

Columnas a flexo compresión biaxial. Métodos simplificados y ayudas de cálculo

Columns Subjected to Biaxial Flexo-Compression. Simplified Methods and Calculation Aids

Juan José Hernández Santana^{1*}, Claudia Sotolongo Pérez²

Resumen

Es conocido que la mayor parte de las columnas están sometidas a flexo-compresión biaxial. Durante muchos años esta problemática se ha eludido, pues eran predominantes los análisis planos de las estructuras y por otra parte los cálculos de la flexo-compresión biaxial son complejos y las ayudas de cálculo disponibles, exigían del proyectista un dominio del tema muy poco frecuente.

El desarrollo de los programas computacionales para el análisis de estructuras ha eliminado la primera justificación pues facilitan un análisis espacial de los edificios mucho más realista y racional. Entonces se hace más importante contar con procedimientos que faciliten el análisis de las columnas bajo solicitaciones de flexo-compresión biaxial. En este sentido se desarrolla este trabajo que aborda este tema desde dos ángulos: en primer lugar analizar la influencia de la variación del factor de reducción de la capacidad resistente de la sección, ϕ , en función de la inclinación de la carga y la repercusión que esta problemática tiene al utilizar los procedimientos simplificados basados en el Método del Contorno de Carga de Bressler. En segundo orden el desarrollo de Hojas de Cálculo en MathCAD, basadas en la solución detallada de las principales ecuaciones que rigen el comportamiento de la sección y que permiten un análisis más profundo, seguro, confiable y sencillo. Ofreciendo por tanto la posibilidad de la evaluación de diversas soluciones de diseño en corto plazo y contar con una amplia información sobre las características del comportamiento de la sección.

Palabras clave: hormigón armado, flexo-compresión biaxial, columnas.

Abstract

It is known that most columns are subjected to biaxial flexo-compression. For many years this problem has been avoided, for the flat analyzes of the structures were predominant. Moreover, the biaxial flexo-compression calculations are complex and the available design aids required from the designer to master an uncommon subject.

The development of computer programs for the analysis of structures has eliminated the first justification because they facilitate a spatial analysis of buildings much more realistic and rational. In this sense, it becomes more important to have procedures that facilitate the analysis of the columns under biaxial flexo-compression loads. This work approaches the problem from two perspectives. First, it analyzes the influence of the variation of the reduction factor of the resistant capacity of the section, ϕ , depending on the inclination of the load and the repercussion that this problem has in the use of simplifications based on the Bressler Load Contour Method. And second, it also explains the development of calculations aids in MathCAD, based on the detailed solution of the main equations that govern the behavior of the section and allow a deeper, safer, reliable and simple analysis. Thus offering the possibility of evaluating several design solutions in the short term, and having extensive information on the characteristics of the behavior of the section.

Keywords: reinforced concrete, biaxial flexure-compression, columns.

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente se ha evitado el diseño de secciones bajo cargas de flexo-compresión biaxial ya que por lo general solían prevalecer los análisis bidimensionales de las estructuras. Conjuntamente con lo planteado anteriormente los procedimientos mediante los cuales es explicada

la misma son complejos a causa de las múltiples formas que puede adoptar el bloque comprimido de hormigón y las diversas distribuciones de refuerzo, lo cual provoca que cada una de estas variantes evolucione en una solución diferente.

En el pasado siglo las ayudas de cálculo disponibles, gráficas o semi-gráficas en su mayoría, requerían del proyectista un dominio del tema muy poco frecuente y por otra parte acarreaban las imprecisiones que acompañan a este tipo de procedimiento.

El amplio despliegue que se ha desarrollado en los últimos tiempos en cuanto a softwares computacionales relacionados con el análisis y diseño de estructuras ha erradicado la primera de las razones mencionadas ya que estos permiten un análisis en tres dimensiones de las

* Autor de contacto: jjhernandez@uclv.edu.cu

¹ Ingeniero Civil. Doctor en Ciencias Técnicas y Profesor Titular. Departamento de Ingeniería Civil. Facultad de Construcciones. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

² Ingeniera Civil. Departamento de Ingeniería Civil. Facultad de Construcciones. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

edificaciones con mayor racionalidad y realismo. Estas herramientas contribuyen a introducir mediante mecanismos de fácil manejo y compresión las acciones de carga de viento y sísmicas de forma más completa y rigurosa.

Por otra parte la introducción de un nuevo enfoque de la seguridad estructural por la ACI 318-2002, sobre todo en la evaluación del Factor de Reducción de la Resistencia, ϕ , obliga a una nueva lectura en el empleo del Método del Contorno de Carga de Bresler, propuesto por la propia normativa. (ACI 318-11)

En resumen, este trabajo aborda el tema desde dos ángulos.

1. Desarrollo de Hojas de Cálculo en MATHCAD, basadas en la solución detallada de las principales ecuaciones que rigen el comportamiento de la sección y que permiten un análisis más profundo, seguro, confiable y sencillo. Ofreciendo por tanto la posibilidad de la evaluación de diversas soluciones de diseño en corto plazo y contar con una amplia información sobre las características del comportamiento de la sección.
2. Analizar la influencia de la variación del factor de reducción de la capacidad resistente de la sección, ϕ , en función de la inclinación de la carga y la repercusión que esta problemática tiene al utilizar los procedimientos simplificados propuestos por la PCA y basados en el Método del Contorno de Carga de Bresler.

2. AYUDAS DE CÁLCULO PARA LA FLEXO-COMPRESIÓN BIAxIAL

El análisis de la Flexión Compuesta biaxial o esviada se ilustra en la figura 1, donde la sección está sometida a una carga descentrada tanto en el eje x como en el y ; siendo las excentricidades e_x y e_y respectivamente. En dicha figura se destacan los diagramas de interacción obtenidos para la flexo-compresión recta en ambos ejes y esviada que ocurre esta última para ángulo λ respecto al eje x , este ángulo puede determinarse por:

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{M_{ny}}{M_{nx}} = \tan^{-1} \frac{P_n e_x}{P_n e_y} = \tan^{-1} \frac{e_x}{e_y} \quad [1]$$

El diagrama obtenido para el caso recoge todas las combinaciones de carga y momentos flectores en ambos ejes que limitan la resistencia de la sección. También se destaca en la figura una superficie resistente para una carga P_n dada, conocida como Contorno de Carga. Son dos formas de plantearse las zonas de resistencia de la sección.

La comprobación de una sección de forma cualquiera, con cualquier número y distribución de armaduras, sometida a una sollicitación normal (P, M_x, M_y), o, lo que es lo mismo, a una resultante normal P actuando con excentricidades $e_x = M_y/P, e_y = M_x/P$, referidas a los ejes de la sección, exige determinar la posición del eje neutro y la deformación máxima de la sección. Para ello se usarán las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio. Estas ecuaciones no pueden expresarse de forma simple en función de las incógnitas del problema, por lo que este no admite solución analítica exacta y hay que recurrir a métodos aproximados. Tales métodos, tanto si son numéricos como si son gráficos, exigen el tanteo de distintas posiciones del eje neutro, siendo el cálculo laborioso resultado conveniente, por ello, su tratamiento mediante ordenador (JIMÉNEZ MONTOYA 2000).

Desde el punto de vista analítico el problema fundamental radica en determinar cuál es la inclinación de la línea neutra θ , ya que no puede obtenerse una relación entre λ y θ , pues como regla no son iguales, ni se relacionan, como se muestra en la figura 2 (PARK 1979).

El procedimiento se basa en determinar por separado el aporte del hormigón y del acero. Las ecuaciones de equilibrio, de acuerdo a la figura 2, son:

$$\Sigma F = 0$$

$$P_n = C_c + S_1 + S_2 + \dots + S_n = 0 \quad [2]$$

$$\Sigma M_{ny} = 0 \text{ (respecto al eje } y)$$

$$M_{ny} = C_c \left(\frac{b}{2} - z_x \right) + S_1 \left(\frac{b}{2} - d_o \right) + S_2 \left(\frac{b}{2} - d_o \right) + \dots + S_n \left(\frac{b}{2} - d_o \right) \quad [3]$$

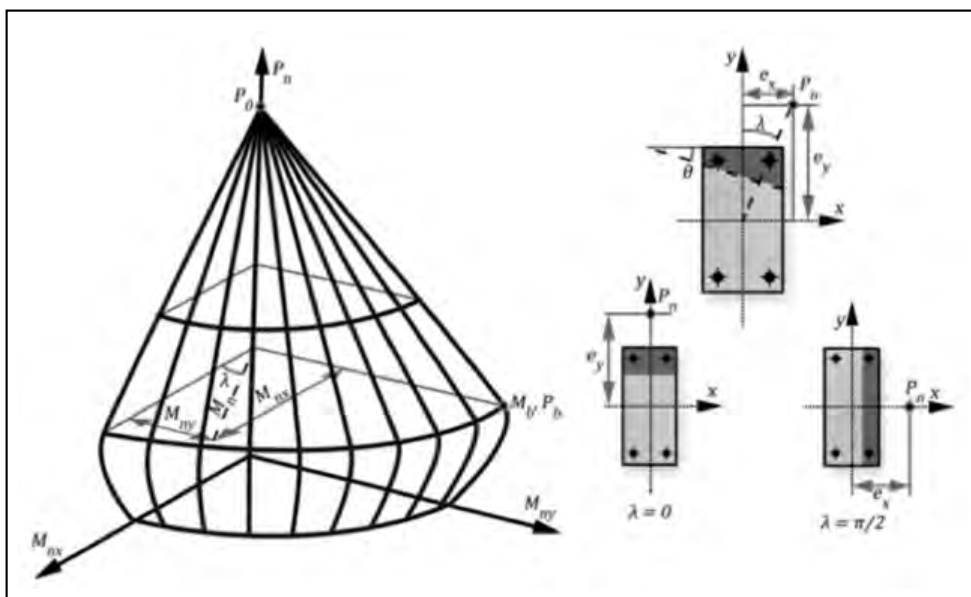


Figura 1. Diagrama de interacción en flexo compresión biaxial.

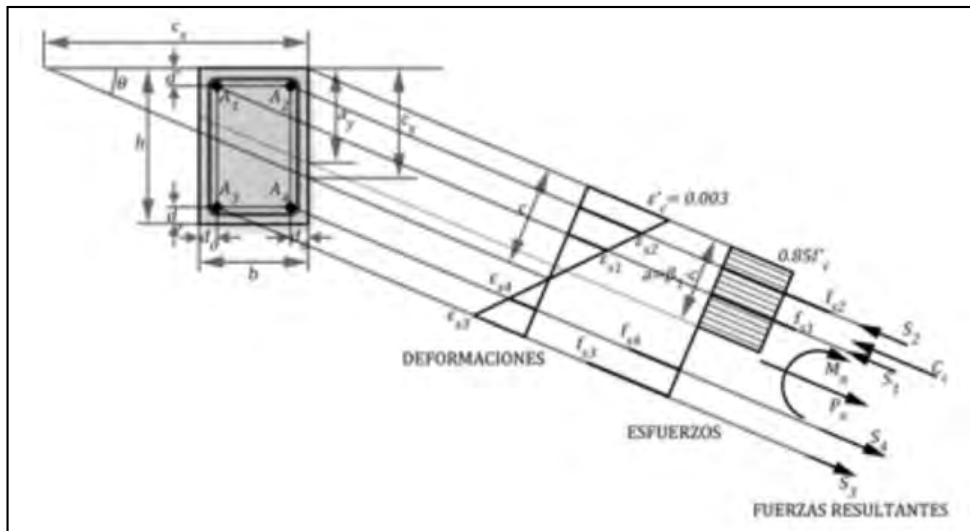


Figura 2. Diagrama de deformaciones, esfuerzos y fuerzas. Flexo compresión biaxial.

$$\Sigma M_{nx} = 0 \text{ (respecto al eje } y)$$

$$C_c = 0,85f'_c A'$$

$$M_{nx} = C_c \left(\frac{h}{2} - z_y \right) + S_1 \left(\frac{h}{2} - d' \right) + S_2 \left(\frac{h}{2} - d' \right) + \dots + S_n \left(\frac{h}{2} - d' \right) \quad [4]$$

Donde z_x y z_y son las proyecciones sobre los ejes del brazo en la resultante del hormigón C_c .

Empleando el diagrama rectangular – equivalente en la figura 2 se muestra el aporte del hormigón dentro de la sección y como a partir del bloque comprimido puede obtenerse C_c

Donde A' es el área comprimida del hormigón, que puede presentarse en 4 formas en función de la magnitud y posición de la carga, y todo se trata de obtener el área comprimida y la posición del centroide. Esta problemática se ilustra en la figura 3.

En la figura 4, se muestra el diagrama de deformaciones para una sección sometida a la flexión esviada, apoyo importante para determinar el esfuerzo a que está sometido cada acero (f_{si}). Aunque se ejemplifica para 4 barras situadas en las esquinas, el procedimiento es válido para

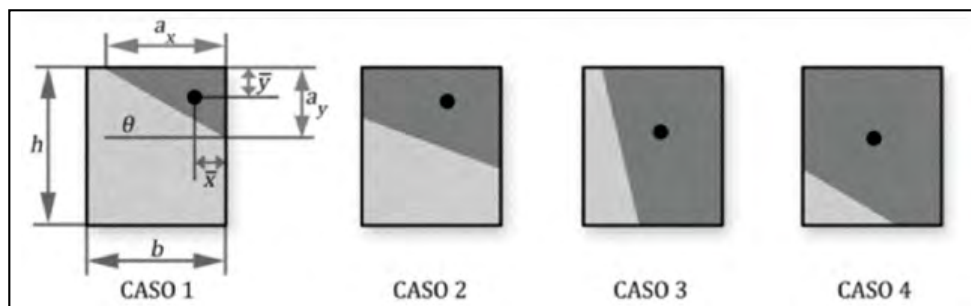


Figura 3. Áreas comprimidas del hormigón en la flexo compresión biaxial.

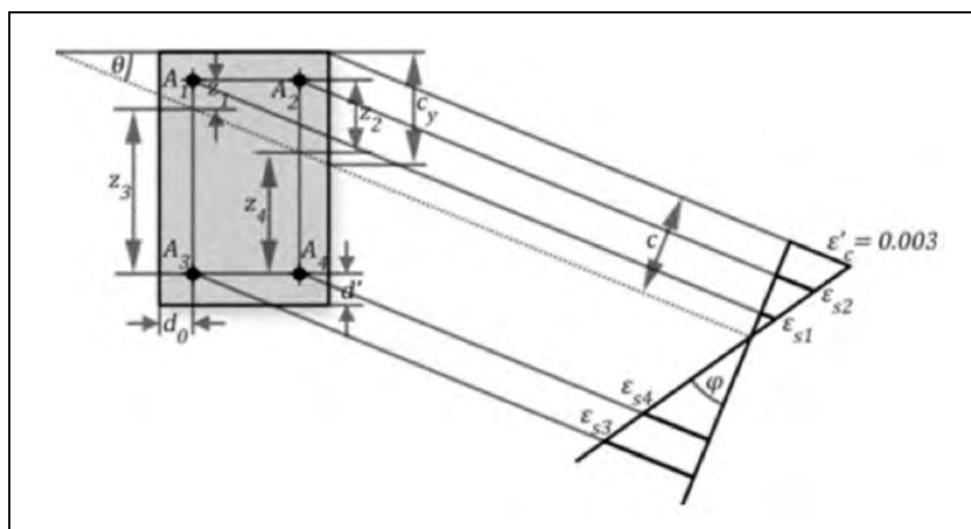









Figura 4. Diagrama de deformaciones.

Tabla 1. Aporte del refuerzo para diferentes distribuciones

| Variantes de distribución | z (posición de las barras respecto a los ejes cartesianos x, y) | Direcciones de trabajo de los aceros (en contra de las manecillas -, a favor de las manecillas +) | |
|---|--|--|--|
| | | M_x | M_y |
|  <p>4barras</p> | $z_1 = c_y - d_s - (b - d_s) \tan(\theta)$ $z_2 = c_y - d_s - d_s \tan(\theta)$ $z_3 = d - c_y + (b - d_s) \tan(\theta)$ $z_4 = d - c_y + d_s \tan(\theta)$ | 1, 2, -3, -4. | -1, 2, -3, 4. |
|  <p>6barras</p> | z_1, z_2, z_3, z_4 $z_5 = c_y - d_s - \frac{b}{2} \tan(\theta)$ $z_6 = d - c_y + \frac{b}{2} \tan(\theta)$ | 1, 2, -3, -4, 5, -6. | -1, 2, -3, 4, 5(0), 6(0). |
|  <p>8barras</p> | $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ $z_7 = \frac{h}{2} - c_y + (b - d_s) \tan(\theta)$ $z_8 = \frac{h}{2} - c_y + d_s \tan(\theta)$ | 1, 2, -3, -4, 5, -6, 7(0), 8(0). | -1, 2, -3, 4, 5(0), 6(0), -7, 8. |
|  <p>10barras</p> | $z_1, z_2, z_3, z_4, z_7, z_8$ $z_9 = c_y - d_s - \frac{2b - d_s}{3} \tan(\theta)$ $z_{10} = c_y - d_s - \frac{b + d_s}{3} \tan(\theta)$ $z_{11} = d - c_y + \frac{2b - d_s}{3} \tan(\theta)$ $z_{12} = d - c_y + \frac{b + d_s}{3} \tan(\theta)$ | 1, 2, -3, -4, 5, -6, 7(0), 8(0), 9, 10, -11, -12. | -1, 2, -3, 4, 5(0), 6(0), -7, 8, -9, 10, -11, 12. |
|  <p>12barras</p> | $z_1, z_2, z_3, z_4, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}$ $z_{13} = \frac{d + 2d_s}{3} - c_y + (b - d_s) \tan(\theta)$ $z_{14} = \frac{2d + d_s}{3} - c_y + (b - d_s) \tan(\theta)$ $z_{15} = \frac{d + 2d_s}{3} - c_y + d_s \tan(\theta)$ $z_{16} = \frac{2d + d_s}{3} - c_y + d_s \tan(\theta)$ | 1, 2, -3, -4, 9, 10, -11, -12, 13, -14, 15, -16. | -1, 2, -3, 4, -9, 10, -11, 12, -13, -14, 15, 16. |
|  <p>14barras</p> | $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_{13}, z_{14}, z_{15}, z_{16}$ $z_{17} = c_y - d_s - \frac{3b - 2d_s}{4} \tan(\theta)$ $z_{18} = c_y - d_s - \frac{b - 2d_s}{4} \tan(\theta)$ $z_{19} = d - c_y + \frac{3b - 2d_s}{4} \tan(\theta)$ $z_{20} = d - c_y + \frac{b - 2d_s}{4} \tan(\theta)$ | 1, 2, -3, -4, 5, -6, 13, -14, 15, -16, 17, 18, -19, -20. | -1, 2, -3, 4, 5(0), 6(0), -13, -14, 15, 16, -17, 18, -19, 20. |
|  <p>16barras</p> | $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_{17}, z_{18}, z_{19}, z_{20}$ $z_{21} = \frac{h + 2d_s}{4} - c_y + (b - d_s) \tan(\theta)$ $z_{22} = \frac{3h + 2d_s}{4} - c_y + (b - d_s) \tan(\theta)$ $z_{23} = \frac{h + 2d_s}{4} - c_y + d_s \tan(\theta)$ $z_{24} = \frac{3h + 2d_s}{4} - c_y + d_s \tan(\theta)$ | 1, 2, -3, -4, 5, -6, 7(0), 8(0), 17, 18, -19, -20, 21, -22, 23, -24. | -1, 2, -3, 4, 5(0), 6(0), -7, 8, -17, 18, -19, 20, -21, -22, 23, 24. |

mayor número de barras situadas bordeando el perímetro de la sección.

Considerando la proyección sobre el eje y

$$\frac{\epsilon_c'}{c_y} = \frac{\epsilon_{s1}}{z_1} = \frac{\epsilon_{s2}}{z_2} = \frac{\epsilon_{s3}}{z_3} = \frac{\epsilon_{s4}}{z_4} \quad [5]$$

Donde:

$$z_1 = c_y - d' - (b - d_o)\tan\theta \quad \epsilon_{s1} = \frac{z_1}{c_y} \epsilon_c'$$

$$z_2 = c_y - d' - d_o\tan\theta \quad \epsilon_{s2} = \frac{z_2}{c_y} \epsilon_c'$$

$$z_3 = c_y - d + (b - d_o)\tan\theta \quad \epsilon_{s3} = \frac{z_3}{c_y} \epsilon_c'$$

$$z_4 = c_y - d + d_o\tan\theta \quad \epsilon_{s4} = \frac{z_4}{c_y} \epsilon_c'$$

En la tabla 1 se ilustran las ecuaciones de las distancias z para diferentes distribuciones de barras. En las columnas ubicadas a la derecha se ofrecen los signos de los momentos en ambos ejes para cada barra asumiendo los ejes coordenados en el centro de la sección. También se especifica con la simbología (0) en aquellos casos en los que debido a la posición de las barras y a la de los ejes coordenados no se genera momento resistente respecto a uno u otro de los ejes por la falta de brazo.

Desarrollando esas ecuaciones generales se crean hojas de cálculo en MathCAD que parten de la siguiente filosofía: (ESHANI 1986)

1. La base está en la confección de Diagramas de Interacción o Superficies de Contorno de Carga.
2. Se comprueba la resistencia de la sección ante la combinación de carga a que esta está sometida.
3. Parte de probar varias alternativas de: dimensiones de la sección, calidades de los materiales, cantidad y distribución del refuerzo, hasta comprobar que la combinación de carga escogida esté dentro del Diagramas

de Interacción o de la Superficies de Contorno de Carga, garantizándose así la resistencia de la sección.

Siguiendo las superficies de falla antes enunciadas, se emplean dos vías de solución del problema:

1era vía: a través de la construcción de Diagramas de Interacción.

2da vía: graficando la Superficie de Contorno para una carga dada.

En la elaboración de los Diagramas de Interacción se sigue el procedimiento convencional, solo que se requerirá de la realización de tanteos para determinar la inclinación de la línea neutra θ . El elemento base será la relación entre los momentos flectores en ambos ejes, es decir el ángulo λ definido en la figura 1 y por la ecuación 1.

Entonces los pasos a seguir son:

1. Definir las dimensiones de la sección y las resistencias de los materiales.
2. Calcular $\lambda = \tan^{-1} \frac{M_{ny}}{M_{nx}}$
3. Fijar un valor de la posición de la línea neutra c y asumir la inclinación de esta θ .
4. Calcular P_n, M_{nx}, M_{ny} y comprobar $\lambda_1 = \tan^{-1} \frac{M_{ny}}{M_{nx}} \approx \lambda$, si no se cumple se modifica y se retoman los pasos anteriores.
5. Repetir el proceso para otras c hasta completar el Diagrama de Interacción.

En la figura 5 se muestra un ejemplo de diseño para resolver una combinación de:

$$P_u = 600kN \quad M_{ux} = 160kN.m \quad M_{uy} = 100kN.m$$

Se utilizará una sección de $40x40cm^2, f_c' = 25MPa$ y refuerzo G-60. La solución se alcanza con 8 barras N° 25 colocadas en todo el perímetro de la sección.

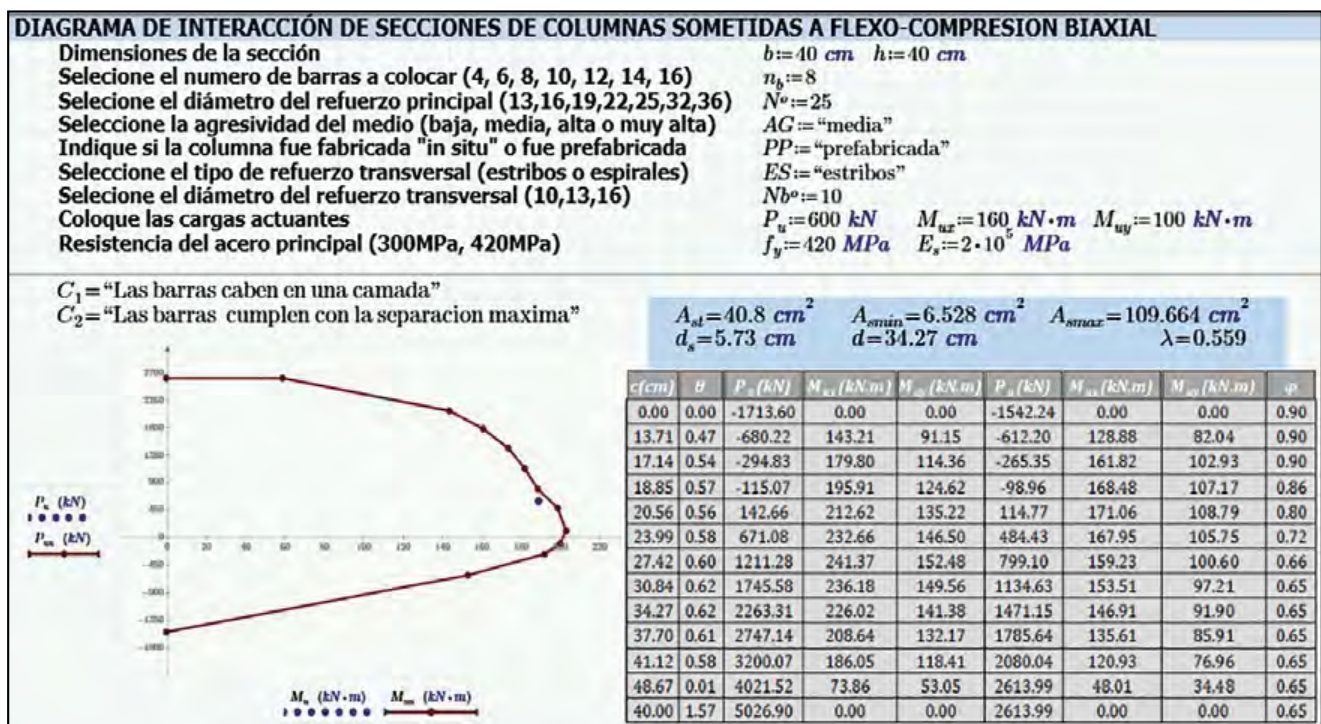


Figura 5. Hoja de cálculo empleando el diagrama de interacción.

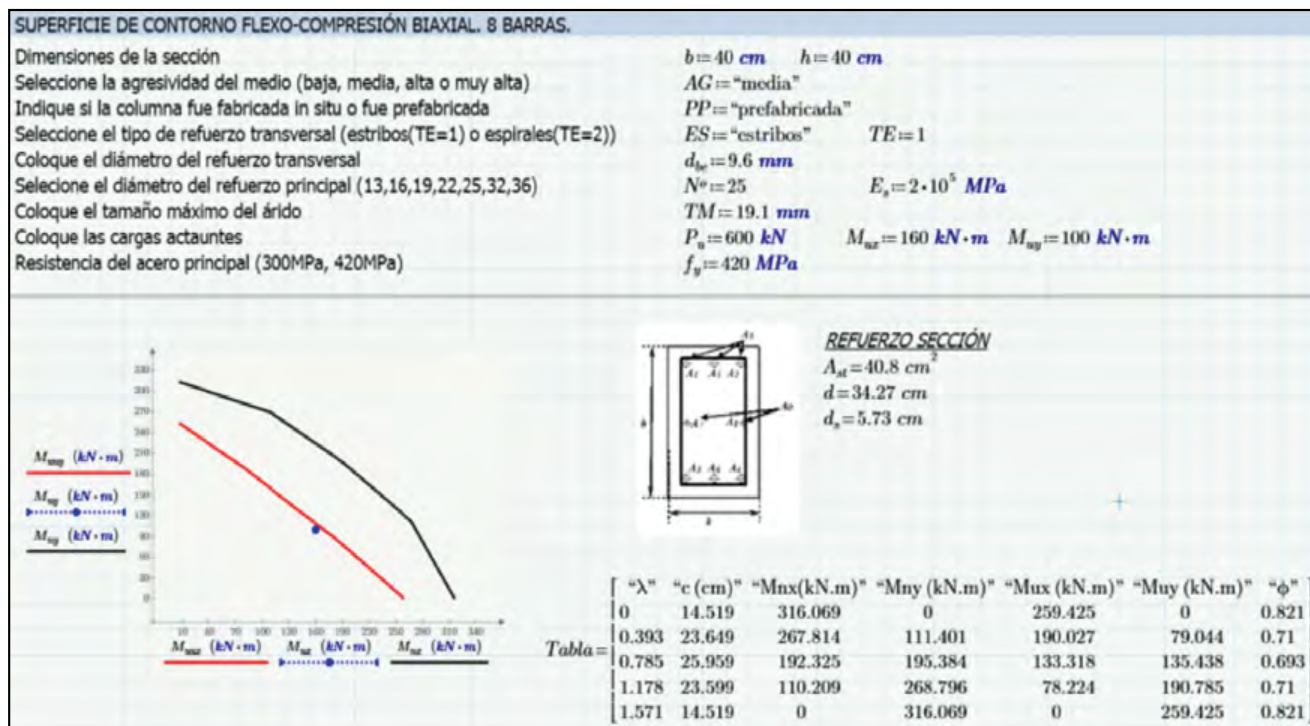


Figura 6. Hoja de cálculo empleando la superficie de contorno de carga.

En la obtención de las Superficies de Contorno de Carga el elemento caracterizador es la carga de cálculo P_u , como lo indica su nombre. Estas superficies de contorno se construyen para valores de λ entre 0 y $\pi/2$. El procedimiento se completa con:

1. Fijar un valor de la posición de la línea neutra c e ir variando la inclinación de esta θ y comprobar que $\lambda_1 = \tan^{-1} \frac{M_{ny}}{M_{nx}} \approx \lambda$
2. Calcular P_n y comprobar que $\phi P_n \approx P_u$. Si no se cumple se modifica c y se retoman los pasos anteriores.
3. Calcular M_{nx} , M_{ny} , ϕ , M_{ux} y M_{uy}
4. Repetir el proceso para otras valores de λ hasta completar la Superficie de Contorno.

La figura 6 expone la solución dada al ejemplo anterior siguiendo el procedimiento de construir la Superficie de Contorno de Carga

En resumen la labor desarrollada en la explotación de las hojas de cálculo permite plantear que:

- Las HC resuelven el problema de la FCB a través de la solución de las ecuaciones físicas, de compatibilidad y equilibrio, por lo que ofrecen un referente conceptual a los estudiosos del tema. Dada las potencialidades antes expresadas las HC pueden convertirse en un valioso instrumento en manos de estudiantes y proyectistas.
- La validación de los resultados obtenidos en las hojas de MathCAD mediante programas computacionales de vanguardia tales como el MIDAS nos permite ofrecer a los usuarios docentes y profesionales una herramienta de diseño de columnas a FCB de fácil empleo ya que presenta una interfaz muy sencilla y accesible.
- Se recomienda como herramienta de cálculo para el diseño y comprobación de secciones de hormigón armado de columnas sometidas a FCB las hojas de

cálculo que contienen los diagramas de interacción antes que la superficies de contorno, dado principalmente por el gasto computacional.

3. RESISTENCIA NOMINAL Y RESISTENCIA ÚLTIMA

La resistencia última según la ACI 318 se plantea como: (ACI 318-14)

$$P_u = \phi P_n \quad M_{ux} = \phi M_{nx} \quad M_{uy} = \phi M_{ny}$$

El coeficiente ϕ depende del valor de la deformación del acero más traccionado, que es el situado en el lado opuesto a la fibra más comprimida, como se ilustra en la figura 2. La forma trapezoidal de la zona comprimida del hormigón la hace menos eficiente que una rectangular, pues requiere de un valor mayor de $a = \beta_1 c$ para un mismo valor de $C_c = 0,85 f'_c A'$, o para el mismo valor de A' . Entonces si la carga está esviada, para un mismo valor de P_u , el valor de c será mayor que si actuara en flexo-compresión recta, por consiguiente la deformación del acero más traccionado ϵ_t será menor. Esta realidad provoca que este acero alcance antes la fluencia, para una carga balanceada menor en la flexo-compresión biaxial que en la uniaxial. Lo mismo ocurrirá en la frontera entre la tracción controlada y la zona de transición con $\epsilon_t = 0,005$.

En los gráficos de la figura 7 se exponen los resultados de someter a una sección rectangular de $40 \times 60 \text{ cm}^2$, $f'_c = 25 \text{ MPa}$ y armada con 8 barras No. 25 y G - 60 a diferentes combinaciones de carga y que permiten destacar como el coeficiente ϕ es variable en función del ángulo λ .

El 1er caso es una sección donde para los momentos M_{nox} y M_{noy} , en flexo-compresión recta, está en tracción controlada y $\phi = 0,9$. Sin embargo cuando ocurre la flexo-compresión biaxial el comportamiento de la sección pasa a la zona de transición y $\phi < 0,9$. Note que el valor menor de ϕ se presenta para $\lambda = \pi/4$.

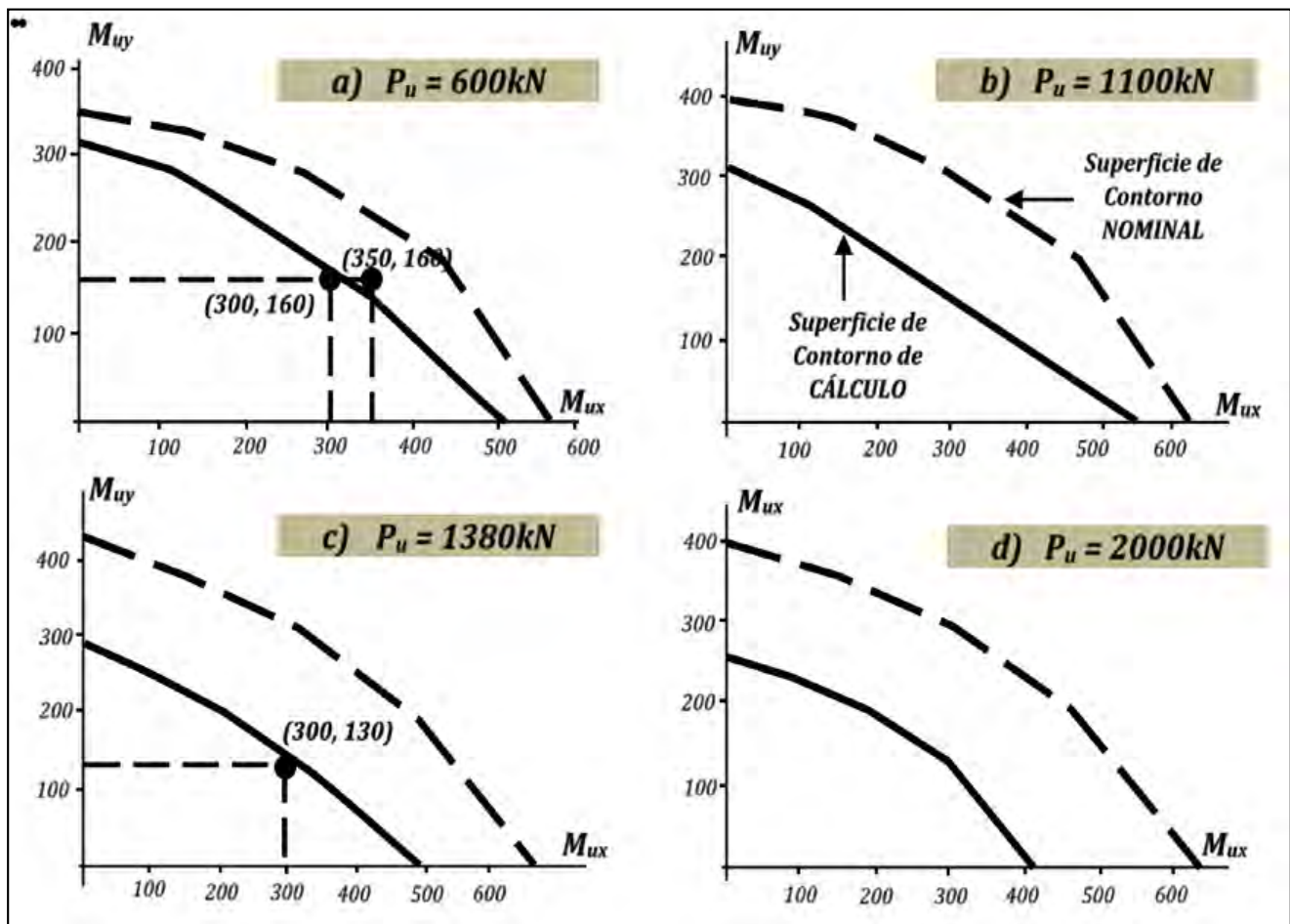


Figura 7. Influencia de la flexo-compresión biaxial en el coeficiente ϕ .

Tabla 2. Superficies de contorno. Para sección rectangular de $40 \times 60\text{cm}^2$, $f'_c = 25\text{MPa}$ y armada con 8 barras No. 25 y G - 60

| Momentos flectores (kN.m) para $P_u = 600\text{kN}$ | | | | | | Momentos flectores (kN.m) para $P_u = 1100\text{kN}$ | | | | |
|---|--|----------|----------|----------|--------|--|----------|----------|----------|--------|
| λ | M_{nx} | M_{ny} | M_{ux} | M_{uy} | ϕ | M_{nx} | M_{ny} | M_{ux} | M_{uy} | ϕ |
| 0 | 565.79 | 0 | 509.21 | 0 | 0.9 | 631.28 | 0 | 555.61 | 0 | 0.88 |
| 0,393 | 435.73 | 182.74 | 343.25 | 143.95 | 0.788 | 474.61 | 197.47 | 329.22 | 136.98 | 0.694 |
| 0,785 | 273.38 | 280.24 | 214.81 | 220.20 | 0.786 | 294.65 | 306.86 | 204.11 | 212.57 | 0.693 |
| 1,178 | 127.72 | 327.30 | 109.18 | 279.79 | 0.855 | 151.85 | 370.98 | 108.19 | 264.32 | 0.713 |
| 1,571 | 0 | 349.24 | 0 | 314.31 | 0.9 | 0 | 396.64 | 0 | 314.32 | 0.792 |
| λ | Momentos flectores (kN.m) para $P_u = 1380\text{kN}$ | | | | | Momentos flectores (kN.m) para $P_u = 2000\text{kN}$ | | | | |
| 0 | 674.06 | 0 | 490.24 | 0 | 0.727 | 635.52 | 0 | 413.08 | 0 | 0.65 |
| 0,393 | 483.30 | 203.82 | 314.14 | 132.48 | 0.65 | 463.49 | 195.22 | 301.27 | 126.90 | 0.65 |
| 0,785 | 304.21 | 312.87 | 197.74 | 203.37 | 0.65 | 294.84 | 298.79 | 191.65 | 194.22 | 0.65 |
| 1,178 | 155.25 | 378.51 | 100.91 | 246.03 | 0.65 | 145.81 | 358.94 | 94.78 | 233.31 | 0.65 |
| 1,571 | 0 | 429.70 | 0 | 288.97 | 0.673 | 0 | 396.98 | 0 | 258.03 | 0.65 |

En el 2do caso todas las secciones están en la zona de transición, pero de la misma forma el coeficiente disminuye para la flexo-compresión esviada. Una situación semejante se presenta para el 3er caso donde para flexo-compresión recta la sección se comporta en la zona de transición y en el resto en compresión controlada, con $\phi = 0,65$. En la tabla 2 se exponen los valores que caracterizan las superficies de contorno para las cargas evaluadas.

Si se analiza detenidamente la variación de ϕ ante la actuación de momentos biaxiales, como se destaca en la figura 8, puede concluirse que la diferencia entre los valores para M_{nox} y M_{noy} y la obtenida para cuando $M_{nx} = M_{ny}$, $\lambda = \pi/4$, puede alcanzar un valor de $0,9/0,786 = 1,15$, para cuando $P_u = 600\text{kN}$ y $0,792/0,993 = 1,14$, para cuando $P_u = 1100\text{kN}$, siempre que se tome el menor valor de ϕ para los momentos uniaxiales; pudiendo ser mayor para secciones con mayor rectangularidad.

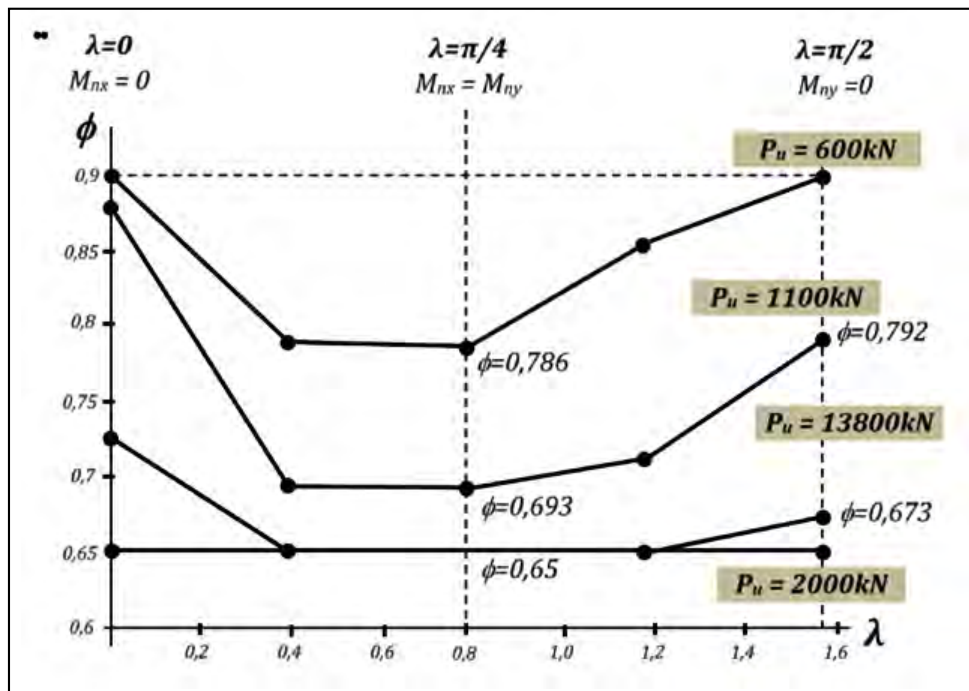


Figura 8. Variación del coeficiente φ para distintos valores de carga axial.

4. REFLEXIONES SOBRE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL CONTORNO DE CARGA DEL PCA

El Método del Contorno de Carga de Bresler se basa en generar una superficie de contorno aproximada a la real, para cada P_n , y que responda a la siguiente expresión general: (BRESLER 1981)

$$\left(\frac{M_{nx}}{M_{nox}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_{ny}}{M_{noy}}\right)^{\alpha_2} \leq 1 \quad [6]$$

Donde

M_{nx} y M_{ny} Son los momentos nominales en los ejes x e y . Ambos son el equivalente vectorial del momento M_n , mostrado en la figura 1.

M_{nox} Momento nominal uniaxial sobre el eje x , para $M_{ny} = 0$

M_{noy} Momento nominal uniaxial sobre el eje y , para $M_{nx} = 0$

Los coeficientes α_1 y α_2 dependen de la rectangularidad de la sección, las resistencias del hormigón y el acero y de la continuidad y distribución de este. Bresler considera razonable hacer $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, planteando que este varía entre 1,15 y 1,55 y que $\alpha = 1,5$ es un valor apropiado para secciones rectangulares o cuadradas con refuerzo distribuido.

Entonces puede plantearse:

$$\left(\frac{M_{nx}}{M_{nox}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{M_{ny}}{M_{noy}}\right)^{\alpha} \leq 1 \quad [7]$$

Como una interpretación y extensión del procedimiento anterior, en el que se basa, la PCA parte de definir, para un punto en el contorno de carga común de Bresler, la relación: (PCA 2011)

$$\beta = \frac{M_{nx}}{M_{nox}} = \frac{M_{ny}}{M_{noy}}$$

Al generarse múltiples contornos de cargas adimensionales para P_n/P_o entre 0 y 1 se crea una superficie de falla que representa con claridad la connotación del término β , que

depende únicamente de la relación P_n/P_o . La PCA propone ábacos para obtener los valores de β , que dependen de las dimensiones de la sección, la cuantía mecánica y la resistencia del acero. En la figura 9 se exponen algunos de estos gráficos.

Y relacionando α y β para las condiciones descritas se obtiene:

$$\alpha = \frac{\log 0,5}{\log \beta}$$

Por lo que la ecuación 7 para la comprobación de la resistencia quedará como:

$$\left(\frac{M_{nx}}{M_{nox}}\right)^{\frac{\log 0,5}{\log \beta}} + \left(\frac{M_{ny}}{M_{noy}}\right)^{\frac{\log 0,5}{\log \beta}} \leq 1 \quad [8]$$

El proceso de cálculo, comprobación de la resistencia para las cargas y momentos de cálculo (P_u , M_{ux} y M_{uy}), consistirá entonces en:

1. Establecer la sección de la columna.
2. Calcular los valores de P_o , M_{nox} , M_{noy} y β . Obtenidos considerando flexo-compresión recta.
3. Comprobar para la combinación de cargas actuante el cumplimiento de la ecuación 8.

En la aplicación de este procedimiento uno de los aspectos más complicados está en la estimación del coeficiente de seguridad ϕ , que permita establecer las relaciones:

$$\begin{aligned} P_u &= \phi P_n \\ M_{ux} &= \phi M_{nx} \\ M_{uy} &= \phi M_{ny} \end{aligned}$$

Antes de las modificaciones impuestas por la versión del código del ACI 318 en el 2002, el problema se resolvía con sencillez pues era posible plantear que (NILSON 1999):

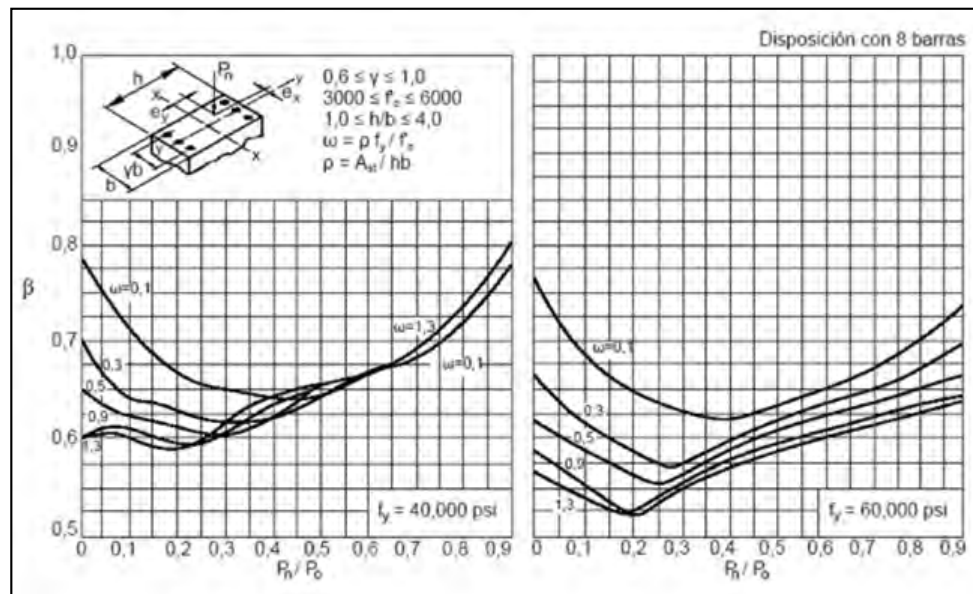


Figura 9. Constante β para secciones a flexo-compresión biaxial. (PCA 2002).

$$\left(\frac{\phi M_{nx}}{\phi M_{nox}}\right)^{\frac{\log 0,5}{\log \beta}} + \left(\frac{\phi M_{ny}}{\phi M_{noy}}\right)^{\frac{\log 0,5}{\log \beta}} \leq 1$$

Y como ϕ era prácticamente constante en toda la sección entonces la expresión se simplificaba a:

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uox}}\right)^{\frac{\log 0,5}{\log \beta}} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uoy}}\right)^{\frac{\log 0,5}{\log \beta}} \leq 1$$

Como, a partir de ACI 318-2002, ϕ es variable en función de la deformación del acero mas traccionado, ha quedado demostrado en el acápite anterior y expuesto en las figuras 7 y 8, que para cargas menores que la balanceada la simplificación expuesta no puede aplicarse pues este coeficiente es diferente para la sección bajo flexo-compresión recta, cuando actúan M_{uox} y M_{uoy} , a cuando se presenta la flexo-compresión esviada y actúan M_{ux} y M_{uy} .

Sin embargo en los Manuales del ACI para el diseño de columnas, SP-17-09-07 (EVERARD 2007) se sugiere que "Para el diseño, si cada término de la ecuación (7) se multiplica por ϕ la ecuación no cambiará. Entonces M_{ux} , M_{uy} , M_{uox} y M_{uoy} pueden hacerse corresponder a ϕM_{nx} , ϕM_{ny} , ϕM_{nox} y ϕM_{noy} respectivamente y puede ser empleados preferiblemente en la expresión original". Esta afirmación conduce a una respuesta semejante a la aplicada antes del 2002, lo que puede generar confusión, pues se ha demostrado que subestimar la variación del coeficiente ϕ para la ocurrencia de momentos biaxiales provoca soluciones inseguras.

La significación de esta problemática y su implicación en los procedimientos se ilustran en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1

Compruebe si una sección rectangular de $40 \times 60 \text{ cm}^2$, $f'_c = 25 \text{ MPa}$ y armada con 8 barras No. 25 y G-60 distribuidas en el perímetro de la sección resiste las siguientes cargas:

$$P_u = 600 \text{ kN} \quad M_{ux} = 300 \text{ kN.m} \quad M_{uy} = 160 \text{ kN.m}$$

La columna es prefabricada y está situada en una zona de agresividad media, por lo que el recubrimiento efectivo es $3,5 \text{ cm}$ y el mecánico de las barras $d' = d_s = 5,73 \text{ cm}$.

1. Cálculo de M_{nox} y M_{noy} considerando flexo-compresión recta

A continuación se obtendrán los valores de M_{nox} y M_{noy} para la carga de cálculo $P_u = 600 \text{ kN}$, lo que permitirá tener una clara apreciación del valor del coeficiente ϕ para cada caso, pues puede ocurrir que difieran entre si y sobre todo que sea diferente y menor para la combinación de M_{ux} y M_{uy} .

a) Para el cálculo de M_{nox} $b = 40 \text{ cm}$ y $h = 60 \text{ cm}$

Se construye un Diagrama de Interacción considerando refuerzo perimetral $A_{st} = 40,8 \text{ cm}^2$, que se muestra en la figura 10a

$$\text{Entonces para } P_u = 600 \text{ kN y } P_n = \frac{P_u}{\phi}$$

Puede apreciarse que la sección está en tracción controlada y $\phi = 0,9$, por lo que:

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{600}{0,9} = 666,67 \text{ kN}$$

Entonces del Diagrama de Interacción se obtiene, como muestra la figura 10a, que $M_{nox} = 569 \text{ kN.m}$

b) Para el cálculo de M_{noy} $b = 60 \text{ cm}$ y $h = 40 \text{ cm}$

Se construye un DI considerando refuerzo perimetral $A_{st} = 40,8 \text{ cm}^2$, que se muestra en la figura 10b y se obtiene con $P_n = 666,67 \text{ kN}$ $M_{noy} = 344 \text{ kN.m}$

2. Cálculo de β

Obteniendo $P_o = 6814 \text{ kN}$ en el DI, puede calcularse:

$$\frac{P_n}{P_o} = \frac{666,67}{6814} = 0,098$$

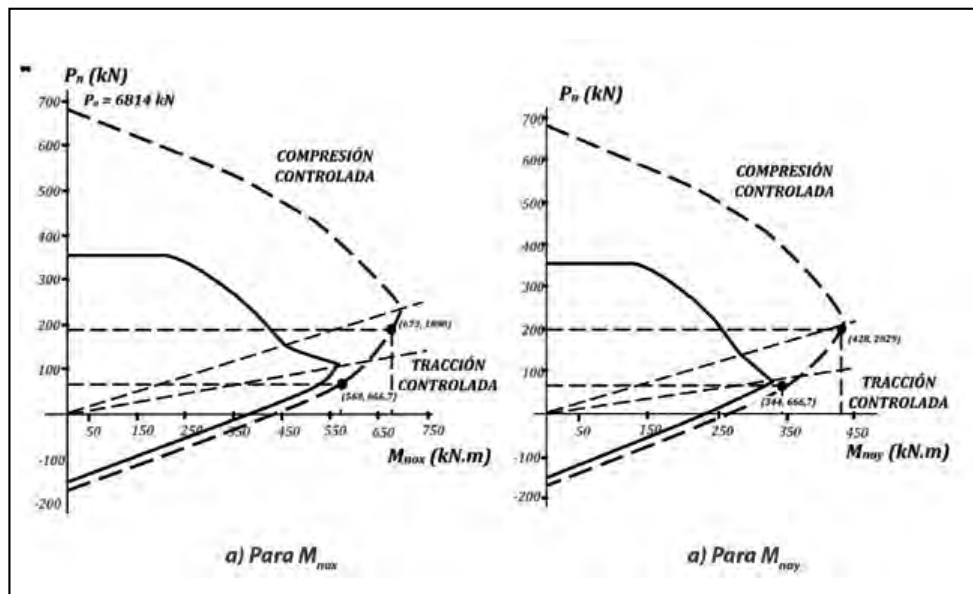


Figura 10. Diagramas de Interacción para flexo-compresión recta. Ejercicios.

Y además:

$$\omega_t = \frac{A_{st} f_y}{b h f_c'} = \frac{40,8 \cdot 420}{40 \cdot 60 \cdot 25} = 0,286$$

Y en la figura 9 para el G-60, se obtiene $\beta = 0,625$

3. Comprobación por el Método de Contorno de Carga del PCA

Debe cumplirse que:

$$\left(\frac{M_{nx}}{M_{nox}} \right)^{\frac{\log 0,5}{\log \beta}} + \left(\frac{M_{ny}}{M_{noy}} \right)^{\frac{\log 0,5}{\log \beta}} \leq 1$$

Donde:

$$\beta = \frac{\log 0,5}{\log \beta} = 1,475$$

Si se considera que bajo la combinación de M_{ux} y M_{uy} la sección estará también en tracción controlada se calcula:

$$M_{nx} = \frac{M_{ux}}{\phi} = \frac{300}{0,9} = 333,33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{ny} = \frac{M_{uy}}{\phi} = \frac{160}{0,9} = 177,78 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y finalmente se comprueba:

$$\left(\frac{333,33}{569} \right)^{1,475} + \left(\frac{177,78}{344} \right)^{1,475} = 0,832 < 1$$

Respuesta que refleja que la sección resiste holgadamente las solicitaciones actuantes. Pero si se compara este resultado con lo reflejado en la figura 7, donde se realizó un cálculo más preciso, se concluye que este último falsea la resistencia de la sección, lo que se debe a que bajo las cargas actuantes el valor de ϕ es menor que el de 0,9 asumido. Realmente es mucho menor, $\phi = 0,787$.

Más evidente se hace esta contradicción resolviendo el ejercicio para $M_{ux} = 350 \text{ kN} \cdot \text{m}$, que como se ilustra en la figura 7a conduce al agotamiento de la sección. Si se sigue el procedimiento descrito:

$$M_{nx} = \frac{M_{ux}}{\phi} = \frac{350}{0,9} = 388,89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y finalmente se comprueba:

$$\left(\frac{388,89}{569} \right)^{1,475} + \left(\frac{177,78}{344} \right)^{1,475} = 0,948 < 1$$

Resultado que haría pensar que la sección resiste lo que es falso, pues se tomó erróneamente $\phi = 0,9$. Una solución podría ser tomar conservadoramente $\phi = 0,65$. Para lo que:

$$M_{nx} = \frac{M_{ux}}{\phi} = \frac{350}{0,65} = 538,46 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Y finalmente se comprueba:

$$\left(\frac{538,46}{569} \right)^{1,475} + \left(\frac{177,78}{344} \right)^{1,475} = 1,532 > 1$$

Que como se esperaba también se aleja de la realidad pero conservadoramente, aunque seguro.

Ejercicio 2

Compruebe la sección anterior si las cargas actuantes son:

$$\begin{aligned} P_u &= 1380 \text{ kN} \\ M_{ux} &= 300 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_{uy} &= 130 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Desarrollando los mismos pasos que en el ejercicio anterior se obtienen los siguientes resultados, que se reflejan en la figura 10:

Considerando que la sección está en compresión controlada y $\phi = 0,65$, por lo que:

$$P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{1380}{0,65} = 2123 \text{ kN}$$

Sin embargo se comprueba que la sección está realmente en la zona de transición y por tanto $\phi > 0,65$. Después de varios tanteos se obtiene que:

Para el momento sobre el eje x : $\phi = 0,73$ y $M_{nox} = 673kN \cdot m$
 Para el momento sobre el eje y : $\phi = 0,68$ y $M_{noy} = 428kN \cdot m$

Para calcular β surge la disyuntiva de que valor de ϕ escoger para obtener la relación $\frac{P_n}{P_o}$, si se toma el menor:

$$\frac{P_n}{P_o} = \frac{2029,4}{6814} = 0,297$$

Y en el gráfico de la figura 9 puede apreciarse que para $\frac{P_n}{P_o} \leq 0,3$ el valor de β mayor y por tanto más desfavorable es que esta relación $\frac{P_n}{P_o}$ sea lo menor posible, por lo que se tomará entonces:

$$\frac{P_n}{P_o} = \frac{1890,4}{6814} = 0,277 \quad \text{y} \quad \beta = 0,58$$

En la comprobación final puede presumirse con suficiente certeza que para la flexo-compresión biaxial $\phi = 0,65$, por lo que los cálculos se plantean como:

$$\beta = \frac{\log 0,5}{\log \beta} = 1,272$$

$$M_{nx} = \frac{M_{ux}}{\phi} = \frac{300}{0,65} = 451,58kN \cdot m$$

$$M_{ny} = \frac{M_{uy}}{\phi} = \frac{130}{0,65} = 200kN \cdot m$$

Y finalmente se comprueba:

$$\left(\frac{451,58}{673}\right)^{1,272} + \left(\frac{200}{428}\right)^{1,272} = 0,999 < 1$$

Resultado que se corresponde con lo logrado a través de las hojas de cálculo y que se refleja en la figura 7c.

5. CONCLUSIONES

1. Las hojas de cálculo en MathCAD son un recurso ventajoso para la solución de problemas de flexo-compresión biaxial pues combinan su sencillez y asequibilidad con un riguroso procedimiento para los cálculos, ofreciendo una respuesta racional y confiable.
2. La variación del factor de reducción de la capacidad resistente de la sección ϕ , en las secciones bajo la flexo-compresión axial añade un nuevo elemento a la compleja solución de este tipo de problema. Esta situación se hace muy significativo para cargas menores que la balanceada cuando el valor de resulta

mayor para momentos uniaxiales, M_{nx} o $M_{ny} = 0$, que para biaxiales.

3. En la aplicación del Método del Contorno de Carga debe tomarse en cuenta:

- a) Si bajo la acción de momentos uniaxiales, M_{nox} y M_{noy} , la sección trabaja en la ZONA DE TRANSICIÓN, debe calcularse:

$$M_{nx} = \frac{M_{ux}}{0,65} \quad M_{ny} = \frac{M_{uy}}{0,65}$$

- b) Si bajo la acción de momentos uniaxiales, M_{nox} y M_{noy} , la sección trabaja en TRACCIÓN CONTROLADA, debe calcularse:

$$M_{nx} = \frac{M_{ux}}{0,75} \quad M_{ny} = \frac{M_{uy}}{0,75}$$

Es una propuesta segura y no muy conservadora.

4. Los métodos aproximados deben emplearse con reservas y solo para soluciones preliminares, sobre todo ante cargas axiales menores que la balanceada.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- American Concrete Institute (2014). *Requisitos del Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-14) y Comentario (ACI 318SR-14)*. Detroit, MI (EE UU): American Concrete Institute (ACI).
- Bresler, B. (1981). *Concreto Reforzado en Ingeniería*. México DF: Ed. LIMUSA.
- Ehsani, M. (1986). CAD for columns. *Concrete International*, vol. 8, n° 9, pp. 43-47.
- Everard, N.J., e Issa, M. (2007). Chapter 3: Short Column Design SP-17-09-07, en *ACI Design Handbook*. Farmington Hills, MI (EE UU): American Concrete Institute (ACI).
- Jiménez Montoya y otros (2000). *Hormigón Armado*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, S.L.
- Nilson, H.A., y Darwin, D. (1999). *Diseño de Estructuras de Concreto*. 11ª edición. Ed. McGraw Hill.
- Nilson, H.A., y Darwin, D. (2004). *Design of Concrete Structures*. 13ª edición. Ed. McGraw Hill.
- Park, R., y Paulay, T. (1979). *Estructuras de Concreto Reforzado*. México DF: Ed. LIMUSA.
- Portland Cement Association (2013). *Notes on ACI 318-11 Building Code Requirements for Structural Concrete with Design Applications*.

Puertos y Costas

Líneas de actividad

Planificación y gestión de la costa y del mar

Estudio de actuaciones de la costa y en el mar

Monitorización costera y marina

Medio ambiente



Fields of Activity

Planning and Management for Coastal Zones and Sea Waters

Studies of Actions on Coastal Zones and Sea Waters

Coastal and Maritime Monitoring

Environment



CEDEX

Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas

<http://www.cedex.es>