

Aplicación de la recuperación variacional al cálculo de movimientos de estructuras de un grado de libertad sometidas a la acción de un sismo

MIGUEL FERNÁNDEZ RUIZ (*); MIGUEL ÁNGEL MAYOR GAMO (*); MANUEL PASTOR PÉREZ (**)

RESUMEN La creciente preocupación sobre el efecto de procesos de naturaleza estocástica en construcciones civiles ha desembocado en el desarrollo de una nueva serie de técnicas que permiten una gran velocidad de cálculo y arrojan resultados con errores aún menores que métodos tradicionales (diferencias finitas,...). En el presente artículo se aplica la recuperación variacional, que basándose en el criterio de Galerkin de ortogonalidad a la función de error obtiene las derivadas primera y segunda de una función (por ejemplo velocidad y aceleración a partir de la función desplazamientos de una estructura) por procedimientos matriciales. El gran número de lenguajes de programación que incorporan funciones de cálculo matricial facilita la elaboración de algoritmos basados en estas ideas. Por último es interesante resaltar que la recuperación variacional se realiza a través del ensamblaje de una serie de matrices de masa y rigidez, con lo cual puede ser aplicado a una "función discreta" con independencia del número de puntos que la constituyan.

A VARIATIONAL RECOVERY TECHNIQUE FOR SEISMIC BEHAVIOUR OF 1DOF SYSTEMS

ABSTRACT *Variational recovery techniques have been used in the context of error estimation in Finite Elements. There, from stress or strain fields which are discontinuous between elements, it is possible to obtain nodal values, which in turn provide a better estimation of both variables at gauss points. Here, this technique will be applied to obtain displacements from histories of either velocities or accelerations. It will be shown that it allows also the determination of smooth velocity or accelerations.*

Palabras clave: Ecuación de D'Alembert; Función discreta; Diferencias finitas; Ensamblaje matricial; Matriz dispersa; Regiones críticas.

1. INTRODUCCIÓN

Los terremotos son, desgraciadamente, un fenómeno mundial difícil de predecir y de graves consecuencias en cuanto a pérdidas humanas, económicas y materiales. Sin embargo, en países no situados en zonas eminentemente sísmicas y con escasos terremotos destructivos han sido siempre considerados como circunstancias que no se producirían en un futuro inmediato y, por lo tanto, no merecedores de un estudio previo en proyectos de construcción ni de la sobrecarga económica que un estudio profundo provocaría. Este tipo de descuidos se ha venido dando en España debido a la baja actividad sísmica de nuestro territorio. Solamente se puede hablar de riesgo sísmico en la parte sur de Andalucía, en el Pirineo Central y la parte Norte del valle del Ebro. No obstante, existe una creciente preocupación sobre el estudio de los seismos en las estructuras, no debido a

un incremento de la sismicidad, sino más bien debido a la presencia, cada vez más frecuente, de constructoras españolas en Sudamérica o Asia, donde se producen terremotos importantes.

La acción sísmica en la mayor parte de estudios viene definida por acelerogramas, los cuales constituyen la base de la multitud de investigaciones que pueden ir de las meramente estocásticas (probabilidades, frecuencias,...) hasta aquellas que procuran predecir el daño de un sismo en una estructura determinada. La ingeniería sísmica es una rama joven y los últimos desarrollos de la técnica sólo han podido aplicarse a un bajo porcentaje del número total de construcciones.

Este artículo propone un método basado en las diferencias finitas para, a partir de un acelerograma y conociendo las características de una estructura (habiéndola simplificado previamente a un sistema de un grado de libertad con un muelle y un amortiguador viscoso, como se muestra en el gráfico 1) hallar sus desplazamientos y construir a partir de ellos y mediante la recuperación variacional las velocidades y aceleraciones que se produzcan. Los resultados así obtenidos pueden servir para posteriores estudios sobre amortiguamiento y cortante respectivamente.

(*) Estudiante de la ETSICCP de Madrid.

(**) Profesor titular del dpto. de matemáticas e informática aplicadas a la ingeniería civil de la ETSICCP de Madrid.

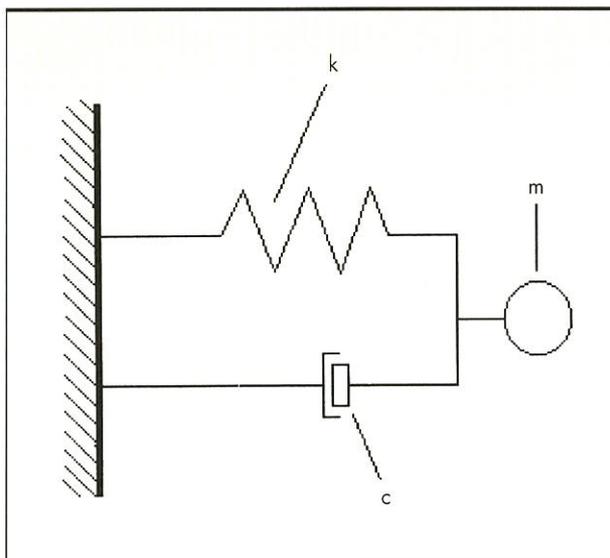


GRÁFICO 1. Modelo matemático de una estructura de un grado de libertad con amortiguación viscosa y fuerza recuperadora elástica.

2. DESARROLLO TEÓRICO

2.1. DESPLAZAMIENTOS

El primer paso en el estudio de un acelerograma consiste en determinar los desplazamientos que sufriría una estructura bajo la acción del correspondiente seísmo. Éstos se pueden hallar reduciendo el sistema a un péndulo de masa m , rigidez k y amortiguamiento c , sometido a una serie de oscilaciones forzadas debido al efecto sísmico. La ecuación, pues, que relaciona las posiciones relativas con el tiempo será:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + k \cdot u = f(t) = -m \cdot a(t)$$

donde $a(t)$ son las aceleraciones medidas en el acelerograma.

Hay varias formas de enfocar este problema. Una de ellas puede ser integrar la ecuación diferencial y obtener una función que relacione directamente los movimientos con el tiempo. Si hacemos esto llegaremos a la siguiente ecuación de Duhamel:

$$u(t) = \frac{1}{\omega_v} \int_0^t a(z) \cdot e^{-v\omega(t-z)} \text{sen}(\omega_v(t-z)) dz$$

en la cual $w^2 = k/m$, $v = c/(2m\omega)$, $\omega_v^2 = w^2(1 - v^2)$.

Este método no es, sin embargo, del todo práctico, pues puede emplearse exclusivamente para comportamientos lineales del material, circunstancia que en la realidad rara vez se presenta, sobre todo en estructuras hiperestáticas, que encuentran en el periodo elasto-plástico una manera de liberar tensiones internas. Además, aunque en principio puede parecer una forma exacta de resolver el problema, al final se llega a la solución siempre de una manera aproximada, ya que la función $a(t)$ recogida en el acelerograma no tiene una expresión analítica y se termina discretizando en tramos rectos.

Resulta especialmente útil la alternativa de las diferencias finitas, no solo por la mayor rapidez con que el ordenador alcanza la solución, sino también porque permite una mayor flexibilidad a la hora de adaptar el algoritmo a los diferentes modelos de comportamiento del material.

Sabemos, por los desarrollos de Taylor, que:

$$u(t+h) = u(t) + h \frac{\dot{u}(t)}{1!} + h^2 \frac{\ddot{u}(t)}{2!}$$

$$u(t-h) = u(t) - h \frac{\dot{u}(t)}{1!} + h^2 \frac{\ddot{u}(t)}{2!}$$

Sumando ambas expresiones y despejando la derivada segunda se obtiene:

$$\ddot{u}(t) = \frac{u(t+h) + u(t-h) - 2u(t)}{h^2}$$

Por otra parte la derivada primera puede aproximarse como:

$$\dot{u}(t) = \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de D'Alembert:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -ma(t)$$

$$u(t+h) = \frac{1}{2m+hc} [-2mh^2a(t) + (-2m+hc)u(t-h) + (4m-2kh^2)u(t)]$$

Hay que indicar que es conveniente que la derivada primera se evalúe por diferencias centradas, para reducir el factor de error. No hay que olvidar que éste último se debe hacer lo más pequeño posible, pues el mayor inconveniente de este método es su transmisibilidad de errores.

Para empezar a evaluar los desplazamientos se deben introducir en la expresión anterior dos condiciones iniciales. Imponiendo que en el instante inicial el desplazamiento y la velocidad sean nulos, se llega a la conclusión de que estos dos primeros valores del proceso iterativo deben ser nulos.

Los valores $a(t)$ corresponden a la discretización del acelerograma, del cual se toman puntos con un paso temporal de h segundos. Resulta útil que este parámetro sea constante, pues de no ser así, la expresión anterior habría resultado bastante más complicada y, además, considerar la posibilidad de diferentes longitudes de paso ralentiza significativamente el proceso de cálculo, no solo en el problema que ahora nos ocupa, sino en todos los que se van a tratar en este artículo.

2.2. RECUPERACIÓN VARIACIONAL

Cuando se hayan obtenido los desplazamientos en función del tiempo, se tendrá un listado de números u_i asociados a sus respectivos t_i . No se puede determinar con exactitud lo que sucede entre cada t_i , pero la aproximación por tramos rectos se considera bastante apropiada.

Supongamos que se va a estudiar el intervalo comprendido entre t_0 y t_1 , y veamos cómo se puede expresar $u(t)$ en dicho intervalo.

Sea $N_0(t)$ la recta que cumple $N_0(t_0) = 1$ y $N_0(t_1) = 0$; sea $N_1(t)$ la recta tal que $N_1(t_0) = 0$ y $N_1(t_1) = 1$; sus expresiones analíticas serán:

$$N_0(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}$$

$$N_1(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$$

La función $u(t)$ puede expresarse, pues, como:

$$u(t) = N_0(t) \cdot u_0 + N_1(t) \cdot u_1, \text{ para } t \text{ perteneciente a } (t_0, t_1).$$

Llegados a este punto, se puede introducir, por mayor comodidad, una transformación que lleve siempre el intervalo (t_i, t_{i+1}) al $(0,1)$.

Hágase $\xi = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}$; para $t = t_i$ se tiene ξ igual a cero,

y para $t = t_{i+1}$, ξ será igual a la unidad. Si se introduce este cambio en las expresiones de N_0 y N_1 , se obtiene:

$$N_0(\xi) = 1 - \xi$$

$$N_1(\xi) = \xi$$

2.2.1. Cálculo de derivadas primeras

Para un intervalo de tiempo dado se había llegado a la conclusión de que podíamos considerar la función de la siguiente forma:

$$\hat{u}(t) = \sum N_k(t) \cdot u_k = N_i(t) \cdot u_i + N_{i+1}(t) \cdot u_{i+1} \quad [1]$$

Al ser t_i el extremo izquierdo del intervalo, $N_i(t) = \frac{t-t_{i+1}}{t_i-t_{i+1}}$;

análogamente se llega a la conclusión de que $N_{i+1}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}$.

Si se introdujese el cambio anteriormente definido ξ , las $N(t)$ se transforman en:

$$N_1(\xi) = 1 - \xi$$

$$N_{i+1}(\xi) = \xi$$

Derivemos ahora la expresión (1), teniendo en cuenta que u_i y u_{i+1} son constantes conocidas.

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{dN_i}{dt} u_i + \frac{dN_{i+1}}{dt} u_{i+1} = \frac{dN_i}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} u_i + \frac{dN_{i+1}}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} u_{i+1} =$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \cdot u_i + 1 \cdot \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \cdot u_{i+1} = \frac{1}{l_i} (u_{i+1} - u_i)$$

Si se observa la expresión a la que se ha llegado, se verá que es idéntica a la evaluación de la derivada por diferencias finitas en modo progresivo.

Sin embargo, esta no es una manera correcta de considerar las derivadas ya que éstas serían discontinuas en los nodos que dan base a la aproximación.

Este fenómeno se ve claramente reflejado en la figura 2. Al haberse considerado como rectas los tramos de función entre nudos, sus respectivas derivadas son funciones constantes, que presentan discontinuidades en cada punto donde se producía un cambio de pendiente en la gráfica de desplazamientos. Por lo tanto, al no coincidir la derivada a la izquierda y a la derecha de los nodos, habrá que encontrar otra forma de evaluarla.

Supongamos que conocemos los valores numéricos de las derivadas en los puntos t_i . Se puede aproximar la función derivada del mismo modo que antes: $\hat{u}' = \sum N_i(t) \cdot u'_i$ siendo

u'_i los valores de las derivadas en los nodos y, se vuelve a insistir, supuestamente conocidos.

El error cometido al evaluar la derivada de esta forma será $\hat{u}'(t) - \sum N_i(t) \cdot u'_i$.

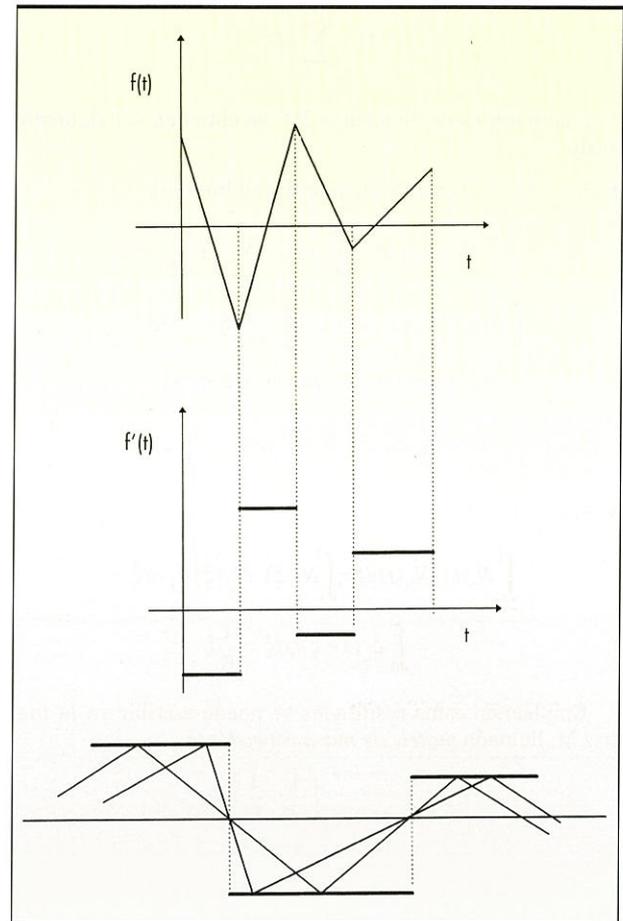


GRÁFICO 2. Ejemplo de la derivación de una función formada por tramos rectos, donde las dichas rectas han definido unas derivadas cuyo valor es constante en el intervalo. Como se ve en el gráfico inferior, existe una indeterminación en los puntos que se eligen para tener el valor de la derivada, pues sólo se conoce dónde se anulan y cuál ha de ser su valor máximo en el intervalo de definición, pero no el lugar de cambio de pendiente que ha de ser resuelto por medio de algún criterio (según recuperación variacional la ortogonalidad de la función al error).

Se puede demostrar que para obtener la mejor aproximación de una función expresada en una base dada, se tiene que imponer que el producto escalar entre las funciones base y la función error sea nulo. Se recuerda que el producto escalar entre dos funciones se define como la integral del producto de ambas en el intervalo de evaluación.

Así pues, al ser nuestra base de funciones las N_i :

$$\int_{\Omega} N_i(t) \cdot \left(\hat{u}'(t) - \sum N_j(t) \cdot u'_j \right) dt = 0$$

Despejando términos se llega a:

$$\int_{\Omega} N_i(t) \cdot \hat{u}'(t) dt = \sum_{j=1}^{n+1} \left[\int_{\Omega} N_i(t) \cdot N_j(t) dt \right] \cdot u'_j$$

$$b = M \cdot u'$$

Éste es un sistema de $(n + 1)$ ecuaciones con $(n + 1)$ incógnitas, cuya resolución permite conocer las derivadas en los nodos.

Las integrales, que aparecen extendidas a todo el dominio, se obtienen como suma de los elementos,

$$M = \sum_{e=1}^n M^{(e)}$$

Las matrices de elementos $M^{(e)}$ se obtienen del siguiente modo:

- Sea $i = j$ en el extremo izquierdo del intervalo:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_j} N_i(t) \cdot N_i(t) dt &= \int_0^1 N_i(\xi) \cdot N_i(\xi) \frac{dt}{d\xi} d\xi = \\ &= \int_0^1 N_i(\xi) \cdot N_i(\xi) \cdot l_i \cdot d\xi = \int_0^1 (1-\xi)^2 l_i \cdot d\xi = \frac{1}{3} l_i \end{aligned}$$

- Sea $i = j$ en el extremo derecho del intervalo:

$$\int_{t_i}^{t_j} N_i(t) \cdot N_i(t) dt = \int_0^1 N_i(\xi) \cdot N_i(\xi) \cdot l_i \cdot d\xi = \int_0^1 \xi^2 \cdot l_i \cdot d\xi = \frac{1}{3} l_i$$

- Sea $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_j} N_i(t) \cdot N_j(t) dt &= \int_0^1 N_i(\xi) \cdot N_j(\xi) \cdot l_i \cdot d\xi = \\ &= \int_0^1 \xi \cdot (1-\xi) l_i d\xi = \frac{1}{6} l_i \end{aligned}$$

Empleando estos resultados se puede escribir ya la matriz M , llamada *matriz de masa consistente*.

$$M^{(i)} = l_i \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Respecto a los términos independientes, se obtienen también como suma de contribuciones de los elementos.

$$\begin{aligned} b_i &= \int_{t_i}^{t_j} N_i(t) \cdot \ddot{u}(t) dt = \int_{t_i}^{t_j} N_i(t) \frac{1}{l_i} (u_{i+1} - u_i) dt = \\ &= \frac{1}{l_i} (u_{i+1} - u_i) \int_0^1 N_i(\xi) \cdot l_i \cdot d\xi = (u_{i+1} - u_i) \int_0^1 N_i(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} (u_{i+1} - u_i) \end{aligned}$$

$$b^{(i)} = \frac{1}{2} (u_{i+1} - u_i) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora sólo resta resolver el sistema, tras ensamblar las matrices $M^{(e)}$ y $b^{(e)}$, y tendremos las derivadas en los nodos.

2.2.2. Derivadas segundas

Para obtener el valor de las derivadas segundas en los nodos se procede de un modo similar al caso de las primeras.

Se suponen conocidos estos valores que se están buscando. La función derivada segunda se puede expresar como:

$$\hat{\ddot{u}}(t) = \sum N_i(t) \cdot u_i''$$

el error que se estará cometiendo será $\ddot{u}(t) - \sum N_i(t) \cdot u_i''$ y

al hacerlo ortogonal a las funciones base se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i \left(\ddot{u}(t) - \sum N_j(t) \cdot u_j'' \right) dt &= 0 \\ \sum \left[\int N_i(t) \cdot N_u(t) dt \right] \cdot u_j'' &= \int N_i(t) \cdot \ddot{u}(t) dt \end{aligned}$$

No se conoce ahora la derivada segunda de $u(t)$ en los elementos, por lo que el miembro de la derecha se debe calcular mediante integración por partes:

$$\int N_i \frac{d^2 u}{dt^2} dt = N_i \cdot \frac{du}{dt} \Big|_0^L - \int \frac{dN_i}{dt} \frac{du}{dt} dt$$

Si se suponen nulas las velocidades en los extremos, resulta:

$$- \int \frac{dN_i}{dt} \frac{du}{dt} dt = - \int \frac{dN_i}{dt} \sum \frac{dN_j}{dt} u_j dt$$

y por tanto, el sistema global es

$$M_{ij} u_j'' = -K_{ij} u_j$$

siendo

$$M_{ij} = \int N_i N_j dt$$

$$K_{ij} = \int \frac{dN_i}{dt} \frac{dN_j}{dt} dt$$

La matriz M ya se ha determinado para el cálculo de las derivadas primeras. Veamos a continuación cómo es la matriz K :

- Si $i = j$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dN_i}{dt} \frac{dN_i}{dt} dt &= \int_0^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} \frac{dt}{d\xi} d\xi = \\ &= \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{l_i} \cdot 1 \cdot \frac{1}{l_i} \cdot l_i d\xi = \frac{1}{l_i} \end{aligned}$$

- Sea $i \neq j$:

$$\int \frac{dN_i}{dt} \frac{dN_j}{dt} dt = \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{l_i} (-1) \frac{1}{l_j} \cdot l_i d\xi = -\frac{1}{l_i}$$

Así pues, la matriz K resulta ser:

$$K^{(i)} = \frac{1}{l_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz hay que ensamblarla tantas veces como intervalos definan el problema, y una vez hecho esto se puede resolver el sistema planteado con anterioridad. Es importante darse cuenta de que si las velocidades no son nulas en los extremos, se añadiría al término independiente el vector:

$$\left[-\frac{du}{dt} \Big|_0, 0, \dots, 0, \frac{du}{dt} \Big|_n \right]^T$$

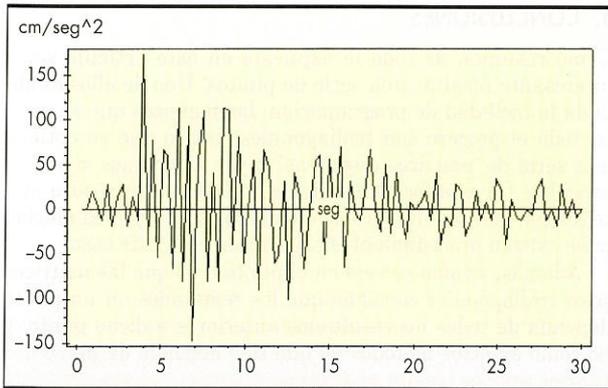


GRÁFICO 3. Acelerograma del seísmo. El terreno sobre el cual se encuentra cimentada la estructura es sometido a las aceleraciones que muestra el gráfico superior.

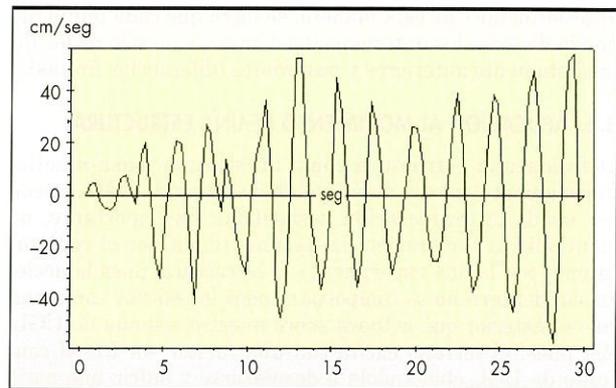


GRÁFICO 5. Velocidades de la estructura.

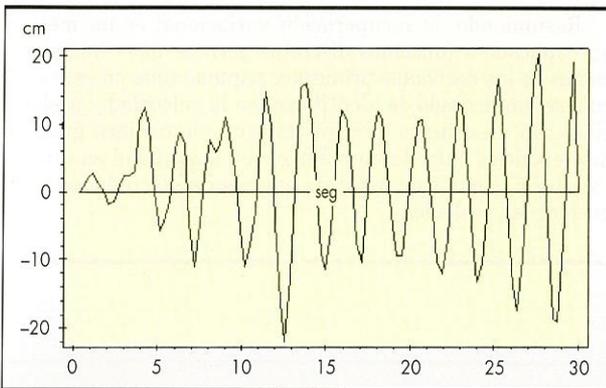


GRÁFICO 4. Desplazamientos de la estructura.

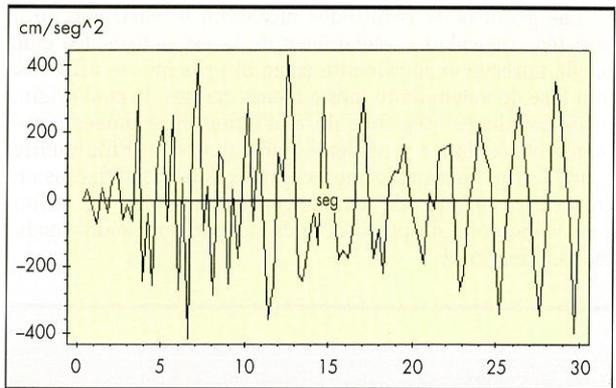


GRÁFICO 6. Aceleraciones de la estructura.

3. APLICACIÓN DE LA RECUPERACIÓN VARIACIONAL EN FUNCIONES DISCRETAS

3.1. COMPARACIÓN ENTRE LA RECUPERACIÓN VARIACIONAL Y LA APLICACIÓN DE DIFERENCIAS FINITAS A LA DETERMINACIÓN DE DERIVADAS DE UNA FUNCIÓN DISCRETA

Las funciones definidas por puntos, como los acelerogramas (ver gráfico adjunto), son estudiadas normalmente con ayuda de las diferencias finitas, las cuales al *discretizar* en el tiempo permiten hallar una serie de parámetros para unos instantes determinados. Dichas técnicas no han sido aplicadas en el estudio de los seísmos en este artículo a pesar de su facilidad de programación debido fundamentalmente a la razón que se va a exponer a continuación. Conocidos los desplazamientos de una estructura, éstos han sido aproximados por una serie de tramos rectos con una determinada pendiente, consecuentemente, la derivada de esta función está compuesta por tramos rectos paralelos al eje de abscisas (al ser la pendiente de todo ese intervalo constante). Pero como bien es sabido, este tipo de funciones definidas "a intervalos" no son continuas (a menos que se establezca arbitrariamente un criterio de continuidad por la derecha o por la izquierda), y presenta una derivada nula en el intervalo, e infinita en los extremos del mismo. Obviamente, un terremoto no exhibe este comportamiento, con lo cual es de suponer que la función está formada por tramos rectos que no son paralelos al eje de abs-

cisas, sino de una pendiente determinada. Ahora bien, existe una indeterminación de en qué puntos cambia la función formando un punto anguloso (ver gráfico 2). No existe ningún criterio objetivo que indique dónde ha de situarse el cambio de tramo (sólo es conocido la abscisa en la que se anula pues es el máximo o mínimo de la función primitiva), es decir, que pese a que tenemos definido el lugar donde ha de producirse el cambio de pendiente, no se sabe dónde está situado el punto de cambio (a menos que definamos un criterio como por ejemplo que se encuentra en la mitad del tramo,...). Es aquí donde interviene la recuperación variacional, la cual parte del mismo supuesto de considerar tramos paralelos al eje de abscisas, pero para la elección del punto utiliza el criterio de ortogonalidad de Galerkin. El punto en el que se establece el cambio de pendiente es elegido de forma tal que la función resultante es ortogonal al error (como se había visto anteriormente). La diferencia fundamental reside por lo tanto en que la recuperación variacional proporciona un criterio objetivo, estricto y definido para tomar el cambio de pendiente, mientras que pese a la facilidad de programación las diferencias finitas carecen de un criterio riguroso con el cual pueda ser minimizado el error cometido.

Además de esta importante ventaja, la determinación de la derivada de una función por el método de la recuperación variacional presenta otros claros atractivos. Podríamos citar entre ellos que dicha derivada es obtenida de la información extraída de todos los puntos anteriores que conforman la función (el sistema a resolver es tridiagonal como se veía

anteriormente), de esta manera, se logra que cada punto dependa de todos los anteriores (feed-back), y no sólo de los inmediatamente anteriores y posteriores (diferencias finitas).

3.2. APLICACIÓN AL MOVIMIENTO DE UNA ESTRUCTURA

Definida una estructura como un sistema masa-muelle-amortiguador viscoso de un grado de libertad (UGL), puede ser usada la recuperación variacional. Es importante, no confundir la aceleración del terreno (dada por el acelerograma) con la que experimenta la estructura, pues la aceleración del terreno se comporta a todos los efectos como una fuerza exterior que actúa sobre nuestro sistema de UGL. Así pues, el terreno excita con una fuerza $-m \cdot f(t)$ al conjunto de UGL obligándole a desplazarse y sufrir una serie de velocidades y aceleraciones. Tomando como base dichos desplazamientos se ha hallado la velocidad y aceleración por las técnicas de recuperación variacional vistas anteriormente.

Las gráficas de resultados muestran la variación de la posición, velocidad y aceleración de la estructura. En ellas puede apreciarse claramente como al principio se atraviesa una fase de movimiento más o menos caótica, la cual origina posteriormente otra fase de movimientos y consecuentemente velocidades y aceleraciones elevadas. Finalmente, tanto el acelerograma como las gráficas de movimientos entran en un régimen de período constante, en el cual la función viene definida por una onda de tipo sinusoidal modulada en amplitud.

4. CONCLUSIONES

Como resumen de todo lo expuesto en este artículo sería interesante resaltar una serie de puntos. Uno de ellos es sin duda la facilidad de programación; las matrices que se usan en todo el proceso son tridiagonales, con lo que se obtiene una serie de 'matrices dispersas' cuyos algoritmos son muy sencillos. De esta forma el cálculo de inversas aún para matrices con elevado número de elementos se simplifica mucho, pues existen procedimientos específicos para este caso.

Además, y como se veía en el punto 3, el que las matrices sean tridiagonales consigue que los resultados en un punto dependa de todos los resultados anteriores a dicho punto, y no como en otros métodos en que sólo depende de uno o dos valores previos (según se *trunque* el error), siendo por tanto más propensos a alejarse de la solución correcta.

Otra ventaja evidente es la ortogonalidad de la función al error. Este criterio es hoy en día muy aplicado (polinomios de Chebicheff) y permite obtener unas aproximaciones donde no haya 'regiones críticas' en las cuales el error se dispare.

Resumiendo, la recuperación variacional es un método que aplicado a funciones discretas permite unas aproximaciones de las derivadas primera y segunda (que en este artículo se han tratado de identificar con la velocidad y aceleración) con un criterio de error tal que no arrojará grandes discrepancias entre la aproximación y la realidad en ningún intervalo, además de permitir una enorme facilidad de programación y cálculo.



Tecnología Canaria del Agua

Empresa Canaria que diseña y construye:

- Plantas desaladoras de agua de mar y salobre.
- Plantas de tratamientos de aguas residuales.
- Plantas Potabilizadoras e intercambio iónico.
- Plantas Pilotos y Experimentales.
- Explotación y mantenimiento de instalaciones de tratamiento.
- Plantas de preparación de aguas para la industria.

