

# Comportamiento estructural básico en la técnica de refuerzo a flexión con materiales compuestos

JUAN MURCIA VELA (\*)

**RESUMEN** La técnica de refuerzo de estructuras con bandas adheridas de materiales compuestos se está imponiendo hoy día por sus grandes ventajas.

En este trabajo, que contempla los refuerzos a flexión, se estudia el comportamiento de la estructura juntamente con la banda, de cara al proyecto del refuerzo, destacando los principales parámetros implicados. El estudio es válido tanto para refuerzos activos como pasivos.

Para ello, se plantea un análisis estructural basado en un modelo sencillo de tipo analítico. Este modelo es similar a otro aplicado por el autor a estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes, que tiene en cuenta el deslizamiento relativo entre estructura y refuerzo.

Al final, se apuntan unos criterios (que implican un cálculo en rotura) útiles para el proyecto de este tipo de refuerzos estructurales.

## BASIC STRUCTURAL BEHAVIOUR IN THE TECHNIQUE OF FLEXURAL STRENGTHENING WITH COMPOSITES

**ABSTRACT** *The retrofit of structures by using composite sheets is a technique which, nowadays, is progressing due to its great advantages.*

*This work, which considers flexural strengthening studies, the behaviour of both the structure and the strengthening sheet, jointly, and is focused on the design of these sheets. The main parameters involved are also emphasized. The study is valid for passive and active strengthening.*

*For this purpose, structural analysis based on a simple analytical model is presented. This model is similar to another proposed by the author for prestressed concrete structures with unbonded tendons, taking into account the relative slip between the structure and the sheet.*

*Finally, some useful criteria (on the basis of ultimate limit calculation) are proposed for the design of this kind of structural retrofitting.*

**Palabras clave:** Refuerzo; Reparación; Rehabilitación; Refuerzo a flexión; Banda encolada; Material compuesto.

## INTRODUCCIÓN

La técnica de refuerzo de estructuras con materiales compuestos, en forma de bandas adheridas a los paramentos, se está imponiendo cada vez más, sobre todo por sus ventajas constructivas, que la llevan a ser una opción económicamente competitiva.

Así, la ligereza y flexibilidad de las bandas hace que su colocación pueda realizarse de forma muy rápida, con todo lo que ello supone (por ejemplo, de cara al corte de tráfico), y con unos medios auxiliares muy sencillos y livianos. Esto es especialmente notorio al compararla con otra técnica similar de refuerzo, la de chapas de acero encoladas.

Se trata de una técnica bastante reciente, iniciada en su aplicación a puentes hace algo más de una década en Alemania y, poco después, en Suiza (1, 2). Con posterioridad, se

ha extendido con rapidez por otros países. La primera aplicación en España fue el refuerzo, en 1996, de un puente de hormigón armado (puente del Dragó) en Barcelona (3).

Los materiales compuestos que más se utilizan en esta técnica son de matriz epoxídica, siendo las fibras de carbono, vidrio o aramida; los adhesivos que se emplean suelen ser resinas epoxi. En (4, 5) puede encontrarse información sobre su composición y características.

Por supuesto, la disposición de las bandas de refuerzo debe ser tal, que las mismas trabajen a tracción (tienen una rigidez a flexión despreciable).

En este trabajo se pretende estudiar el comportamiento estructural básico que lleva consigo esta técnica; esto es, el comportamiento de la estructura reforzada, el del refuerzo y el de su interacción. En el estudio se destacan los parámetros principales que influyen al respecto y cómo lo hacen, enfocando todo ello hacia el proyecto de este tipo de refuerzos.

Para ello, se plantea un análisis estructural basado en un modelo analítico bastante sencillo, dentro del rango li-

(\*) Doctor ingeniero de Caminos. Profesor de investigación del CSIC (Instituto de Ciencia de Materiales de Barcelona).



neal. En el mismo se contemplan los refuerzos destinados a aumentar la resistencia a flexión.

Este modelo es paralelo a otro propuesto por el autor para considerar la interacción entre tendón y hormigón en estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes (6). Se trataba allí de ver cómo incidía el efecto de engranamiento elástico en la interacción, antes del deslizamiento del tendón (regido ya por el rozamiento simple).

Como se verá, en este análisis se sustituye (el incremento de) la fuerza del tendón por la que se moviliza en el refuerzo aplicado a la estructura.

El estudio es, en principio, válido para estructuras de cualquier material (hormigón armado, hormigón pretensado, acero, etc.), reforzadas a flexión, con refuerzos tanto pasivos como activos.

Aunque el análisis estructural se orienta más bien hacia la situación de servicio, al final del trabajo se tratará de cómo pueden extenderse con facilidad ciertas conclusiones básicas, más allá de dicha situación.

Así, y como consecuencia del análisis del comportamiento estructural desarrollado, se ofrecen asimismo al final algunos criterios sencillos que pueden servir para el proyecto de este tipo de refuerzos.

## PLANTEAMIENTO GENERAL

Recordemos el modelo aplicado en su día al hormigón pretensado con tendones no adherentes (6), antes citado, de modo muy breve.

Se partía, para la interacción entre tendón y hormigón, de una relación proporcional entre la fuerza tangencial o rasante  $t$  y el deslizamiento relativo  $u$ , esto es, de una ley  $t-u$  lineal.

Así,  $t = -C \cdot u$ .

Además, si  $P$  es (el incremento de) la fuerza del tendón,  $t = -\frac{dP}{dx}$ .

Las dos expresiones previas llevan a  $\frac{dP}{dx} = P' = C \cdot u$ .

Si se deriva la anterior se obtiene  $P'' = C \cdot u'$ .

Por otro lado, la diferencia de deformaciones (entre tendón y hormigón) a la altura del tendón viene dada por

$$u' = \frac{du}{dx} = \varepsilon_p - \varepsilon_{ce} = \frac{P}{E_p A_p} - \left[ -\frac{P}{E_c A_c} - \frac{(P \cdot e + M) \cdot e}{E_c I_c} \right] = \frac{P}{E_p A_p} \left[ 1 + n A_p \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c} \right) \right] + \frac{M \cdot e}{E_c I_c},$$

donde  $e$  es la excentricidad del tendón y  $E_p A_p$  su rigidez; mientras que, para la sección de hormigón (incluyendo las armaduras adherentes),  $E_c A_c$  es la rigidez axial y  $E_c I_c$  la rigidez a flexión; y  $M$  es el momento de las cargas que actúan después del pretensado.

Si se considera ya una pieza (supuesta, para simplificar, de sección constante), al sustituir la última expresión en la anterior a ella se tiene

$$P''(x) = C \left\{ \frac{P(x)}{E_p A_p} \left[ 1 + n A_p \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e(x)^2}{I_c} \right) \right] + \frac{M(x) \cdot e(x)}{E_c I_c} \right\},$$

ecuación diferencial de la forma  $y''(x) - k \cdot y(x) = f(x)$ , cuya solución, como  $k$  no depende de  $x$  (o prácticamente no depende, por ser mínima la incidencia del término  $e(x)^2$  en el factor  $k$ ), es

$$P(x) = P_{part}(x) + A \cdot e^{\sqrt{k} \cdot x} + B \cdot e^{-\sqrt{k} \cdot x}.$$

Las condiciones de borde eran que  $u = 0$  en los anclajes del tendón.

Consideremos ya una estructura reforzada a flexión mediante una banda adherida a la misma sobre el paramento de la zona traccionada.

Como la banda tiene una rigidez a flexión despreciable, nos hallamos ante una situación totalmente similar a la anterior, cambiando el tendón por la banda de refuerzo; la cual, por supuesto, trabaja también a tracción.

Así, el incremento de la fuerza del tendón  $P$  resulta ser la fuerza que aparece en la banda, si el refuerzo es pasivo, o el incremento de la fuerza en la misma, si el refuerzo es activo; todo ello, para la flexión  $M$  producida por las cargas que actúan una vez colocado el refuerzo.

En la figura 1 se muestra un esquema del deslizamiento relativo  $u$  entre refuerzo y estructura, provocado por la dis-

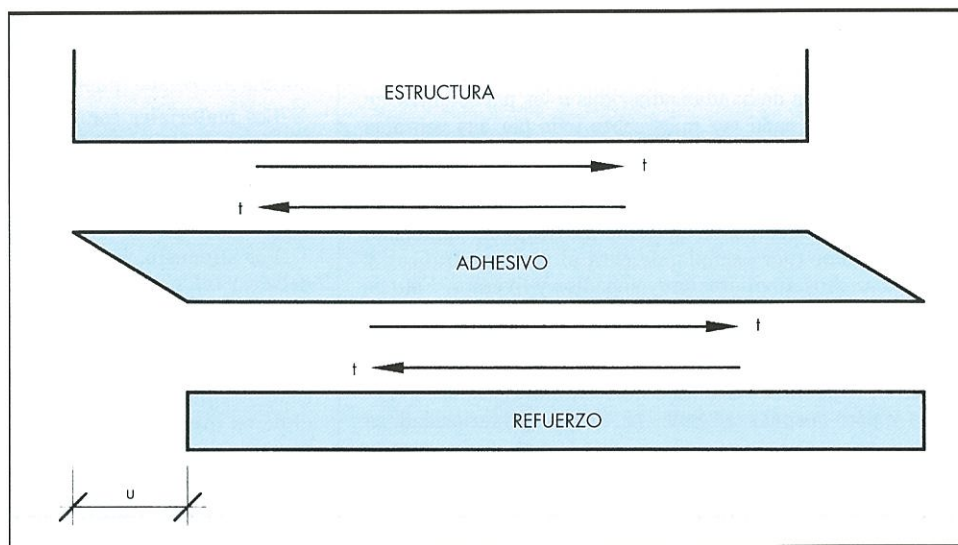


FIGURA 1. Esquema de la interacción refuerzo-estructura.

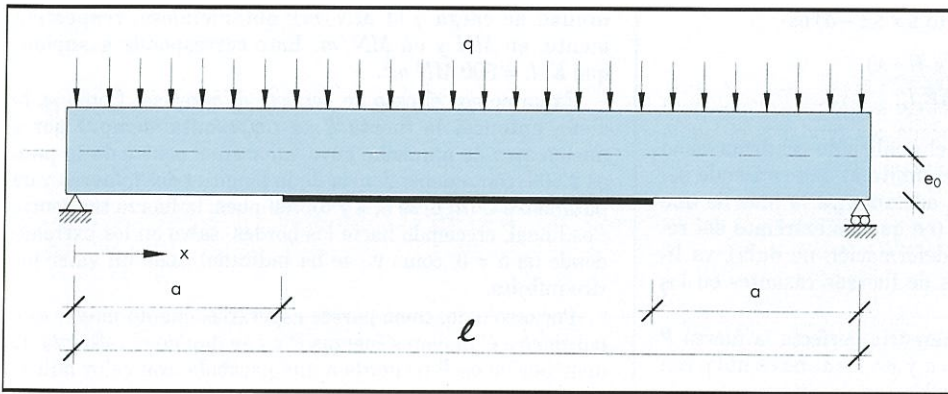


FIGURA 2. Ejemplo de estructura reforzada analizado.

torsión de la capa de adhesivo al ser sometida a la fuerza tangencial  $t$ . Se toma entonces, para el adhesivo, una ley  $t - u$  lineal, con una rigidez  $C$ :  $t = C \cdot u$ .

Como los extremos del refuerzo están libres, la fuerza en ellos es nula. Así, las condiciones de borde corresponden a que  $P = 0$  en esos puntos.

En principio, este modelo lineal se ajusta más bien al comportamiento de la estructura reforzada en situación de servicio; aunque ofrece pautas para su extensión a otras situaciones de carga más avanzadas.

En lugar de entrar en un desarrollo matemático abstracto, en lo que sigue se analiza un ejemplo sencillo que, aparte de su eventual interés particular, permitirá llegar incluso a ciertas conclusiones generales sobre este tipo de refuerzos. Aunque la estructura es la más simple, no es preciso complicar el ejemplo, y los cálculos, bastando para lo que ahora se pretende.

### EJEMPLO

Sea una viga de hormigón, de sección constante, mostrada en la figura 2.

La pieza tiene una banda de refuerzo, de área  $A_p$ , colocada sobre su paramento inferior, de modo simétrico y sobre la longitud  $l - 2a$ . Una vez reforzada la viga, actúa sobre toda ella una carga repartida  $q$ .

Las características de la sección de hormigón,  $A_c$  e  $I_c$ , que se suponen constantes a lo largo de la pieza, no requieren por el momento, como se verá, valores numéricos para lo que trata de mostrarse, al igual que el módulo de deformación del hormigón,  $E_c$ .

Antes que nada, haremos unas observaciones respecto al convenio de signos que aquí se adopta para las variables  $e$  y  $t$ .

Como el refuerzo está siempre en zona de tracciones, su excentricidad  $e$  se toma siempre positiva, lo que en este caso cambia el signo adoptado en (6), alterando con ello el signo del término en  $M(x)$ . La fuerza  $t$  que actúa sobre el refuerzo es positiva si corresponde a un  $u$  positivo (tal como muestra la figura 1), al contrario que en (6), donde era positiva la que tenía el mismo sentido que  $u$ ; lo que no altera nada (dos cambios de signo llevan a la misma relación  $P' = C \cdot u$ ).

Veamos el ejemplo. La excentricidad del refuerzo es constante:  $e(x) = e_0$ .

Con las observaciones sobre los signos, se llega a la ecuación diferencial

$$P''(x) = C \left\{ \frac{P(x)}{E_p A_p} \left[ 1 + n A_p \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e_0^2}{I_c} \right) \right] - \frac{M(x) \cdot e_0}{E_c I_c} \right\},$$

con  $P(a) = 0$  y  $P(l - a) = 0$ .

Si, para simplificar la notación, se llama  $K$  al factor que multiplica a  $P$ ,

$$K = \frac{1}{E_p A_p} \left[ 1 + n A_p \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e_0^2}{I_c} \right) \right],$$

la ecuación diferencial queda como

$$P''(x) = C \left[ K \cdot P(x) - \frac{M(x) \cdot e_0}{E_c I_c} \right] = CK \cdot P(x) - C \frac{q \cdot e_0 \cdot x \cdot (l - x)}{2 E_c I_c}.$$

Por tanto, la solución que define la fuerza ( $a \leq x \leq l - a$ ) es de la forma

$$P(x) = -\frac{q \cdot e_0}{2 K E_c I_c} \left( x^2 - l \cdot x + \frac{2}{CK} \right) + A \cdot e^{\sqrt{CK} \cdot x} + B \cdot e^{-\sqrt{CK} \cdot x} =$$

$$= -\frac{q \cdot e_0}{2 K E_c I_c} \left\{ x^2 - l \cdot x + \frac{2}{CK} + A^* \cdot e^{\sqrt{CK} \cdot x} + B^* \cdot e^{-\sqrt{CK} \cdot x} \right\}.$$

Con las condiciones citadas, esto es,  $P(a) = P(l - a) = 0$ , la solución se concreta de modo que

$$A^* = -\left( a^2 - l \cdot a + \frac{2}{CK} \right) \cdot \frac{e^{\sqrt{CK} \cdot a} - e^{\sqrt{CK} \cdot (l-a)}}{e^{2\sqrt{CK} \cdot a} - e^{2\sqrt{CK} \cdot (l-a)}}$$

y

$$B^* = -\left( a^2 - l \cdot a + \frac{2}{CK} \right) \cdot \frac{e^{-\sqrt{CK} \cdot a} - e^{-\sqrt{CK} \cdot (l-a)}}{e^{-2\sqrt{CK} \cdot a} - e^{-2\sqrt{CK} \cdot (l-a)}}$$

Así, la fuerza tangencial o rasante sobre el refuerzo ( $a \leq x \leq l - a$ ) es

$$t(x) = P'(x) = -\frac{q \cdot e_0}{2 K E_c I_c} \left\{ 2x - l + \sqrt{CK} \left( A^* \cdot e^{\sqrt{CK} \cdot x} - B^* \cdot e^{-\sqrt{CK} \cdot x} \right) \right\}.$$

Finalmente, se hará referencia a la misma técnica, pero suponiendo *perfecta adherencia*, para la cual se sabe que (6)

$$u' = \varepsilon_p - \varepsilon_{ce} = \frac{P}{E_p A_p} \left[ 1 + n A_p \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e^2}{I_c} \right) \right] - \frac{M \cdot e}{E_c I_c} = 0.$$

Entonces,

$$\frac{P(x)}{E_p A_p} \left[ 1 + n A_p \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e_0^2}{I_c} \right) \right] = K \cdot P(x) =$$

$$= \frac{M(x) \cdot e_0}{E_c I_c} = \frac{q \cdot e_0 \cdot x \cdot (l - x)}{2 E_c I_c}.$$



por lo que en este caso la fuerza ( $a \leq x \leq l - a$ ) es

$$P(x) = \frac{q \cdot e_0 \cdot x \cdot (l - x)}{2KE_c I_c}.$$

Parece bastante evidente, y el análisis lo confirma como se verá, que esta situación es el límite al que se tiende según crece el parámetro  $C$ . Ello adelanta ya la idea de que esta técnica, en el caso general (en que los extremos del refuerzo se sitúan en zonas con deformación no nula), va ligada a grandes concentraciones de fuerzas rasantes en los extremos.

En efecto, si  $a \neq 0$ , para adherencia perfecta la fuerza  $P$  en los extremos del refuerzo ( $x = a$  y  $x = l - a$ ) no es nula, con lo cual la fuerza tangencial en ellos sería teóricamente infinita; lo que significa que esos puntos funcionarían como si fueran anclajes.

En la práctica, conviene poner todas las expresiones anteriores en forma adimensional, esto es, en función de  $x/l$ ; con lo que  $l^2$  figura también en el factor común y  $\sqrt{CKI^2}$  aparece en los exponentes.

Para poder ofrecer resultados concretos, supondremos desde ahora que  $l = 20 \text{ m}$ ,  $a = 4 \text{ m}$ ,  $e_0 = 0,5 \text{ m}$  y  $K = 0,02 \text{ MN}^{-1}$ .

El valor de la carga  $q$  no se necesita en principio, ya que sólo figura en el factor común, idéntico en todos los resultados. Por tanto, éstos pueden referirse siempre a su valor y al de otros parámetros del factor común: aquí, en concreto, se referirán a  $q/(2 E_c I_c)$ . La rigidez  $E_c I_c$  se equipara con  $q$  porque, aunque entra en el parámetro  $K$ , no influye prácticamente nada en relación con el área del refuerzo  $A_p$ , que es la que fija casi del todo el valor de  $K$  (junto con el módulo  $E_p$ ).

Entonces, los resultados que se dan (tanto en el texto como en las figuras, en las que viene indicado lo que sigue) para las fuerzas longitudinal  $P$  y tangencial o rasante  $t$ , en el refuerzo, deben ser multiplicados por  $10^{-3}$ , para cada

unidad de carga  $q$  ( $1 \text{ MN/m}$ ); obteniéndose, respectivamente, en  $\text{MN}$  y en  $\text{MN/m}$ . Esto corresponde a suponer que  $E_c I_c = 500 \text{ MN m}^2$ .

Examinemos el caso de *perfecta adherencia*. Como se ha visto, entonces la fuerza  $P$  se representa siempre por el mismo arco de parábola, cuyo valor en el centro de la pieza es 2.500, con independencia de la longitud del refuerzo y del parámetro  $C$  (figuras 3, 4 y 5). Así pues, la fuerza tangencial  $t$  es lineal, creciendo hacia los bordes, salvo en los extremos donde (si  $a \neq 0$ , como ya se ha indicado) tiene un valor teórico infinito.

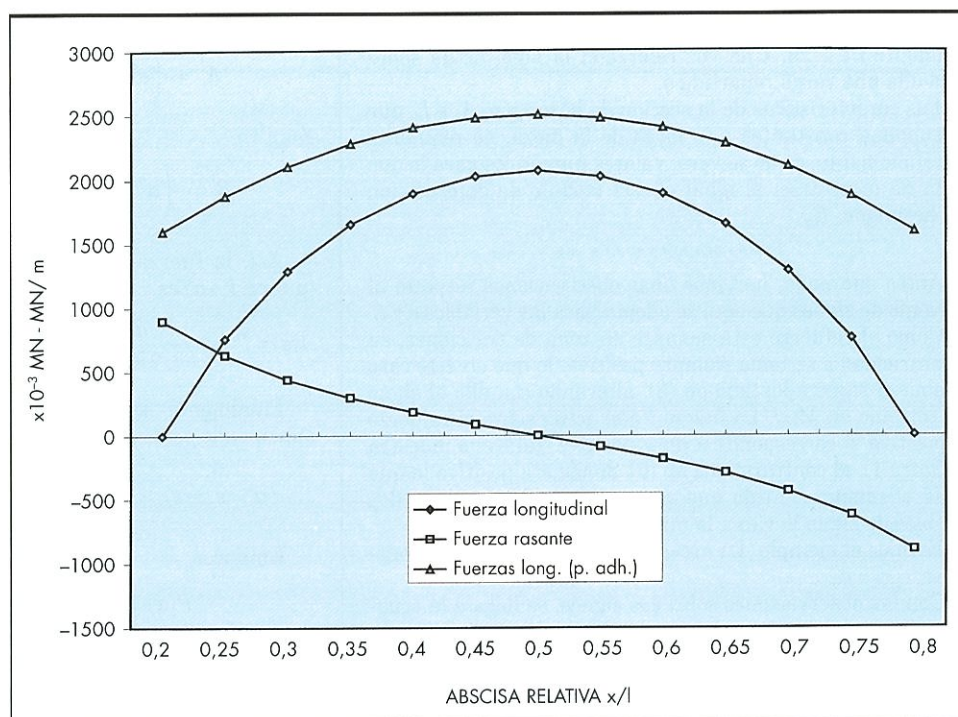
Por otro lado, como parece esperarse, cuanto mayor es el parámetro  $C$  mayores fuerzas  $P$  y  $t$  se dan en el refuerzo. La distribución de  $P$  recuerda a una parábola (con valor nulo en los extremos, como se sabe); pero, claro, no lo es y sí una suma de exponenciales y por ello la fuerza tangencial  $t$  crece hacia los bordes de modo más rápido que el lineal.

Además, hay que subrayar el hecho de que, conforme crece  $C$ , no sólo se movilizan en el refuerzo mayores fuerzas, sino que a la vez las fuerzas tangenciales se concentran cada vez más hacia los extremos (se hace cada vez más acusada su rapidez de crecimiento desde el centro). Ello es coherente con lo dicho para la situación de perfecta adherencia, como límite de lo anterior, donde en teoría aparecen (salvo para casos singulares) fuerzas tangenciales infinitas en los extremos.

Todo ello puede apreciarse en las figuras 3, 4 y 5; las cuales corresponden, respectivamente, a los siguientes valores de  $C$ : 10, 100 y  $1.000 \text{ MPa}$ . Así, en particular, se ve con claridad que la perfecta adherencia es la situación límite a la que se tiende cuando crece el parámetro  $C$ .

En fin, este parámetro depende sobre todo de varios factores ligados al refuerzo y al adhesivo entre refuerzo y pieza, a saber, la anchura del refuerzo  $b$ , el espesor del adhesivo  $s$  y el módulo transversal  $G$  del material de éste; así, en principio, puede formularse  $C = \frac{Gb}{s}$ .

FIGURA 3. Leyes de las fuerzas longitudinal (incluyendo perfecta adherencia) y rasante. ( $C = 10 \text{ MPa}$ ;  $CKI^2 = 80$ ).





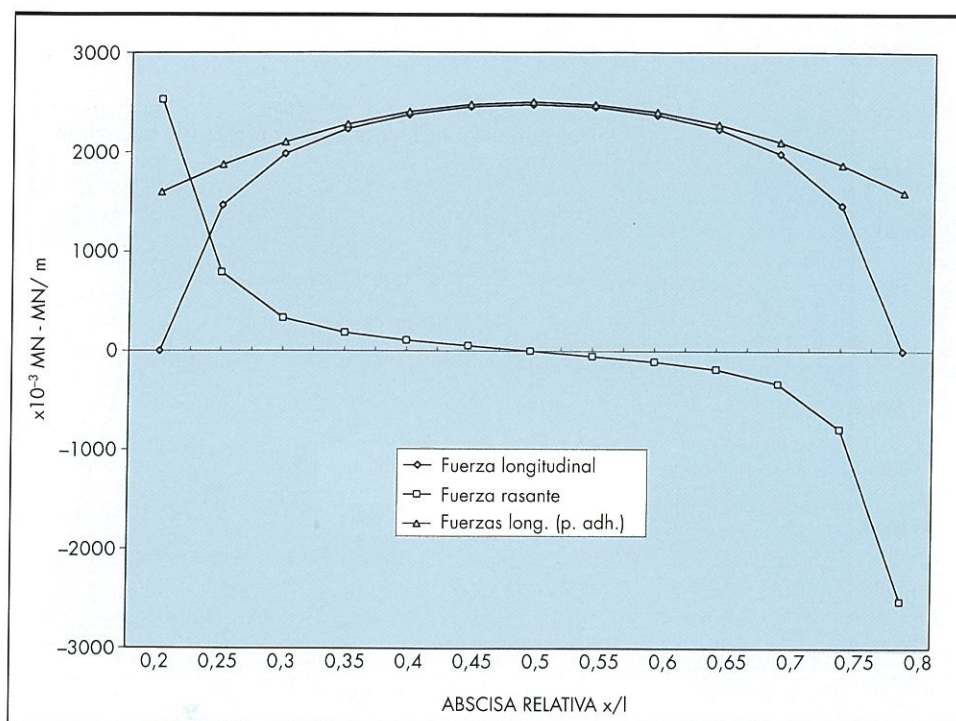


FIGURA 4. Leyes de las fuerzas longitudinal (incluyendo perfecta adherencia) y rasante. ( $C = 100 \text{ MPa}$ ;  $CKl^2 = 800$ ).

El parámetro  $K$  depende sobre todo, como se sabe, del área del refuerzo  $A_p$  y del módulo  $E_p$  de su material, de modo inversamente proporcional.

Al suponer  $K$  variable, como siempre aparece junto a  $C$  en las expresiones previas, todo lo dicho para  $C$  vale en principio para  $K$ .

No obstante, hay que recordar que  $K$  también está en el denominador del factor común, siendo esta influencia la que más cuenta. Por ello, de cara a las fuerzas que aparecen en el refuerzo, este último efecto compensa con mucho el anterior; así, conforme va creciendo este parámetro, aquéllas disminuyen casi proporcionalmente (otra cosa es su influencia sobre las tensiones en el refuerzo, las cuales aumentan algo).

En realidad, lo que más influye en la forma de las distribuciones de fuerzas, y por tanto en la posición relativa de, por ejemplo, el máximo de las fuerzas rasantes, es el valor del factor  $\sqrt{CKl^2}$ .

En cuanto a la rigidez de la pieza reforzada, este parámetro influye por encima de todo a través del mismo factor común, donde aparece asimismo en el denominador; con lo que las fuerzas que se movilizan en el refuerzo son inversamente proporcionales a su valor. Ello significa que, normalmente, a igualdad de todo lo demás, dichas fuerzas son mayores en piezas de hormigón armado que en piezas pretensadas; lo que se ve incrementado por la influencia proporcional de la excentricidad del refuerzo, parámetro que es mayor en las piezas armadas.

En realidad, la influencia de estos dos últimos parámetros refleja la, por otro lado evidente, proporcionalidad que existe entre la deformabilidad de la pieza en la zona del refuerzo y las fuerzas que aparecen en éste. Ello lleva a augurar que, en estados de carga más allá de servicio, con una mayor concentración relativa de deformaciones en la zona central de la pieza, se concentren aún más las fuerzas tan-

genciales en los extremos del refuerzo, siendo casi constante su fuerza en la zona central.

En cuanto a la longitud  $a$ , este parámetro no tiene gran influencia en la fuerza  $P$  (salvo en los extremos, claro); mientras sí que la tiene en la fuerza rasante  $t$ , en el sentido de que conforme crece, disminuyendo la longitud del refuerzo, las fuerzas  $t$  aumentan.

Aparte de ello, a igualdad de los demás parámetros, existe un valor de  $a$  en que la fuerza tangencial o rasante máxima, siempre en los extremos del refuerzo, alcanza a su vez un valor máximo.

Este máximo se aprecia al examinar la ley de dicha fuerza, cuya posición es precisamente la de abscisa  $a$ ; esto es, al observar la ley  $t(a)$ .

Su obtención, como es lógico, pasa por resolver la expresión  $\frac{dt(a)}{da} = 0$ .

La ley  $t(a)$  viene dada por

$$t(a) = -\frac{q \cdot e_0}{2KE_c I_c} \left\{ 2a - l + \sqrt{CK} \left( a^2 - l \cdot a + \frac{2}{CK} \right) \cdot \frac{e^{\sqrt{CK}(l-2a)} + e^{-\sqrt{CK}(l-2a)} - 2}{e^{\sqrt{CK}(l-2a)} - e^{-\sqrt{CK}(l-2a)}} \right\}.$$

La citada resolución lleva a una ecuación trascendente en  $a$ , que por su extensión no se va a reproducir aquí, de modo que el máximo de la fuerza tangencial se da para un punto cuya abscisa crece con los valores de  $C$  y  $K$ ; con lo cual dicho punto se va desplazando desde el extremo hacia el centro de la pieza (además de éste, la ecuación tiene siempre como solución  $a = l/2$ ; pero resulta evidente que no es la que interesa).

Lo anterior se muestra como algo inesperado. Parece que lo esperable sea que la fuerza rasante máxima descienda siempre al aumentar la longitud del refuerzo, no existiendo



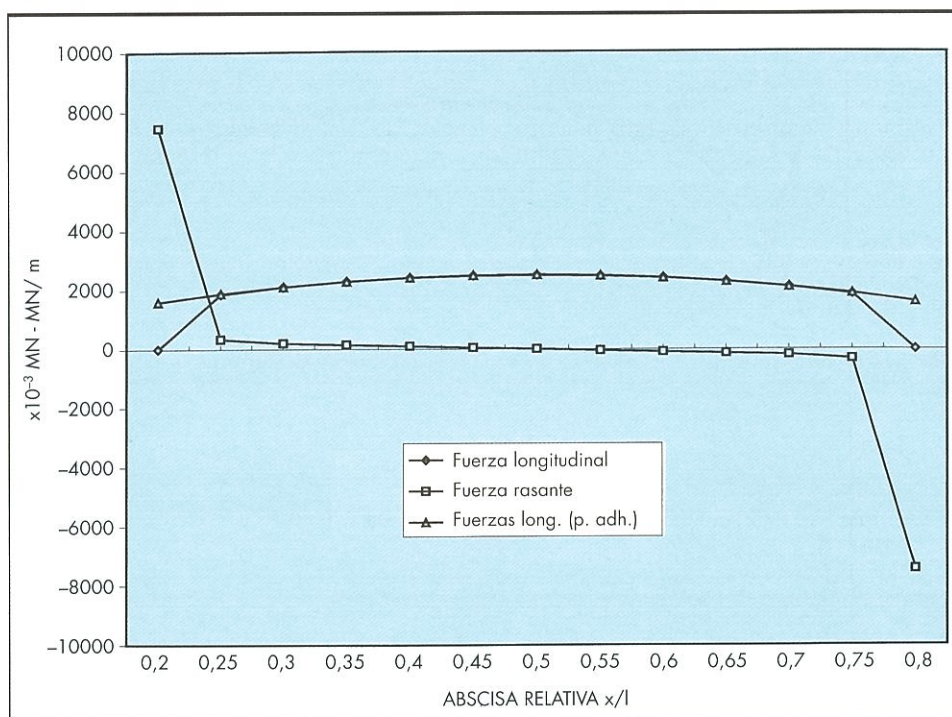


FIGURA 5. Leyes de las fuerzas longitudinal (incluyendo perfecta adherencia) y rasante. ( $C = 1000 \text{ MPa}$ ;  $CKI^2 = 8000$ ).

así tal máximo en posición intermedia.

No obstante, para los valores de  $C$  en esta técnica, bastante altos, lo dicho es sólo una curiosidad matemática, porque dicho máximo se da ya muy cerca del centro y, en la práctica, ocurre lo que parece esperable.

Sí resulta interesante que, con tales valores de  $C$ , la fuerza rasante  $t(a)$  puede ponerse, para  $0 \leq a < \frac{l}{2}$ , como

$$t(a) = -\frac{q \cdot e_0}{2KE_c I_c} \left\{ 2a - l + \sqrt{CK} \left( a^2 - l \cdot a + \frac{2}{CK} \right) \right\}.$$

de forma muy aproximada y por el lado de la seguridad.

Por último, la carga  $q$  y la luz  $l$  de la pieza reforzada influyen a través del factor  $q l^2$ , como ocurre en todo análisis estructural lineal.

## EXTENSIÓN DEL ANÁLISIS Y ENFOQUE HACIA EL PROYECTO

El análisis realizado más arriba puede plantearse, por supuesto, fuera del rango lineal; pero, para lo que aquí se pretende, ello no es necesario.

Como consecuencia de sus resultados, queda bien establecido que, en la zona de la pieza que está próxima a la sección crítica a flexión, el comportamiento del refuerzo se caracteriza por lo siguiente:

- 1) La fuerza  $P$  alcanza su valor máximo  $P_{max}$ .
- 2) Se deforma casi como si existiera perfecta adherencia con la estructura.

Más allá del rango lineal, al empezar a plastificar la zona crítica y tener menor rigidez relativa, parece claro que no cambia esta última tendencia.

Si el refuerzo es asimétrico respecto a la sección crítica, es evidente que  $P_{max}$  se da en un punto entre el centro del refuerzo y dicha sección.

Por tanto, dicha fuerza puede calcularse con el criterio de perfecta adherencia, teniendo en cuenta que queda por el lado de la seguridad a efectos del refuerzo (la fuerza real es muy aproximada y un poco menor).

Lo anterior significa tratar el refuerzo como si fuera una armadura adherente: así, para obtener la citada fuerza  $P_{max}$ , basta un cálculo de la sección crítica a partir del momento existente en la misma.

Por otro lado, como la ley real  $t - u$  ( $\tau - u$ , en tensiones rasantes) del adhesivo es no lineal y presenta una rama de ablandamiento, conviene analizar lo que ello implica. Esta no linealidad se alcanza, en su caso, en los extremos del refuerzo; como, en el análisis lineal,  $u$  (igual que  $t$ ) crece muy deprisa en esas zonas, para el tipo normal de ablandamiento las  $t$  extremas (ligadas a las  $\tau$  más allá del pico) aportan muy poco (7): no vale la pena sobrepasar la tensión rasante máxima de la ley. Además, no debe superarse la tensión  $\tau$  que inhabilite la unión por la parte más débil, normalmente la interfaz entre adhesivo y estructura; la cual, por otro lado, suele ser inferior a la tensión máxima anterior.

Así, se establece una tensión rasante límite  $\tau_{lim}$ .

Todo ello permite (al extrapolar el comportamiento de la estructura a situaciones más avanzadas de carga) apuntar unos criterios que pueden ser útiles para dimensionar el refuerzo, los cuales se resumen a continuación.

Se obtiene la fuerza  $P_{max}$  del cálculo en agotamiento de la sección crítica de la pieza, para alcanzar en ella el momento último requerido, tomando el refuerzo como armadura adherente (antes de la rotura del refuerzo, la sección debe plastificar lo más posible). Se calcula la carga  $q$  que, con la rigidez media de la pieza en esa fase, produciría esa  $P_{max}$ .

Con la carga  $q$  anterior, se obtiene la fuerza tangencial máxima  $t(a)$ , la cual debería ser tal que  $\tau(a) \leq \tau_{lim}$ .



Supuestos elegidos el tipo de refuerzo y de adhesivo, se dimensiona el área de la banda o bandas de refuerzo con  $P_{max}$ . Se dimensionan entonces las demás variables con la idea de que  $\tau(a) \leq \tau_{lim}$ : la variable fundamental es la distancia  $a$  (influye, junto con  $C$ , en  $t(a)$ ), que fija la longitud del refuerzo; también es posible jugar con el ancho del refuerzo (influye en  $C$  y  $\tau(a)$ ), si cabe optar por varios grosores, y el espesor del adhesivo (influye en  $C$ ), aunque su rango de variación es bajo.

La idea de calcular la fuerza máxima del refuerzo considerando perfecta adherencia, derivada como conclusión práctica del análisis descrito más arriba, ha sido asimismo corroborada experimentalmente (7, 8, 9).

## CONCLUSIÓN

Para el análisis estructural de la técnica aquí tratada, se ha empleado un modelo lineal donde refuerzo y estructura se relacionan así: en equilibrio, toda tracción  $P$  en el refuerzo supone igual compresión sobre la estructura y su derivada es la fuerza tangencial  $t$  sobre el mismo; en compatibilidad, la diferencia de deformación entre refuerzo y estructura es la derivada de su desplazamiento relativo  $u$ ; en fin, enlazando las anteriores, aparece la relación  $t - u$  de la capa de adhesivo.

Ello lleva a una ecuación diferencial cuya resolución marca las pautas básicas del comportamiento estructural en esta técnica. Se ha examinado la influencia de los parámetros implicados: en el refuerzo (área, rigidez de su material, excentricidad y longitud relativa con respecto a la pieza), en la estructura (rigidez y luz) y en el adhesivo (espesor, anchura y rigidez de su material), además de la carga que aparece después de reforzar.

Los resultados del análisis efectuado, aun basados en un caso particular, son bastante representativos, por tratarse de un caso genérico y típico que recoge los elementos relevantes de la técnica; cabe así generalizar su interpretación, manteniendo sus conclusiones básicas, a otros casos.

Además, de cara a la práctica, ciertas conclusiones son extensibles al comportamiento de la estructura reforzada al superarse el rango lineal.

Lo anterior ha dado pie a sugerir unos criterios útiles para el proyecto de estos refuerzos, calculando en fase de

agotamiento la fuerza máxima del refuerzo como si éste fuera una armadura adherente y obteniendo la fuerza tangencial máxima que le corresponde en esta fase, de modo que la tensión rasante máxima quede limitada por un cierto valor admisible.

## BIBLIOGRAFÍA

1. MEIER, U.; DEURING, M.; MEIER, H. & SCHWEGLER, G. Strengthening of structures with advanced composites. *Alternative Materials for the Reinforcement and Prestressing of Concrete* (Editor: J. L. Clarke). Chapman & Hall, 1993 (pp. 153-171).
2. MEIER, U. Rehabilitation and retrofitting of existing structures through external bonding of thin carbon fibre sheets. *Bridge Assessment Management and Design* (Editores: B. I. G. Barr, H. R. Evans, J. E. Harding). Elsevier Science B. V., 1994 (pp. 373-378).
3. GÓMEZ PULIDO, M. D. y SOBRINO, J. A. Refuerzo de estructuras de hormigón con materiales compuestos con fibra de carbono. Aplicación al puente del Dragó, Barcelona. *Hormigón y Acero* nº 210 (en prensa), 1998.
4. MIRAVETE, A. *Los nuevos materiales en la construcción*. Zaragoza, 1994.
5. MEIER, U. Carbon fiber-reinforced polymers: Modern materials in bridge engineering. *Structural Engineering International* 1/92, IABSE, 1992 (pp. 7-12).
6. MURCIA, J. Modelos para la interacción tendón-hormigón en estructuras de hormigón pretensado con tendones no adherentes. *Hormigón y Acero* nº 173, 1989 (pp. 63-75).
7. TRIANTAFILLOU, T. C.; DESKOVIC, N. & DEURING, M. Strengthening of concrete structures with prestressed fiber reinforced plastic sheets. *ACI Structural Journal*, Vol. 89, No. 3, 1992 (pp. 235-244).
8. RITCHIE, P. A.; THOMAS, D. A.; LU, L. & CONELLY, G. M. External reinforcement of concrete beams using fiber reinforced plastics. *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 4, 1991 (pp. 490-500).
9. MEIER, U. Strengthening of structures using carbon fibre/epoxy composites. *Construction and Building Materials*, Vol. 9, No. 6, 1995 (pp. 341-351).