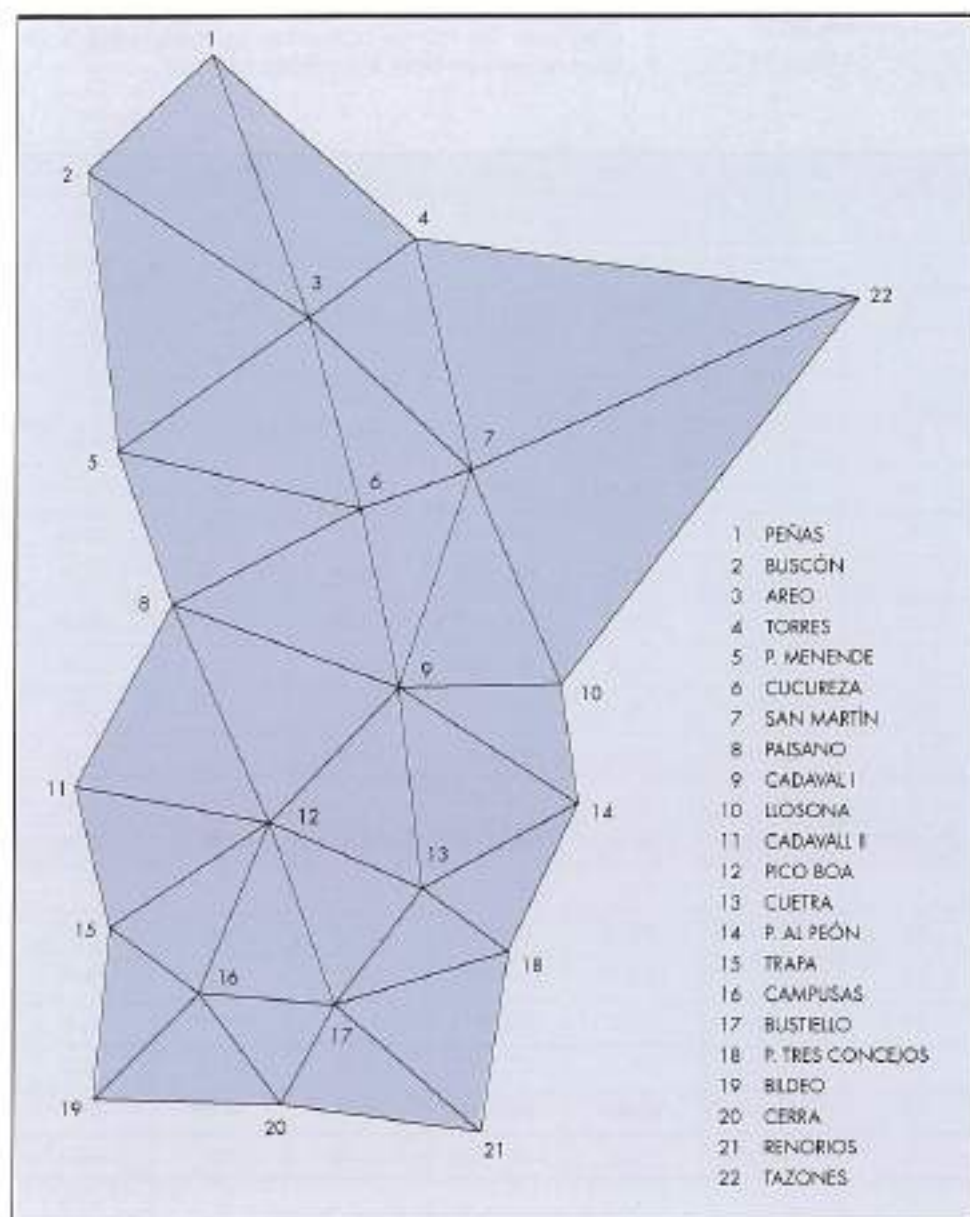


FIGURA 1.

Los dos sistemas que sirven como base para el cálculo de los parámetros son, por una parte, las coordenadas G.P.S. calculadas (sistema A), y por otra parte, las coordenadas UTM con cotas referidas al geoide, y transformadas a un sistema cartesiano geocéntrico. (Sistema B).

Tendremos por lo tanto, un sistema de 66 ecuaciones, tres por cada par de puntos disponible, y 7 incógnitas, del cual, y tras el correspondiente proceso de ajuste, obtendremos los siguientes parámetros de transformación:

Origen de la rotación:

|         |               |
|---------|---------------|
| $X_0$ : | 4622451.570 m |
| $Y_0$ : | -465754.629 m |
| $Z_0$ : | 4356274.345 m |

Número de puntos comunes: 22

|                   |              |
|-------------------|--------------|
| Desplazamiento dX | 102.661 m    |
| Desplazamiento dY | 106.576 m    |
| Desplazamiento dZ | 128.132 m    |
| Rotación eje X    | 0.715763 [°] |

|                  |                  |
|------------------|------------------|
| Rotación eje Y   | -8.319739 [°]    |
| Rotación eje Z   | -1.505143 [°]    |
| Factor de escala | -24.867446 (ppm) |

Aplicando estos parámetros de transformación a las coordenadas de los puntos en el sistema A, se obtiene una primera aproximación al modelo de geoide. La diferencia entre las coordenadas transformadas y las reales está, para la mayor parte de los puntos, entre 10 y 20 cm. Esta aproximación al modelo de geoide dada por la transformación de Helmert, tiene el inconveniente de que solo permite aproximar adecuadamente la ondulación si está contenida en un plano. En el caso que nos ocupa, al no ser así, en algunos puntos se encuentran diferencias de hasta 70 cm. con la ondulación real, tal como se muestra en la tabla 1.

En ella se recogen los siguientes datos para cada vértice: la cota elipsoidal, la geoidal, la cota geoidal dada por la transformación de Helmert, la diferencia entre la cota elipsoidal y la geoidal, la diferencia entre la elipsoidal y la geoidal dada por la transformación de Helmert y la diferencia entre estas dos últimas cantidades, así como la desviación típica ( $\sigma$ ) para los datos de la última columna.

| VERTICE  | h[ELIPSOIDE] | h[GEOIDE] | h[HELMERT] | dh[real] | dh[Helmert] | dh[Hlt-dh] |
|----------|--------------|-----------|------------|----------|-------------|------------|
| 1        | 162.6890     | 110.9     | 111.1123   | 51.79    | 51.58       | -0.21      |
| 2        | 127.3300     | 75.3      | 75.3528    | 52.03    | 51.98       | -0.05      |
| 3        | 317.1250     | 264.8     | 264.7975   | 52.32    | 52.33       | 0.00       |
| 4        | 175.8120     | 124.1     | 123.7956   | 51.71    | 52.02       | 0.30       |
| 5        | 535.2960     | 482.4     | 482.4374   | 52.90    | 52.86       | -0.04      |
| 6        | 353.3120     | 300.8     | 300.4022   | 52.51    | 52.91       | 0.40       |
| 7        | 571.3550     | 518.8     | 518.6211   | 52.56    | 52.73       | 0.18       |
| 8        | 690.0650     | 636.8     | 636.7418   | 53.27    | 53.32       | 0.06       |
| 9        | 566.5170     | 513.2     | 513.0524   | 53.32    | 53.46       | 0.15       |
| 10       | 651.7890     | 598.7     | 598.4169   | 53.09    | 53.37       | 0.28       |
| 11       | 624.0010     | 570.0     | 570.0490   | 54.00    | 53.95       | -0.05      |
| 12       | 712.3170     | 658.4     | 658.3503   | 53.92    | 53.97       | 0.05       |
| 13       | 866.1990     | 812.2     | 812.0991   | 54.00    | 54.10       | 0.10       |
| 14       | 789.9180     | 736.4     | 736.1733   | 53.52    | 53.74       | 0.23       |
| 15       | 732.1330     | 677.5     | 677.7477   | 54.63    | 54.39       | -0.25      |
| 16       | 942.8060     | 888.2     | 888.2526   | 54.61    | 54.55       | -0.05      |
| 17       | 944.0520     | 889.6     | 889.5331   | 54.45    | 54.52       | 0.07       |
| 18       | 1150.1170    | 1095.9    | 1095.8528  | 54.22    | 54.26       | 0.05       |
| 19       | 1297.0310    | 1241.7    | 1242.0712  | 55.33    | 54.96       | -0.37      |
| 20       | 1350.4270    | 1295.6    | 1295.5496  | 54.83    | 54.88       | 0.05       |
| 21       | 1388.8270    | 1333.8    | 1333.9653  | 55.03    | 54.86       | -0.17      |
| 22       | 187.9680     | 135.3     | 135.9958   | 52.70    | 51.97       | -0.73      |
| $\sigma$ |              |           |            |          |             | 0.24       |

TABLA 1.

Por otra parte, se han obtenido otras aproximaciones al modelo de geode por medio de superficies de 1.<sup>o</sup>, 2.<sup>o</sup> y 3.<sup>o</sup> orden. El cálculo de los coeficientes de estas ecuaciones, se lleva a cabo por medio del método de los mínimos cuadrados, ya que el número de ecuaciones (66) es siempre superior al de incógnitas, y los resultados obtenidos son los siguientes:

• COEFICIENTES PARA LA ECUACIÓN DE 1.<sup>o</sup> ORDEN (PLANO):

|             |                        |
|-------------|------------------------|
| $a_{1,0} =$ | $-9,508 \cdot 10^{-6}$ |
| $a_{0,1} =$ | $-5,906 \cdot 10^{-6}$ |
| $a_{0,2} =$ | $5,442 \cdot 10^{-6}$  |

• COEFICIENTES PARA LA ECUACIÓN DE 2.<sup>o</sup> ORDEN:

|             |                        |
|-------------|------------------------|
| $a_{2,0} =$ | $1,166 \cdot 10^{-9}$  |
| $a_{2,1} =$ | $1,515 \cdot 10^{-10}$ |
| $a_{2,2} =$ | $3,868 \cdot 10^{-10}$ |
| $a_{1,0} =$ | $-2,388 \cdot 10^{-5}$ |
| $a_{0,1} =$ | $-7,576 \cdot 10^{-5}$ |
| $a_{0,2} =$ | $5,436 \cdot 10^{-5}$  |

• COEFICIENTES ECUACIÓN DE 3.<sup>o</sup> ORDEN:

|             |                         |
|-------------|-------------------------|
| $a_{3,0} =$ | $6,609 \cdot 10^{-14}$  |
| $a_{3,1} =$ | $-3,690 \cdot 10^{-14}$ |
| $a_{3,2} =$ | $6,285 \cdot 10^{-15}$  |
| $a_{2,0} =$ | $3,324 \cdot 10^{-10}$  |
| $a_{2,1} =$ | $9,023 \cdot 10^{-10}$  |
| $a_{2,2} =$ | $-2,880 \cdot 10^{-10}$ |
| $a_{1,0} =$ | $-2,880 \cdot 10^{-10}$ |
| $a_{0,1} =$ | $3,096 \cdot 10^{-10}$  |

|             |                        |
|-------------|------------------------|
| $a_{1,0} =$ | $-3,040 \cdot 10^{-5}$ |
| $a_{0,1} =$ | $-7,170 \cdot 10^{-5}$ |
| $a_{0,2} =$ | $5,438 \cdot 10^{-5}$  |

Las desviaciones de la ondulación predicha por estos modelos, con respecto a la real se reflejan en la tabla 2, en la que se han recogido para cada vértice los siguientes datos: la cota elipsoidal, la cota geoidal, las diferencias entre la elipsoidal y la geoidal dadas por las superficies de 1.<sup>o</sup>, 2.<sup>o</sup> y 3.<sup>o</sup> orden y las diferencias entre las ondulaciones obtenidas de estas superficies y la ondulación real.

En estas tablas se observa, que para el caso del modelo de geode definido por la transformación de Helmert o por la superficie de 1.<sup>o</sup> orden, las diferencias entre la ondulación dada por Helmert y la real, presentan una desviación típica de 24 cm. Para el caso de la superficie de 2.<sup>o</sup> orden esta desviación típica baja a 10 cm y a 8 cm para la de 3.<sup>o</sup> orden.

También se puede observar que los valores máximos de estas diferencias no superan los 20 cm tanto en la de 2.<sup>o</sup> orden como de 3.<sup>o</sup> orden, en contraposición en lo que ocurría en el caso de las desviaciones por transformación de Helmert ó 1.<sup>o</sup> orden, en que alcanzaban los 73 cm.

Estos datos reflejan que la ondulación dada por las superficies se adaptan mejor a la ondulación real cuanto mayor sea el orden de las mismas. Dado que la exactitud de las cotas ortométricas suministradas por el Instituto Geográfico Nacional están en el orden de 10 cm, no tiene sentido ir a superficies de 4.<sup>o</sup> y 5.<sup>o</sup> orden, ya que no estaríamos ganando precisión, y en cambio sí podríamos dar lugar a errores importantes en puntos alejados de la zona objeto de estudio.

Para mejor interpretación de los datos obtenidos se incluyen dos gráficos. En el primero de ellos se representan los valores de la ondulación real y la dada por las superficies de 1.<sup>o</sup>, 2.<sup>o</sup> y 3.<sup>o</sup> orden, para los vértices 1, 3, 6, 9, 13, 17 y 20, que están aproximadamente situados en dirección Norte-Sur.

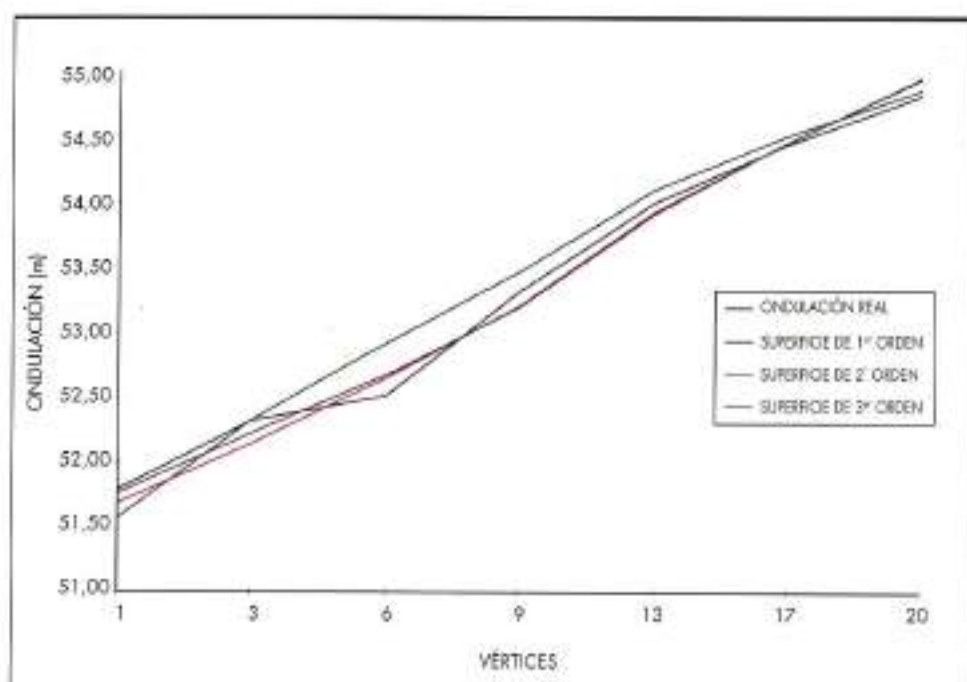


GRÁFICO 1.

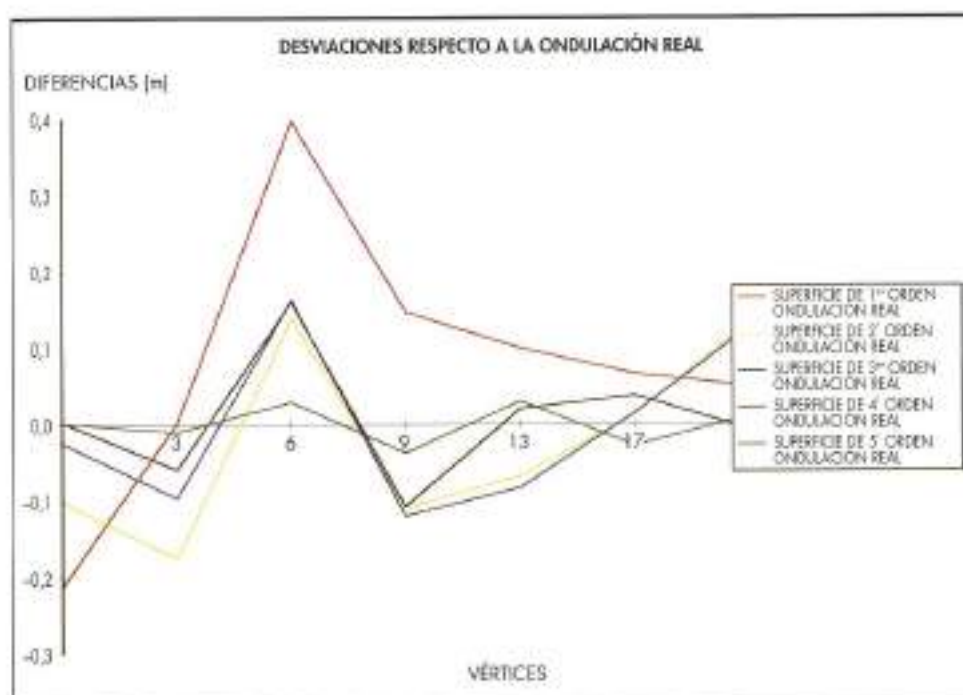


GRÁFICO 2.

| VERTICE  | N(EIPSOIDE) | h(GEOIDE) | dh(real) | dh(1º) | dh(2º) | dh(3º) | dh(1º)-dh(real) | dh(2º)-dh(real) | dh(3º)-dh(real) |
|----------|-------------|-----------|----------|--------|--------|--------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1        | 162.6890    | 110.9     | 51.79    | 51.57  | 51.69  | 51.76  | -0.22           | -0.10           | -0.02           |
| 2        | 127.3300    | 75.3      | 52.03    | 51.98  | 52.16  | 52.05  | -0.05           | 0.13            | 0.02            |
| 3        | 317.1250    | 264.8     | 52.32    | 52.33  | 52.15  | 52.23  | 0.01            | -0.17           | -0.10           |
| 4        | 175.8120    | 124.1     | 51.71    | 52.02  | 51.89  | 51.83  | 0.31            | 0.18            | 0.12            |
| 5        | 535.2960    | 482.4     | 52.90    | 52.86  | 52.84  | 52.87  | -0.04           | -0.05           | -0.02           |
| 6        | 353.3120    | 300.8     | 52.51    | 52.92  | 52.65  | 52.68  | 0.41            | 0.14            | 0.16            |
| 7        | 571.3550    | 518.8     | 52.56    | 52.73  | 52.51  | 52.40  | 0.17            | -0.05           | -0.15           |
| 8        | 690.0650    | 636.8     | 53.27    | 53.32  | 53.21  | 53.31  | 0.05            | -0.05           | 0.04            |
| 9        | 566.5170    | 513.2     | 53.32    | 53.47  | 53.21  | 53.20  | 0.15            | -0.11           | -0.12           |
| 10       | 651.7890    | 598.7     | 53.09    | 53.37  | 53.21  | 53.14  | 0.28            | 0.12            | 0.05            |
| 11       | 624.0010    | 570.0     | 54.00    | 53.96  | 54.09  | 54.06  | -0.04           | 0.09            | 0.06            |
| 12       | 712.3170    | 658.4     | 53.92    | 53.97  | 53.82  | 53.88  | 0.05            | -0.10           | -0.03           |
| 13       | 866.1990    | 812.2     | 54.00    | 54.10  | 53.93  | 53.92  | 0.10            | -0.07           | -0.08           |
| 14       | 789.9180    | 736.4     | 53.52    | 53.75  | 53.64  | 53.64  | 0.23            | 0.12            | 0.12            |
| 15       | 732.1330    | 677.5     | 54.63    | 54.39  | 54.55  | 54.56  | -0.24           | -0.08           | -0.08           |
| 16       | 942.8060    | 888.2     | 54.61    | 54.56  | 54.63  | 54.66  | -0.05           | 0.02            | 0.05            |
| 17       | 944.0520    | 889.6     | 54.45    | 54.52  | 54.47  | 54.47  | 0.07            | 0.01            | 0.02            |
| 18       | 1150.1170   | 1095.9    | 54.22    | 54.26  | 54.17  | 54.18  | 0.04            | -0.04           | -0.03           |
| 19       | 1297.0310   | 1241.7    | 55.33    | 54.95  | 55.34  | 55.28  | -0.38           | 0.01            | -0.05           |
| 20       | 1350.4270   | 1295.6    | 54.83    | 54.87  | 54.97  | 54.96  | 0.04            | 0.14            | 0.13            |
| 21       | 1388.8270   | 1333.8    | 55.03    | 54.86  | 54.93  | 54.97  | -0.17           | -0.09           | -0.06           |
| 22       | 187.9680    | 135.3     | 52.70    | 51.97  | 52.64  | 52.69  | -0.73           | -0.06           | -0.01           |
| $\sigma$ |             |           |          |        |        |        | 0.24            | 0.10            | 0.08            |

TABLA 2.

En el segundo se muestra, para los mismos vértices, las diferencias entre la ondulación real y las dadas por las superficies de 1.<sup>er</sup> a 5.<sup>o</sup> orden, apreciándose que para este último orden las diferencias son mínimas.

#### 4. CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos en el trabajo realizado, se obtiene como primera conclusión que, si se define una transformación de Helmert, es posible obtener una aproximación lineal de la ondulación del geode. En el caso de zonas de trabajo no muy amplias, sería éste el procedimiento más adecuado y simple para poder obtener cotas ortométricas a partir de mediciones G.P.S., con la ventaja añadida de que no es necesario el disponer de muchos puntos comunes con coordenadas G.P.S. y U.T.M. En caso de áreas más extensas, los errores aumentan considerablemente ya que por este procedimiento la ondulación se ajusta mediante un plano.

Para trabajos que se desarrollen en zonas más extensas es necesario definir la ondulación mediante superficies de segundo, tercero u orden superior, aumentando la precisión de los resultados con el orden de la superficie elegida. En este sentido, el utilizar una superficie de segundo orden implica disponer como mínimo de seis puntos comunes con coordenadas en los dos sistemas, que para el caso de tercer orden se eleva a diez. En cualquier caso hay que tener en cuenta que si se utilizan vértices geodésicos como puntos comunes y dado que la precisión de sus cotas ortométricas oscila entre diez y veinte centímetros, no compensa utilizar superficies de orden superior al tercero.

La utilización de superficies de orden elevado puede dar lugar a errores importantes en la ondulación del geode, que podemos denominar efecto de borde, en el caso de extrapolar

los resultados obtenidos a áreas adyacentes a la zona de trabajo donde se han realizado las mediciones.

Por último, reseñar que si se desea obtener un geode definido con una precisión centimétrica, los puntos comunes a utilizar deben disponer de una cota ortométrica precisa, como es el caso de los puntos de la Red de Nivelación de Alta Precisión (N.A.P.) del Instituto Geográfico Nacional.

#### BIBLIOGRAFÍA

- BARBADILLO FERNÁNDEZ, A. "Breve relación de la nueva Red Geodésica G.P.S. española". Topografía y Cartografía, pág. 22-23, Madrid, 1995.
- CAPDEVILA SUBIRANA, J. "Redes G.P.S. de orden cero en España. Estado actual y tendencias". Segunda Semana Geomática de Barcelona, pág. 68-72, Barcelona, 1995.
- COLLINS, J. "Fundamentals of G.P.S. baseline and height determinations". Journal of Surveying Engineering, American Society of Civil Engineers, 115 (2), pág. 223-235, 1989.
- PINA PATÓN, B. "Determinación de la forma y dimensiones de la Tierra a partir del tratamiento de los observables físicos evaluados en su superficie. Aplicación al cálculo de un geode local". Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Departamento de Física Aplicada, 1995.
- QUIRÓN, C. "Centimeter-level surveys in seconds: Formulations and analysis and use". Report 70, University of Maine, Dept. Surveying Engineering, 1987.
- RODRÍGUEZ VELASCO, G. "Estudio de la precisión interna de un geode gravimétrico en las proximidades de la costa". Segunda Semana Geomática de Barcelona, pág. 84-97, Barcelona, 1995.
- SEVILLA, M. J. "IBERGEO 1994A Determinación del geode ibérico (Estudio del geode y de la superficie topográfica marina en la Península Ibérica y su entorno". Topografía y Cartografía, n.º 61, pág. 9-25, Madrid, 1994.

## Bayer Colector de Aguas Residuales en Valladolid

### LOS REVESTIMIENTOS DE PUR PROTEGEN LAS AGUAS FREÁTICAS

Desde hace más de un año, la ciudad de Valladolid conduce sus aguas residuales hacia la estación depuradora a través de un colector subterráneo. Se trata de un túnel de 5,8 km de longitud y 3,25 m de diámetro que corre paralelo a la orilla izquierda del río Pisuerga. Interiormente está formado por dovelas de hormigón de 2,8 m de diámetro nominal.

El espacio hueco entre la pared del túnel y la superficie exterior de las dovelas se relloró con mortero de cemento. Las juntas entre las dovelas atornilladas fueron selladas con mortero de baja retracción. El túnel se excavó mediante un escudo de presión equilibrada de tierras, sin perturbar el curso normal de la actividad urbana.

#### EL RETO: MEDIO QUÍMICAMENTE AGRESIVO

Las aguas residuales urbanas en Valladolid tienen un contenido relativamente alto de azufre, transformado por las bacterias en ácido sulfúrico biológico, que con el tiempo va corroyendo el hormigón. Por falta de estanqueidad, p. ej. debido a la formación de grietas, las aguas residuales pueden contaminar las aguas freáticas o, viceversa, las aguas del subsuelo pasar al túnel, sobrecargándolo innecesariamente la depuradora.

Por ello, la solución basada conjuntamente con la Junta de Castilla y León y el Ayuntamiento de Valladolid, consistió en que la impermeabilización tuviera suficiente resistencia química y elástica

para poder mantener el colector estanco en caso de fisuración, propiedades que cumple sobradamente el sistema de revestimiento de Kraut Ibérica, formulado con las materias primas de poliuretano Desmedur® y Desmophan® de Bayer.

#### TRES PASOS FIRMES

El revestimiento interior se efectuó en tres fases: primero se inyectó a presión resina de poliuretano monocomponente (PUR-1C) de curado por humedad. Esta líquida se difunde a través de las grietas, que al entrar en contacto con agua forma una espuma flexible endurecida al instante. Luego se dio una imprimación de PUR-1C para sellar los poros del hormigón y servir de capa de fondo al recubrimiento grueso de poliuretano bicomponente (PUR-2C). Esta "piel interna" es dúctil y garantiza una impermeabilización salvaguarda de elevada resistencia a la abrasión.

Los revestimientos de Poliuretano (PUR) de Bayer se distinguen por su alta calidad y rentabilidad. Gracias a la gran variedad de materias primas, con pinturas de PUR pueden resolverse los diversos problemas que se presentan en el campo de los impermeabilizantes flexibles y duraderos. Los revestimientos de la División PUR de Bayer Hispania, S.A. en Barcelona se han experimentado con éxito no solo sobre sustratos minerales-suelos, paredes, terrazas, cubiertas sino también en la protección anticorrosiva del acero.

# HAY CARRETERAS DONDE NI SIQUIERA MODIFAL PODRIA EVITAR EL AQUA-PLANNING.



PERO HAY OTRAS MUCHAS DONDE SI PODRIA. DONDE REDUCIRIA EL NIVEL DE RUIDOS (HASTA 3 DECIBELIOS), DONDE DISMINUIRIA LA FORMACION DE RODERAS Y FISURAS, Y RETRASARIA EL ENVEJECIMIENTO DEL FIRME AUN EN LAS CONDICIONES CLIMATOLOGICAS MAS EXTREMAS. REPSOL PRESENTA MODIFAL, EL PRIMER BETUN MODIFICADO EN EL QUE LA DISPERSION DE LOS POLIMEROS EN EL SENO DE LOS BETUNES ES PERFECTA Y HOMOGENEA. ESTA HOMOGENEIDAD ES LA QUE PERMITE A MODIFAL CONSERVAR INTACTAS SUS PROPIEDADES AUN EN PERIODOS PROLONGADOS DE ALMACENAMIENTO. ALGUNAS VECES HAY QUE CAMBIAR ALGO PARA QUE TODO SIGA IGUAL. NOSOTROS HEMOS MODIFICADO NUESTROS BETUNES PARA SEGUIR SIENDO LIDERES EN ASFALTOS.



**REPSOL PRODUCTOS ASFALTICOS, S. A.**