

# El método de participación de unidad en problemas de difracción de ondas

E. SÁNCHEZ (\*); P. ORTIZ (\*)

**RESUMEN** El método Partición de Unidad para Elementos Finitos (PUFEM) es aquí aplicado y mejorado para lograr la resolución de problemas prácticos de difracción en forma eficiente. Se introduce un procedimiento de integración "semi-analítico" para el caso de problemas multidimensionales con el que se reduce drásticamente el número de operaciones necesarias en problemas de altas frecuencias en comparación con los métodos de integración habituales para un mismo error.

Como método de solución es utilizado el gradiente conjugado generalizado para todo el rango de frecuencias, incluidas aquellas en las que el PUFEM produce matrices cuasi-singulares debido al error de redondeo. Como ejemplo práctico se ha utilizado este método para resolver el problema de difracción de una onda plana en torno a un pilar de sección circular.

## A PARTITION OF UNITY FINITE ELEMENT MODEL FOR DIFFRACTION PROBLEMS

**ABSTRACT** *The Partition of Unity Method is applied and improved to solve practical problems of diffraction in an efficient way. A semianalytic integration method is introduced in the case of multidimensional problems to reach important savings in the number of operations for high frequency problems if it is compared with the traditional integration methods. The solver used is the generalized conjugated gradient for all the frequencies, even when PUFEM produces quasi-singular matrices due to the round-off error. As a practical example, the diffraction of a plane wave on a circular pile is reproduced.*

*The efficiency of the method is compared with the traditional finite element method.*

**Palabras clave:** PUFEM; Difracción; Ondas cortas; AEH; Gradiente conjugado generalizado.

## 1. INTRODUCCIÓN

El PUFEM, propuesto como una nueva técnica para la resolución de la ecuación de Helmholtz por Melenk<sup>2</sup>, muestra una sustancial mejora en las propiedades de aproximación frente al MEF cuando se dispone de algún conocimiento previo del comportamiento de la solución.

El método puede ser clasificado en el grupo de los métodos "sin malla" (ver Referencia 3) y una formulación general, incluyendo PUFEM, fue recientemente introducida por Duarte y Oden<sup>4</sup>.

En el PUFEM el espacio de elementos finitos es construido mediante la multiplicación de las funciones de forma clásicas (que forman la partición de la unidad) por un espacio de funciones con buenas propiedades de aproximación local a la solución (como por ejemplo soluciones particulares de la ecuación diferencial). Este procedimiento fuerza la conformidad global del espacio de elementos finitos, sin restricciones en la aproximación local de las funciones e incluye información "a priori" acerca del comportamiento local de la solución.

En este trabajo se aplica un método de solución basado en el Gradiente Conjugado Generalizado. La implementa-

ción práctica del PUFEM ha mostrado que para números de onda bajos y medios el error de redondeo puede dar lugar a matrices cuasi singulares. Para estos casos se propone un método de transformación de la matriz original en una matriz hermítica y definida positiva con un límite finito mayor que el orden de redondeo para el mínimo autovalor.

Por otro lado, también se ha investigado un método de integración específico para integrandos oscilantes. Los métodos típicos, como por ejemplo la cuadratura de Gauss, resultan inadecuados para números de onda medios y grandes. Para este rango, ha sido adaptada una integración exacta para integrandos oscilantes. Se introduce una rotación local de forma que la parte oscilatoria del integrando sea unidimensional, con el consiguiente ahorro en el número de operaciones.

La siguiente sección se centra en la definición del PUFEM y se propone un espacio de funciones. Las secciones siguientes están dedicadas al método de integración empleado, la metodología del solver y los experimentos numéricos realizados.

## 2. SOLUCIÓN NUMÉRICA

La difracción de ondas monocromáticas está gobernada por la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0 \quad \text{on } \Omega \quad [1]$$

(\*) CEDEX. Centro de Estudios de Técnicas Aplicadas. Departamento de Ingeniería Computacional.

donde  $\phi$  es el potencial de velocidades y  $k$  el número de ondas. Las condiciones de borde correspondientes pueden ser escritas en forma unificada basándose en las variables características e introducidas bajo la hipótesis de la periodicidad de la solución<sup>1</sup>. En este caso, se asume que las cantidades

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \pm c \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

se conservan en la dirección incidente ( $C$  es la velocidad de la onda). Para la onda incidente las condiciones de contorno prescritas en  $\Gamma_1$  quedan:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + ik\phi \cos \beta = 2i\phi_l \cos \beta \text{ on } \Gamma_1 \quad [2]$$

donde  $\beta$  es el ángulo entre las direcciones de incidencia y normal saliente al contorno y  $\phi_l$  es la función de la onda incidente prescrita.

La condición para bordes absorbentes  $\Gamma_a$  (de forma parcial o total) y bordes totalmente reflectivos  $\Gamma_r$ , pueden obtenerse fácilmente de la condición anterior. Estas condiciones son respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + ik\alpha\phi = 0 \text{ on } \Gamma_a \quad [3]$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_r \quad [4]$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente de reflexión.

La solución numérica de la ecuación de Helmholtz para PUFEM es definida a continuación. El potencial  $\tilde{\phi}$  aproximado puede ser construido como:

$$\tilde{\phi} = \varphi_i q^l b_i^l \quad [5]$$

donde  $\varphi_i$  son las funciones que forman la partición de la unidad de forma que la condición  $\sum \varphi_i = 1$  se cumple para todos los puntos del dominio. Las funciones  $q^l$  son llamadas "funciones extrínsecas" y los son  $b_i^l$  los coeficientes asociados a los nodos y a las funciones del espacio de aproximación "externo".

Por la aplicación del método Galerkin la forma débil puede ser escrita como:

$$a(v, \tilde{\phi}) = a(\varphi_j q^m, \varphi_i q^l b_i^l) = 0 \quad [6]$$

donde:

$$a(v, \phi) = \int_{\Omega} \nabla_v \nabla \phi d\Omega - k^2 \int_{\Omega} v \phi d\Omega - \int_{\Gamma} v \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma$$

y ( $i, j=1, N$ ), ( $l, m=1, M$ ) siendo  $N$  el número total de puntos,  $M$  el número total de funciones extrínsecas elegidas y las funciones de peso.

Dos espacios han sido propuestos en el PUFEM original

para las funciones locales  $q^l$ : polinomios armónicos generalizados para la ecuación de Helmholtz y ondas planas. Aquí se han adoptado las ondas planas por su sencilla implementación y mejores propiedades de convergencia. Para problemas bidimensionales pueden ser escritas como:

$$q^l = \exp \{ ik(x \cos \theta^l + y \sin \theta^l) \} \quad [7]$$

que representa una onda plana que se propaga en la dirección dada por el ángulo  $\theta$ . Estas ondas pueden definirse de forma local (elemento por elemento) o de forma global.

### 3. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO

#### 3.1. INTEGRANDOS OSCILATORIOS

Las integrales provenientes de la ecuación (6) son del tipo:

$$I = \int_{\Omega} P(x, y) \exp \{ ik(x \cos \theta^l + y \sin \theta^l) \} \exp \{ ik(x \cos \theta^m + y \sin \theta^m) \} d\Omega \quad [8]$$

donde  $P(x, y)$  es un polinomio. Si se realiza una rotación local en el sistema de coordenadas con un ángulo  $\alpha = \frac{1}{2}(\theta^l + \theta^m)$  la integral anterior queda reducida a:

$$I = \int_{\Omega} H(\xi, \eta) \exp \{ ik_0 \xi \} d\xi d\eta \quad [9]$$

donde  $H(\xi, \eta)$  es un polinomio del mismo grado que  $P(x, y)$  y  $k_0$  es el número de ondas equivalente en el nuevo sistema de referencia dado por:

$$k_0 = 2k \cos \left( \frac{\theta^l - \theta^m}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\theta^l + \theta^m}{2} \right)$$

La dirección  $\xi$  se define por la dirección de incidencia  $\alpha$ . La parte oscilatoria a lo largo de la coordenada  $\eta$  (perpendicular a la dirección de incidencia) es eliminada con el consiguiente ahorro en el número de operaciones, permitiendo una fácil aplicación de métodos de integración adaptados a integrandos oscilatorios del tipo de la ecuación (9). Para estudiar una forma eficiente de integración de la forma simplificada se ha comparado un método "ad hoc" para integrales oscilatorias (basado en las series de Chebyshev<sup>6</sup> (AEH)) con el método habitual de integración numérica Gauss-Legendre.

La integración de:

$$\int_{-1}^{+1} \xi^r \exp(ik\xi) d\xi$$

mediante el método AEH viene dada por:

$$I = \sum_{i=0}^r \frac{r!}{(r-l)!} \frac{\xi^{r-l}}{k^{l+1}} \left\{ \sin \left( k\xi + \frac{l\pi}{2} \right) - \cos \left( k\xi + \frac{l\pi}{2} \right) \right\}_{-1}^{+1} \quad [10]$$

Esta fórmula puede ser interpretada como un caso especial de la fórmula de Clenshaw-Curtis<sup>7</sup> en la que la función

del integrando es un polinomio para la cual la solución exacta puede ser obtenida con un número finito de términos.

Para la prueba de comparación realizada, se han elegido como  $H(\xi\eta)$  polinomios de tercer grado (máximo grado alcanzado por los polinomios obtenidos usando funciones de forma lineales asumidas en este trabajo). Las longitudes de onda relativas (longitud de onda / elemento) varían desde (0.01) para el caso de ondas largas hasta (900) para ondas de alta frecuencia.

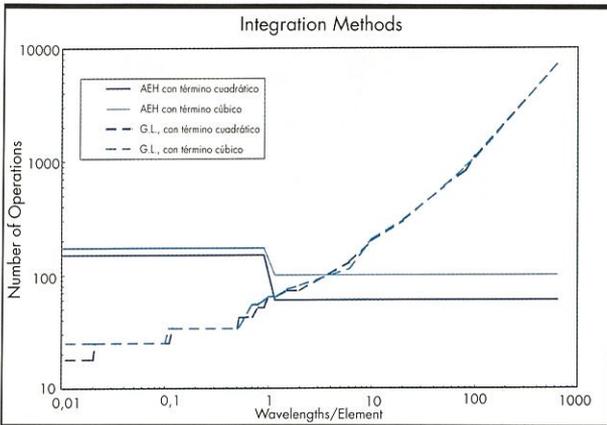


FIGURA 1. Comparación entre métodos de integración oscilatorios para un mismo error relativo de  $10^{-12}$ . Número de operaciones vs. longitud de onda por elemento. G.L: Integración Gauss-Legendre, AEH: Método de integración basado en series de Chebyshev.

Los resultados se muestran en la Figura 1, donde el número de operaciones necesarias ha sido representado en función de la longitud de onda relativa para los dos métodos con un error relativo de  $10^{-12}$ . El método AEH requiere una cantidad adicional de operaciones para bajas frecuencias con el fin de evitar la indeterminación generada por el factor dependiente de la longitud de onda. Para este caso, debería reemplazarse la ecuación (10) por el desarrollo en Taylor del término oscilante de la integral. Sin embargo es evidente que para el rango de ondas largas debería utilizarse el método de la cuadratura de Gauss mientras que la integración exacta es preferible para frecuencias medias y altas, siendo ésta la estrategia seguida en el modelo desarrollado en este trabajo.

3.2. SOLVER GRADIENTE CONJUGADO GENERALIZADO

El sistema obtenido por el PUFEM está formado en general por matrices mal condicionadas. Conforme aumenta el número de funciones extrínsecas, el sistema tiende a ser linealmente dependiente (debido al error de redondeo), en particular para el rango de mayores longitudes de onda, y a perder la típica estructura de banda del MEF.

De igual forma, un mal condicionamiento implica la necesidad de aumentar el orden en las normas del residuo para la convergencia, de manera que se alcance el error deseado en la solución. Un solver útil para estas situaciones es el basado en el método del Gradiente Conjugado Generalizado para matrices hermiticas (no definidas positivas). Aquí la condición de hermiticidad se obtiene resolviendo el sistema lineal premultiplicado por la matriz de coeficientes conjugada de  $A:A^*$ . El sistema lineal (6) es ahora:

$$A^*Ab=A^*f$$

donde  $b$  representa las incógnitas y  $f$  los términos provenientes de las condiciones de borde. Cuando el límite en el

error de redondeo no permite alcanzar la tolerancia adecuada para el error de la solución, el condicionamiento de la matriz puede ser mejorado imponiendo el carácter definido positivo dentro de la precisión utilizada en la forma:

$$(A^*A+\gamma I)b=A^*f$$

donde  $\gamma$  es una constante del orden del límite de redondeo. Esta situación se encontró en el caso extremo de un número muy grande de funciones extrínsecas (más de 66 por nodo para un cálculo en doble precisión) y bajas frecuencias.

La validez del método se ha estudiado para un problema de un dominio cuadrangular mallado mediante elementos lineales triangulares con un total de 16 nodos y 64 funciones extrínsecas asociadas a los nodos (una condición severa para ondas largas e intermedias), con una tolerancia en la norma del residuo relativo de  $3 \cdot 10^{-13}$ . En el contorno izquierdo se ha prescrito una onda de incidencia normal (por medio de la condición (2)) mientras que en el resto se han impuesto condiciones normales absorbentes (3).

En la figura 2 se muestra la norma del residuo en términos del número de iteraciones para números de onda que varían desde 0.5 (ondas largas) a 264 (ondas muy cortas).

Se observa que la peor condición de convergencia se encuentra para longitudes de onda intermedias (32). Cuando el número de ondas es mayor que este orden, la convergencia se mejora suavemente debido a que la influencia de la matriz de masa en la estructura del sistema global comienza a ser importante. Sin embargo en el rango de la media frecuencia la dependencia del número de iteraciones con el número de onda es relativamente menor.

El error obtenido en la solución ( $L_2$ ) para los cinco números de onda ilustrados en la Figura 2 (0.5, 16, 32, 132, 264) son respectivamente:  $10^{-7}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ .

4. EJEMPLO

Con el fin de comparar la eficiencia del PUFEM con MEF se ha modelado la difracción de una onda plana en torno a un pilar de sección circular y radio  $r_0=1.0m$ . El número de onda de la onda incidente es  $k=1$ , y el dominio en el que se estudia la difracción tiene un radio  $r_{ext}=5.0m$ .

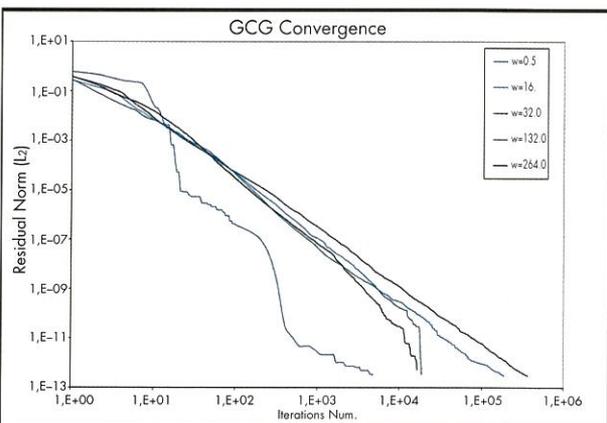


FIGURA 2. Norma residual del método Gradiente Conjugado Generalizado en función del número de iteraciones para una malla cuadrada de 16 nodos con 66 funciones extrínsecas por nodo. Números de onda: 0.5, 16., 32., 132. y 264.

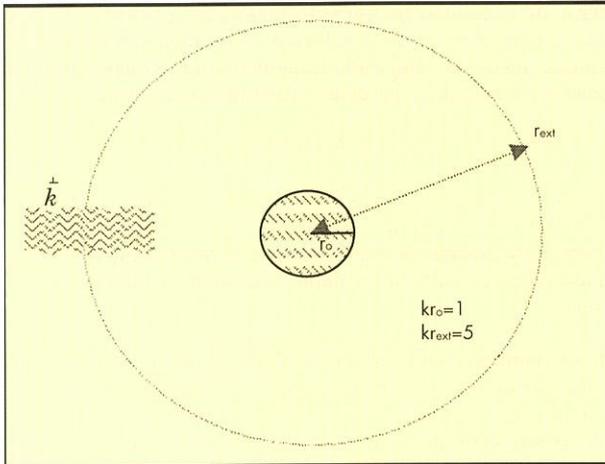


FIGURA 3. Esquema del problema de difracción de una onda plana en torno a un pilar.

Para un error promedio  $\epsilon_{L2}=3\%$  en fases y amplitudes, se ha utilizado una malla MEF de 767 nodos (ver Figura 4). Para el mismo error promedio, el problema ha sido resuelto con el método PUFEM utilizando una malla de 80 nodos (21 nodos de pared y 59 nodos en el contorno exterior).

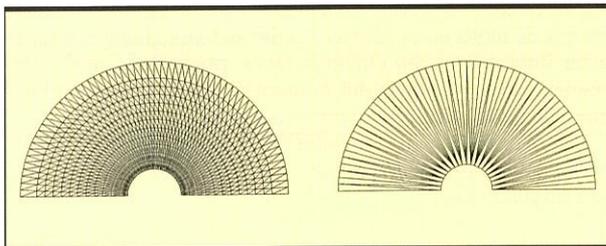


FIGURA 4. Malla de elementos y malla pufem utilizadas para resolver el problema de difracción. Malla MEF: 767 nodos, Malla PUFEM: 80 nodos

La base de funciones externas utilizadas ha sido ondas planas de la forma:

$$q_i^m = \exp\{ik(x_i \cos(\theta_m) + y_i \sin(\theta_m))\}, \quad \theta_m = \frac{2\pi n}{(N+1)} \quad n = 0, 1, \dots, N$$

con  $N=7$  para los nodos de pared y para los nodos del contorno exterior. El número total de DOF utilizados en el problema ha sido 168, lo que supone una disminución del 75% con respecto a elementos finitos. Pese a la considerable disminución en DOF conseguido, el ahorro real en el tiempo de CPU ha sido del 10%. Esto se debe al coste numérico que supone la transformación del sistema lineal para la aplicación del método de resolución. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.

## 5. CONCLUSIONES

El método de partición de la unidad presenta claras ventajas respecto del típico método de Galerkin para estudiar la difracción de ondas de alta frecuencia, pero siempre que la im-

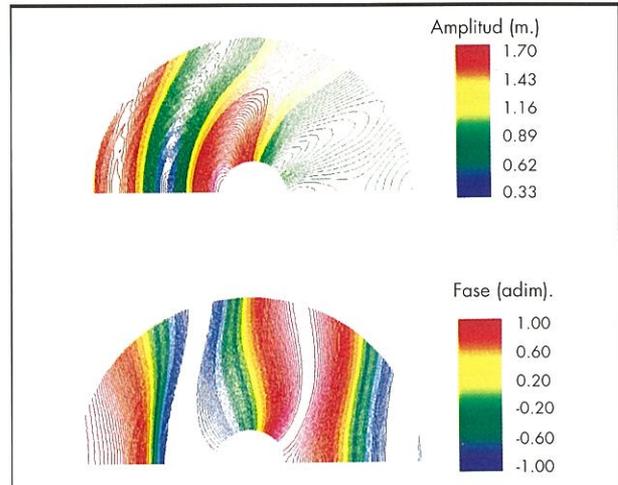


FIGURA 5. RESULTADOS PUFEM. Isocurvas de amplitud y fase obtenidas para el problema de difracción con la malla PUFEM y ocho funciones extrínsecas por nodo. DOF=168.

plementación del modelo sea eficiente, tanto en la integración como en la solución del sistema de ecuaciones. El método "semi-analítico" de integración propuesto, así como el método del Gradiente Conjugado, generalizado al problema, permiten mejorar ampliamente las prestaciones del modelo original. Por otra parte, la elección del espacio de funciones extrínsecas es también de fundamental importancia, dada su obvia influencia en la eficiencia general del método. La implementación de diferentes estrategias en esta elección que optimicen la aproximación a priori de la solución es motivo actual de estudio y serán próximamente incluidas en el modelo desarrollado.

*Este trabajo ha sido presentado en el IV Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Sevilla, 7-10 Junio, 1999.*

## 6. REFERENCIAS

- (1) ORTÍZ, P. y PASTOR, M., "Un modelo numérico de difracción y refracción de ondas en zonas costeras". Rev. Int. Met. Cal. D. Ing., 6,409-436, (1990).
- (2) MELENK, J. M., "On generalized finite element method", PhD dissertation. University of Maryland at College Park. (1995).
- (3) BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, J., ORGAN, D., FLEMING, M. y KRYSL, P., "Meshless methods: an overview and recent developments". Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 139, 3-47, (1996).
- (4) DUARTE, C. and ODEN, J. T., "An h-p adaptive method using clouds". TICAM Report 96-07, The University of Texas at Austin, (1996).
- (5) LI, B., "A generalised conjugate gradient model for the mild slope equation". Coast. Engin., 23, 215-225, (1994).
- (6) ALAYLIOGLU, A., EVANS, G. and HYSLOP, J., "The use of Chebyshev series for the evaluation of oscillatory integrals", Comp. Journal, 19, 3, 258-267, (1974).
- (7) EVANS, G., "Practical Numerical Analysis", J. Wiley, (1995).