El método de corrección de velocidades basado en características en problemas de transporte salino

P. ORTIZ (*); O. C. ZIENKIEWICZ (**); E. SÁNCHEZ (*)

RESUMEN Se introduce un modelo de elementos finitos para el cálculo de un amplio rango de problemas de propagación de ondas en profundidades reducidas. El algoritmo presentado puede ser usado en forma explícita, semi-explícita, cuasi y totalmente implícita. La versión semi-explícita demuestra ser económica en problemas caracterizados por números de Froude pequeños. Las óptimas propiedades difusivas del método lo hacen también útil para problemas de altas velocidades tales como flujos supercríticos en estructuras hidraúlicas. En este caso, se recomienda la versión explícita. La denominada forma "cuasi-implícita" considera implícitamente el término de difusión. En este trabajo se muestra esta posibilidad para una ecuación de transporte escalar acoplada a las ecuaciones de profundidades reducidas.

CBS (CHARACTERISTIC BASED SPLIT) ALGORITHM IN HYDRAULIC AND SHALLOW WATER FLOW

ABSTRACT *An efficient finite element model for the computation of a wide range of shallow water problems in introduced. The algorithm presented can be used in an explicit, semi-explicit and in a nearly and fully implicit forms. The semi-explicit version shows a robustness and economy in problems charaterised by low Froude numbers, even for large timesteps. Also, the optimal diffusion properties of the method makes it suitable for very demanding high speed flows such as supercritical flows in hydraulic structures. In this case, an explicit version is recommended. The so-called "nearly" implicit form considers implicitly the diffusion term. Here this possibility is illustrated for a scalar transport equation coupled with the Shallow Water Equations.*

Palabras clave: Elementos finitos; Problemas en profundidades reducidas; Corrección de velocidades.

1. INTRODUCCIÓN

La modelización mediante el método de elementos finitos de las ecuaciones de propagación de ondas en profundidades reducidas en su forma integrada en profundidad es una herramienta útil para un amplio rango de problemas de ingeniería costera, portuaria e hidráulica.

En este trabajo se propone una nueva metodología basada en el método de elementos finitos para la solución de las ecuaciones de profundidades reducidas, denominada método de corrección de velocidades basado en Características. El procedimiento de separación introducido se basa en el método de corrección de velocidades para las ecuaciones de Navier-Stokes para movimientos incompresibles (Chorin, 1968). La extensión de esta técnica a flujos compresibles y flujos en profundidades reducidas (Zienkiewicz et al, 1998, Zienkiewicz et al, 1995), permite una única velocidad característica y por tanto, la aplicación del método Características-Galerkin.

La forma semi-explícita del modelo está definida por el cálculo implícito de la presión. Esta opción proporciona un incremento de tiempo crítico (para convección pura) dependiente de la velocidad de flujo en lugar de la celeridad de la onda como ocurre en forma explícita. Esta propiedad es importante cuando se consideran movimientos con pequeño número de Froude, tal como ocurre en general en corrientes producidas por mareas. En estos problemas puede conseguirse un importante ahorro, obteniéndose en algunos casos, incrementos de tiempo superiores a 20 veces el incremento de tiempo crítico explícito, sin que se vea afectada considerablemente la precisión de los resultados.

Finalmente, puede obtenerse otra formulación del algoritmo cuando se tienen en cuenta los términos difusivos. En esta situación los rangos de viscosidad horizontal utilizados en la práctica (y de difusividad en el caso de problemas de transporte) pueden dar lugar a limites del incremento de tiempo mucho menores que el límite por convección. Para evitar esta restricción, se requiere un cálculo implícito de los términos de difusión.

Este trabajo ha sido presentado en el IV Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Sevilla, 7-10 Junio, 1999.

(*) Centro de Estudios de Puertos y Costas (CEPYC). CEDEX. Ministerio de Fomento.

(**) Institute for Numerical Methods in Engineering. Department of Civil Engineering. University of Wales Swansea, Swansea SA28PP, (UK).

2. ECUACIONES DE PROPAGACIÓN DE ONDAS EN PROFUNDIDADES REDUCIDAS

Las ecuaciones de propagación de ondas en profundidades reducidas en su forma integrada en profundidad pueden ser escritas, utilizando la convención de suma de índices, como:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0$$
$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}+Q_i=0 \qquad [1,2]$$

donde (i, j = 1, 2) y $U_i = hu_i$ (componentes horizontales de velocidad integradas en profundidades) y h (altura total del agua) son las incógnitas. $F_{ij} = hu_iu_j$ es la componente (i) del vector de flujo (j) y la presión p es:

$$p=\frac{1}{2}g(h^2-H^2) \qquad [3]$$

donde H es la profundidad del nivel medio del agua. La profundidad total h puede escribirse como: $h = H + \eta$, donde η es la elevación de la superficie respecto al nivel medio (ver Figura 1). Q_1 representa la componente (i) del vector de términos fuente definido aquí como:

$$Q_1=-g(h-H)\frac{\partial H}{\partial x_1}+g\frac{u|u|}{C^2 g}+r_i-\tau_i \qquad [4]$$

Los términos de la derecha representan, respectivamente, el término fuente debido a la variación de la pendiente del fondo, las fuerzas de fricción (fórmula de Chezy-Manning), la fuerza de Coriolis y la tensión debida al viento. Para ondas largas, la celeridad de la onda está relacionada con la altura del agua según:

$$c^2=\frac{dp}{dh}=gh \qquad [5]$$

3. ALGORITMO DE CORRECCIÓN DE VELOCIDADES

El procedimiento numérico de discretización de las ecuaciones (1) y (2) puede resumirse siguiendo una secuencia similar al método "fractional step":

a) Cálculo explícito de una variable intermedia ΔU^*_i considerando las ecuaciones del momento sin los términos del gradiente de la presión, por medio del método Caracteristicas-Galerkin (Zienkiewicz et al, 1995). Este paso da lugar a:

$$\frac{\Delta U^*_i}{\Delta t}=-\left[\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j}+Q_i\right]^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}\left[u_k\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j}+Q_i+(1-\theta_2)\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)\right]^n \qquad [6]$$

donde (i, j, k = 1, 2). Debe remarcarse que todos los términos de la derecha son calculados en el tiempo: $t = n\Delta t$.

Esta expresión es modificada si se tienen en cuenta los términos difusivos. Su forma se describe en la siguiente sección.

b) Cálculo de los términos de presión, que quedan como:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\Delta p}{\Delta t}-\theta_1\theta_2\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_i}=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}(U_i^n+\theta_1\Delta U_i^*)+\theta_1\Delta t\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \qquad [7]$$

(i = 1, 2); ($0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1$).

Y el cálculo de la nueva elevación de la superficie se realiza utilizando la ecuación (5).

c) Cálculo de la velocidad final, como:

$$\frac{\Delta U_i}{\Delta t}=\frac{\Delta U_i^*}{\Delta t}-\frac{\partial p^n}{\partial x_i}-\theta_2\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_i} \qquad [8]$$

donde la corrección debida a los términos de presión es calculada de nuevo basándonos en la discretización a lo largo de las líneas características (Zienkiewicz et al, 1995).

La forma final de la matriz del algoritmo, después de la discretización espacial es para el primer paso (a):

$$M\Delta U^*=-\Delta t\left[CU^n+MQ^n\right]-$$
$$-\frac{\Delta t^2}{2}\left[K_uU^n+K_pp^n+f_Q\right]+bt1 \qquad [9]$$

donde:

$$M=\int_\Omega N^TNd\Omega$$
$$C=\int_\Omega N^Tu_j\frac{\partial N}{\partial x_j}d\Omega$$
$$K_u=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}(N^Tu_k)\frac{\partial}{\partial x_j}(Nu_j)d\Omega$$
$$K_p=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}(N^Tu_k)\frac{\partial N}{\partial x_j}d\Omega$$

y

$$f_Q=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}(N^Tu_k)Nd\Omega Q_i \qquad [10]$$

y bt1 representa los términos de borde:

$$f_Q=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}(N^Tu_k)Nd\Omega Q_i$$

Para el paso b) (discretización de los términos de presión) la forma final es:

$$bt1=\frac{\Delta t}{2}\int_{\partial\Omega}N^Tu_k\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j}+Q_i\right)^n\cdot n_kd\Gamma \qquad [11]$$

donde ahora:

$$M=\int_\Omega\frac{1}{c^2}N^TNd\Omega$$
$$H=\int_\Omega\frac{\partial N^T}{\partial x_i}\frac{\partial N}{\partial x_i}d\Omega$$

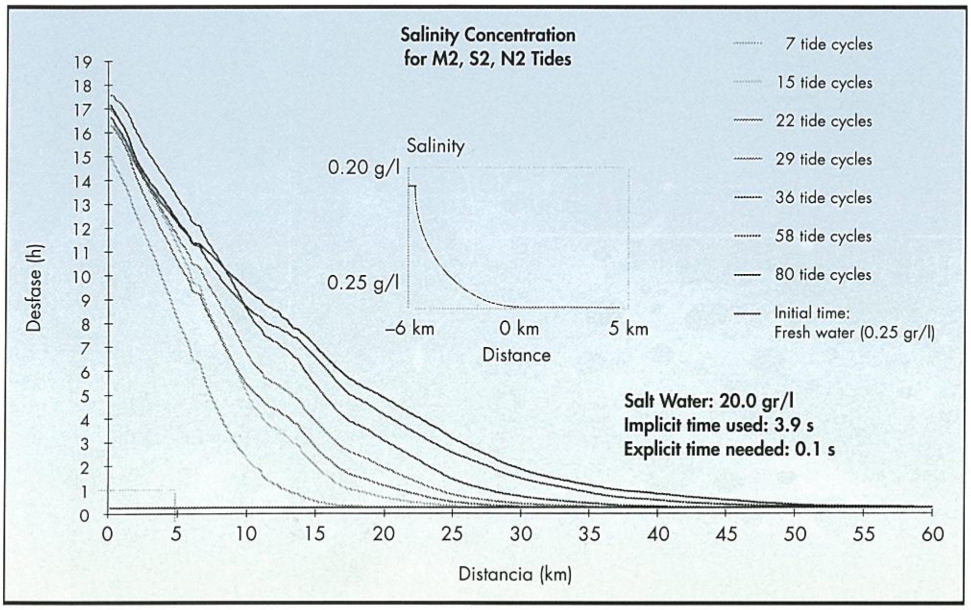

FIGURA 4. Evolución temporal de la concentración media (por periodo de marea M2) de la salinidad a lo largo del eje del río.

CONCLUSIONES

En trabajos previos se ha demostrado la eficiencia y flexibilidad del modelo (CBS) en su aplicación a muy diversos problemas tratados mediante las ecuaciones en profundidades reducidas. En este artículo se extiende el modelo para su aplicación en problemas de transporte de escalares en su forma implícita y se aplica a un caso práctico. La adopción de la forma implícita es necesaria cuando se trata de estudios reales de transporte a largo plazo.

REFERENCIAS

BERMÚDEZ, A. and VÁZQUEZ, M. (1994). "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms". *Computers and Fluids*, 23, 8, 1049-1071.

CHORIN, A. J. (1968). "Numerical Solution of the Navier Stokes Equations", *Math. Comput.*, 22, 745-762.

ZIENKIEWICZ, O. C. and ORTIZ P. (1995). "A split-characteristic based finite element model for the Shallow Water equations", *Int. Journ. Num. Meth. Fluids*, 20, 1061-1080.

ZIENKIEWICZ, O. C.; NITHIARASU, P.; CODINA R.; VÁZQUEZ, M. and ORTIZ, P. (1998) "An efficient and accurate algorithm for Fluid Mechanics problems. The Characteristic based split procedure". (To be published). *Int. Journ.. Num. Meth. Fluids.*