

# Anexo 2: Acción del oleaje sobre las estructuras exteriores

PEDRO SUÁREZ BORES

## 1. FUERZAS PRODUCIDAS POR UNA ONDA MONOCROMÁTICA

Consideremos un sólido indeformable, rígidamente unido al contorno, sumergido en el seno de un fluido afectado por un movimiento ondulatorio.

Ya que el campo de velocidades originado por una onda monocromática es no permanente, a las fuerzas de arrastre se sumarán los efectos inerciales debidos a la variación del campo de velocidades. Este problema en toda su generalidad aún no ha sido resuelto, pero puede obtenerse una aproximación aceptable admitiendo un modelo consistente en los siguientes postulados:

1. Las dimensiones transversales del sólido son muy pequeñas comparadas con las del cuadrilátero de avance. Como consecuencia el campo de velocidades puede considerarse homogéneo.  
Esta hipótesis es admisible siempre que  $D/L < 0,1$  –MacCamy y Fuchs (1954).
2. Los efectos inerciales dependen únicamente de las variaciones del campo de velocidades, de la forma del sólido y de la densidad del fluido –Fluido ideal–.
3. Los efectos de forma y rozamiento superficial –arrastre– son independientes de la variación del campo de velocidades, es decir, son función únicamente de la velocidad instantánea.
4. El proceso es boltzmaniano, es decir, puede admitirse el principio de superposición lineal –Morison, O'Brien, Johnson y Schaaf (1953)–.

### 1.1. FUERZAS DE INERCIA, $f_I$

La energía cinética del fluido comprendido dentro de un recinto (R) viene, evidentemente, dada por la expresión:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_R \rho (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \quad (1)$$

Si el fluido es ideal –post. 2– e incompresible ( $\rho = C$ ) y el movimiento irrotacional, con potencial de velocidad ( $\phi$ ), en cuyo caso:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2)$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint_R \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3)$$

y por teorema de Green, Courant-Hilbert (1953),

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (4)$$

en donde (ds) es el elemento diferencial de superficie, contorno del recinto (R).

En el caso de movimiento plano la ecuación anterior toma la forma:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (5)$$

en donde (as) es el elemento diferencial de longitud de la sección normal.

Introduciendo la función de corriente ( $\psi$ ) para cuerpos de revolución es fácil demostrar, Lamb (1945), que la expresión anterior puede escribirse:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_S \phi d\psi \quad (6)$$

#### 1.1.1. Masa hidrodinámica y masa virtual: Casos particulares

El potencial de velocidad ( $\phi$ ) y la función de corriente ( $\psi$ ) para un cilindro circular indefinido son:

$$\phi = \frac{u a^2}{r} \cos x \quad \psi = -\frac{u a^2}{r} \sin x \quad (7)$$

por lo tanto de la expresión (6) se deduce, ya que sobre el contorno  $r = a$ ,

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} (u a \cos x) (u a \cos x) dx = \frac{\rho}{2} \pi a^2 u^2 = \frac{1}{2} M_h u^2 \quad (8)$$

en donde la masa:

$$M_h = \rho \pi a^2 \quad (9)$$

es denominada “masa hidrodinámica”.

En el caso en que el sólido tenga un movimiento rectilíneo, siendo  $f_I$  la fuerza por unidad de longitud, se verificará, Lamb (1945),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} M_h u^2 \right) = u f_I \quad (10)$$

o bien, haciendo operaciones,

$$f_I = (M + M_h) \frac{du}{dt} \quad (11)$$

Este resultado suele expresarse en la forma:

$$f_I = C_m \rho \nabla \frac{du}{dt} \quad (12)$$

en donde ( $\nabla$ ) es el volumen por unidad de longitud del cilindro y ( $C_m$ ) un coeficiente adimensional, que en el caso de cilindros circulares sumergidos en el seno de un fluido indefinido es igual a 2, ya que:

$$M = M_h = \rho \pi a^2 \quad (13)$$

La experimentación realizada por Murtha (1954), demuestra que la masa hidrodinámica de cilindros circulares en las

inmediaciones de la superficie ( $M_h'$ ) es del orden de 0,5 a 0,6  $M_h$ . La masa hidrodinámica ( $M_h'$ ) y como consecuencia ( $C_m$ ) crecen con la profundidad estabilizándose en el valor ( $M_h' = M_h$ ) cuando ésta es igual o superior a dos diámetros.

Otro caso de algún interés es la esfera. De acuerdo con Lamb (1945), el potencial de velocidades entonces:

$$\phi = \frac{1}{2} u \frac{a^3}{r^2} \cos x \quad (14)$$

Eliminando ( $\phi$ ) entre (4) y (14) se deduce inmediatamente:

$$T = \frac{1}{4} \rho a u^2 \int_0^\pi \cos^2 \cdot x \cdot 2\pi a \sin x \, dx = \frac{1}{3} \rho \pi a^3 u^2 = \frac{1}{2} M_h u^2 \quad (15)$$

La masa hidrodinámica correspondiente a una esfera es pues equivalente a la mitad de la masa desplazada por el sólido.

### 1.2. FUERZAS DE ARRASTRE, $f_D$

Por ser el agua un fluido real, con viscosidad, existirán fuerzas adicionales debidas al rozamiento con el contorno y al efecto forma –estela–. Estas fuerzas dependen de la forma y rugosidad de la superficie, del número de Reynolds y para grandes velocidades del número de Mach.

La determinación de  $f_D$  es un problema clásico habiendo sido extensamente estudiado por numerosos investigadores: Stokes, Osseen, Newton, en el caso de la esfera, Goldstein, Blasius, Hiemenz, Thom, Schiller y Linke, en el caso de cilindros.

Generalmente la fuerza de arrastre total,  $f_D$ , que comprende los efectos de rozamiento superficial y de forma, (Figura 1), suele expresarse en la forma:

$$f_D = \frac{1}{2} \rho C_D S |u| u \quad (16)$$

en donde (S) es la superficie de la sección normal al movimiento y ( $C_D$ ) es un coeficiente adimensional.

La razón de indicar el cuadrado de la velocidad en la forma  $|u| u$  es para tener en cuenta el signo, que en el caso de una onda monocromática es función del tiempo y del espacio.

### 1.3. FUERZA RESULTANTE, $f$

En virtud del postulado 4, la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo sumergido, sometido a la acción de una onda monocromática, viene dada por la superposición lineal de la fuerza inercial –expresión (12)– y la fuerza de arrastre total –expresión (16)– es decir:

$$f = f_D + f_I = \frac{1}{2} \rho C_D S |u| u + \rho C_m \nabla \frac{du}{dt} \quad (17)$$

en donde:

$$\begin{aligned} C_m &= 2 && \text{para cilindros circulares.} \\ C_m &= 1,5 && \text{para esferas.} \end{aligned} \quad (18)$$

Cuando la aceleración convectiva es mucho mayor que la aceleración local, esto es, si:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial t} \ll 1 \quad ; \quad u \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial u}{\partial t} \ll 1 \quad (19)$$

Schlichting (1955), es válido usar la aceleración local en lugar de ( $du/dt$ ).

En el caso de la onda de Airy:

$$\frac{u}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \pi \frac{H}{L} \frac{ch \kappa(h+z)}{sh \kappa h} \cos(\kappa x - \omega t) \quad (20)$$

se cumplirá la condición (19) siempre que el peralte de la onda ( $H/L$ ) sea pequeño y/o las profundidades relativamente grandes.

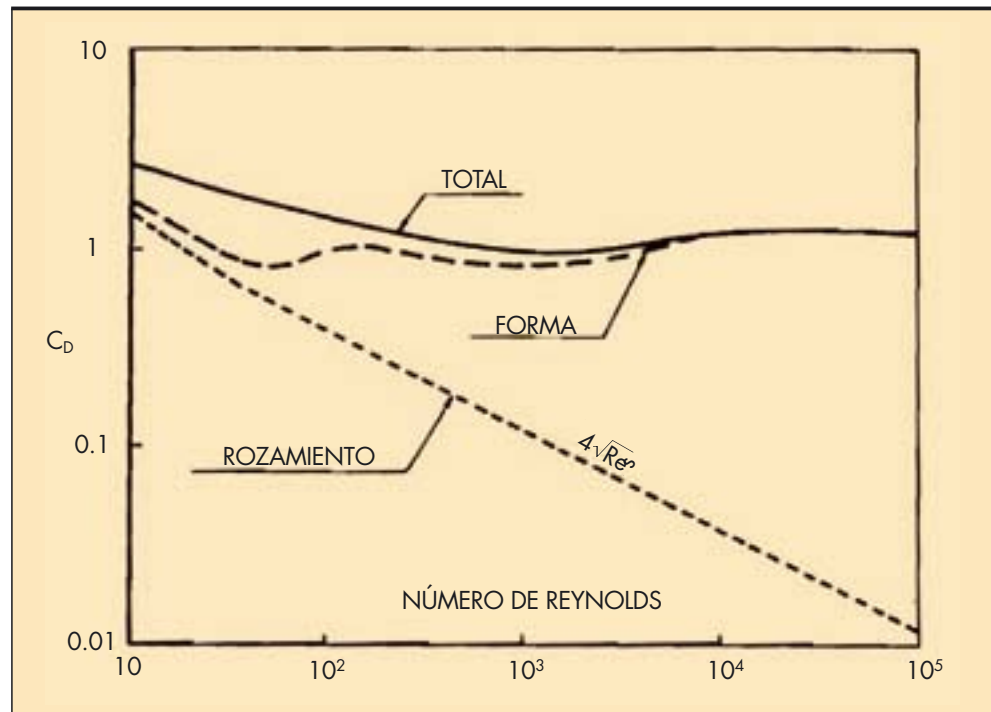


FIGURA 1. Coeficiente de arrastre en cilindros. Thom (1929), Schiller y Linke (1935).

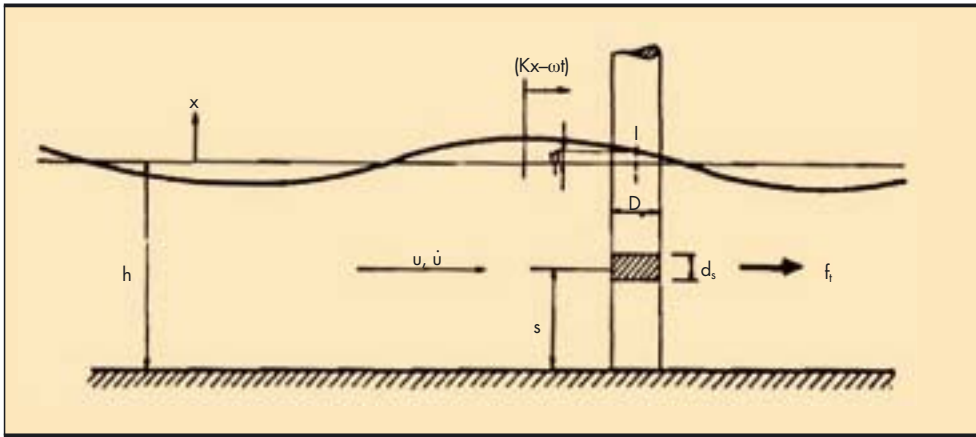


FIGURA 2.

## 2. FUERZAS Y MOMENTOS PRODUCIDOS POR UNA ONDA MONOCROMÁTICA SOBRE PILAS CILÍNDRICAS

Los cilindros verticales rígidos, de sección circular, son elementos muy frecuentemente empleados en la sustentación de las estructuras exteriores. Por tal motivo en este apartado deduciremos las ecuaciones aplicables a este caso particular.

De la expresión (17) se deduce inmediatamente que la fuerza resultante por unidad de altura y a la profundidad (z) viene dada por:

$$f = f_D + f_I = \frac{\rho}{2} C_D D |u| u + \frac{\pi}{4} \rho C_m D^2 \dot{u} \quad (21)$$

en donde se indica con ( $\dot{u}$ ) la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Denominando:

$$k = \frac{1}{2} \rho C_D D \quad (22)$$

$$c = \frac{\pi}{4} \rho C_m D^2$$

la expresión (21) toma la forma:

$$f = k |u| u + c \dot{u} \quad (23)$$

Las fuerzas y momentos totales que actúan sobre el cilindro serán entonces:

$$F_t = F_D + F_I = \int_0^{h+\eta} f ds \quad (24)$$

$$M_t = M_D + M_I = \int_0^{h+\eta} s f ds \quad (25)$$

en donde,

$$F_D = \int_0^{h+\eta} f_D ds = \frac{1}{2} \rho C_D D \int_0^{h+\eta} |u| u ds \quad (26)$$

$$F_I = \int_0^{h+\eta} f_I ds = \frac{\pi}{4} \rho C_m D^2 \int_0^{h+\eta} \dot{u} ds \quad (27)$$

$$M_D = S_D F_D = \int_0^{h+\eta} s f_D ds = \frac{1}{2} \rho C_D D \int_0^{h+\eta} s |u| u ds \quad (28)$$

$$M_I = S_I F_I = \int_0^{h+\eta} s f_I ds = \frac{\pi}{4} \rho C_m D^2 \int_0^{h+\eta} s \dot{u} ds \quad (29)$$

Los valores de las integrales dependen del modelo adoptado para la onda monocromática: Onda de Airy, Onda de Stokes

en segunda o tercera aproximación, onda cnoidal, etc. En general escribiremos:

$$\int_0^{h+\eta} |u| u ds = k_D H^2 \quad (30)$$

$$\int_0^{h+\eta} \dot{u} ds = k_I H \quad (31)$$

$$\int_0^{h+\eta} s |u| u ds = k_D S_D H^2 \quad (32)$$

$$\int_0^{h+\eta} s \dot{u} ds = k_I S_I H \quad (33)$$

### 2.1. MODELO LINEAL

De la onda de Airy, véase “Estructura del Oleaje”, se deduce:

$$\zeta = \frac{H}{2} \cos \theta = \eta \quad (34)$$

$$u = -\frac{H}{2} \omega \frac{\text{ch } \kappa(h+z)}{\text{sh } \kappa h} \cos \theta \quad (35)$$

$$\dot{u} = -\frac{H}{2} \omega^2 \frac{\text{ch } \kappa(h+z)}{\text{sh } \kappa h} \text{sen } \theta \quad (36)$$

en donde:

$$\theta = \kappa x - \omega t$$

$$\kappa = \frac{2\pi}{L} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (37)$$

Considerando como origen de coordenadas la cresta de onda,

$$\theta = -\omega t \quad (37a)$$

eliminando ( $\zeta$ ), ( $u$ ), ( $\dot{u}$ ) entre las expresiones (30), (31), (34), (35) y (36) e integrando, ya que  $s = h+z$ , resulta:

$$k_D = \frac{g}{4} \frac{\kappa h}{\text{sh } 2\kappa h} \left[ \frac{\text{sh } 2\kappa h \left(1 + \frac{\zeta}{h}\right)}{2\kappa h} + \left(1 + \frac{\zeta}{h}\right) \right] |\cos \omega t| \cos \omega t \quad (38)$$

$$k_I = \frac{g}{2} \frac{\text{sh } \kappa h \left(1 + \frac{\zeta}{h}\right)}{\text{ch } \kappa h} \text{sen } \omega t \quad (39)$$

En profundidades reducidas, ( $h/L \ll 1$ ),

$$\text{sh } kh \approx kh \quad ; \quad \text{ch } kh \approx 1 \quad (40)$$

por lo tanto las ecuaciones (38) y (39) pueden simplificarse en la forma:

$$K_D = \frac{g}{4} \left( 1 + \frac{\zeta}{h} \right) |\cos \omega t| \cos \omega t \quad (41)$$

$$K_I = \frac{g}{2} kh \left( 1 + \frac{\zeta}{h} \right) \text{sen } \omega t \quad (42)$$

En profundidades indefinidas, en donde se verifica ( $(h/L) > 1/2$ ) y ( $(\zeta/h) < (H/2h) \ll 1$ ), resulta:

$$K_D = \frac{g}{8} |\cos \omega t| \cos \omega t \quad (43)$$

$$K_I = \frac{g}{2} \text{sen } \omega t \quad (44)$$

Los brazos de palanca son entonces, Dean y Harleman (1966),

$$S_D = S_I = \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{\zeta}{h} \right) \quad (45)$$

en profundidades reducidas, y,

$$S_D = \left( \frac{kh - 1/2}{kh} \right) h \quad (46)$$

$$S_I = \left( \frac{kh - 1}{kh} \right) h \quad (47)$$

en profundidades indefinidas.

### 2.1.1. Máximos de la fuerza resultante, $f_m$

Eliminando (u) y ( $\dot{u}$ ) entre las ecuaciones (21), (35) y (36), los máximos de las fuerzas de arrastre,  $f_D$ , e inercia,  $f_I$ , vendrán dados por:

$$f_D = K_1 H^2 \quad \text{para } \theta = 0 \quad (48)$$

$$f_I = K_2 H \quad \text{para } \theta = \pi/2 \quad (49)$$

en donde,

$$k_1 = \frac{1}{2} \rho C_D D \left( \frac{\omega}{2} \frac{\text{ch } \kappa(h+z)}{\text{sh } kh} \right)^2 \quad \text{para } \theta = 0 \quad (50)$$

$$k_2 = \frac{\pi}{4} \rho C_m D^2 \frac{\omega^2}{2} \frac{\text{ch } \kappa(h+z)}{\text{sh } kh} \quad \text{para } \theta = \pi/2 \quad (51)$$

La fuerza resultante puede entonces escribirse:

$$f = K_1 H^2 |\cos \theta| \cos \theta + K_2 H \text{sen } \theta \quad (52)$$

Los máximos de la expresión (52) vendrán dados por la solución de,

$$\frac{df}{d\theta} = -2 K_1 H^2 \cos \theta \text{sen } \theta + K_2 H \cos \theta = 0 \quad (53)$$

de donde se obtiene inmediatamente,

$$\beta = \theta = \text{arc sen } \frac{K_2}{2K_1 H} \quad (54)$$

con,

$$-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2 \quad (54a)$$

o bien, ya que el máximo de la fuerza resultante,  $f$ , ocurre siempre en o inmediatamente delante de la cresta de la onda.

$$0 \leq \beta \leq \pi/2 \quad (54b)$$

Sustituyendo,

$$\text{sen } \beta = \frac{K_2}{2 K_1 H} \quad (55)$$

y

$$\cos^2 \beta = 1 - \text{sen}^2 \beta = 1 - \frac{K_2^2}{4 K_1^2 H^2} \quad (56)$$

en la expresión (52) se obtiene,

$$f_m = K_1 H^2 + \frac{1}{4} \frac{K_2^2}{K_1} \quad (0 \leq \beta \leq \pi/2) \quad (57)$$

Eliminando ( $K_1$ ), ( $K_2$ ) y ( $H$ ) entre (48), (49) y (57) esta expresión se transforma en:

$$f_m = f_D \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{f_I}{f_D} \right)^2 \right] \quad (0 \leq f_I/f_D \leq 2) \quad (58a)$$

$$f_m = f_I \quad (f_I/f_D \geq 2) \quad (58b)$$

Es inmediato comprobar que un resultado análogo se obtiene considerando las fuerzas totales,  $F_D$  y  $F_I$ , que actúan sobre el cilindro. Como consecuencia, Reid y Bretschneider (1953);

$$F_m = F_{Dm} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{F_{Im}}{F_{Dm}} \right)^2 \right] \quad (0 \leq F_{Im}/F_{Dm} \leq 2) \quad (59a)$$

$$F_m = F_{Im} \quad \left( \frac{F_{Im}}{F_{Dm}} \geq 2 \right) \quad (59b)$$

En la figura 3 aparece la representación gráfica de la expresión (59)<sub>a,b</sub> para el caso de modelo lineal, Reid y Bretschneider (1953).

### 2.2. VARIABILIDAD DE LOS COEFICIENTES $C_D$ Y $C_m$

Numerosos investigadores de distintos centros –O'Brien, Morrison y Johnson (1953), Wiegel, Beebe y Moon (1959) de la Universidad de California; Harleman y Shapiro (1955), Harleman, Shapiro y Marlow (1957) del Instituto Tecnológico de Massachussets (M.I.T.); Reid (1957), Wilson (1957), (1965) del Texas A & M– entre otros, se han ocupado de la determinación experimental de los coeficientes de arrastre e inercial ( $C_D$  y  $C_m$ ), efectuando observaciones tanto en la naturaleza como en el Laboratorio.

En todos los casos los coeficientes  $C_D$  y  $C_m$  se han calculado a través de la expresión (21) y como consecuencia dependen del modelo de onda adoptado.

Es interesante destacar que la variabilidad tanto de los valores medios como de la desviación standard de  $C_D$  disminuyen al aumentar el grado de aproximación de la onda teórica empleada.

En la Tabla 1 puede apreciarse como para la onda de Stokes en tercer grado de aproximación los valores de  $C_D$  y  $s_{C_D}$  para dos experiencias bastantes distintas solo ofrecen ligeras diferencias, mientras que con el modelo lineal estas diferencias son francamente acusadas.

En parte éstas son debidas a que en profundidades reducidas la teoría lineal no es aceptable como modelo del oleaje, siendo en este caso más apropiadas ondas teóricas de más alto grado de aproximación. De cualquier forma, ya que el oleaje es, de hecho, la superposición de ondas, y no una sola onda, la desviación standard no puede ser cero en ningún caso. En el Technical Report N°. 4 se indica que para aproximaciones de grado superior al tercero los resultados, valor medio y desviación standard de  $C_D$ , coinciden con los de éste.

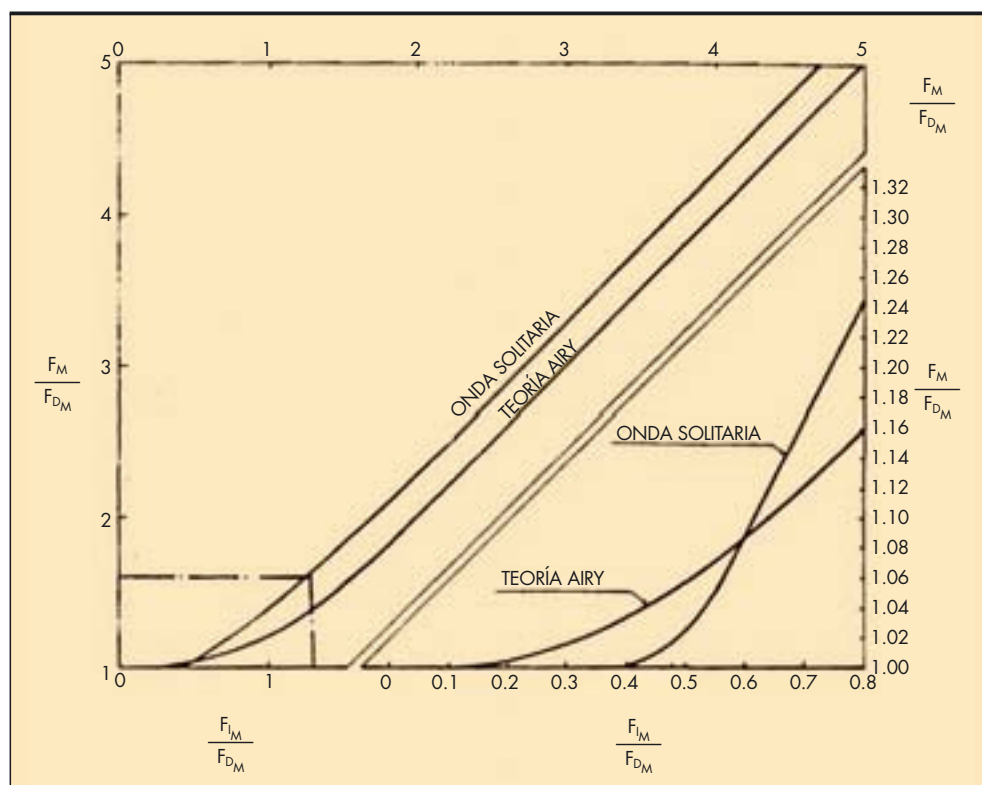


FIGURA 3. Tomada del Technical Report N°. 4.

	Experiencia	
	(1)	(2)
Diámetro de la pila, D (pies)	1,06	2,0
Profundidad media, h (pies)	47,6	47,0
Nivel del punto de ensayo (pies)	42,5	43
Intervalo de alturas de ola considerado (pies)	10 a 20,5	10 a 12,5
Intervalo de periodos considerado (segundos)	13,5 a 15,9	9,1 a 15,4
<b>Resultados de las observaciones:</b>		
Modelo lineal, Onda de Airy		
(60) Valor medio de $C_D$	0,859	0,681
(61) Desviación standard de $C_D$	0,364	0,311
Onda de Stokes en segundo grado de aproximación		
(62) Valor medio de $C_D$	0,475	0,429
(63) Desviación standard de $C_D$	0,200	0,212
Onda de Stokes en tercer grado de aproximación		
(64) Valor medio de $C_D$	0,352	0,353
(65) Desviación standard de $C_D$	0,171	0,189

TABLA 1. Comparación de resultados para dos experiencias realizadas en la naturaleza - Technical Report N°. 4.

Autoridad (fecha)	(1)	Diámetro (pulgad. )	$C_D$	$C_m$	(2)
Crooke (1955)	Lab.	2 1 0,5	1,60	2,30	Osc.
Keulegan y Carpenter (1956)	Lab.	3 2,5 2	1,34	1,46	Osc.
	Lab.	1,5 1,25	1,52	1,51	Osc.
Keim (1956)	Lab.	1 0,5	1,00	0,93	Ace.
Dean (1956)	Lab.	3	1,10	1,46	Ace.
Wiegel y otros (1956)	Nat.	24	1,00	0,95	Olas
Reid (1956)	Nat.	8,75	0,53	1,47	Olas
Bretschneider (1957)	Nat.	16	0,40	1,10	Olas
Wilson (1957)	Nat.	30	1,00	1,45	Olas

**TABLA 2.** Valores experimentales de los coeficientes de arrastre y de inercia para cilindros circulares.  
(1) Lugar de realización de la experiencia, Laboratorio o naturaleza.  
(2) Modalidad de movimiento, Oscilatorio, Acelerado no oscilatorio, Oleaje.

### 2.3. INFLUENCIA DE LAS DIMENSIONES DEL DIÁMETRO DE LAS PILAS

Los resultados de los apartados anteriores están basados en la hipótesis de que el diámetro de la pila es pequeño comparado con las dimensiones del cuadrilátero de avance. En este caso las condiciones cinemáticas no cambian apreciablemente sobre una distancia igual al diámetro de la pila.

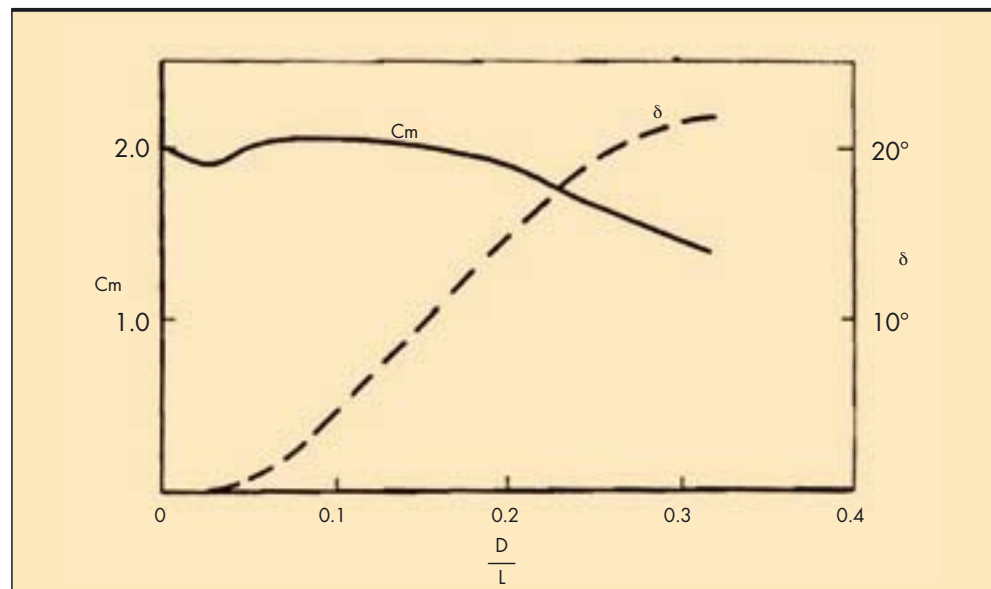
MacCamy y Fuchs (1954) han estudiado la interacción entre una pila y una onda monocromática aplicando la teoría de la difracción, teoría que puede ser extendida al caso en que  $D/L$  no sea mucho menor que uno.

Dos importantes resultados se deducen de esta investigación:

- El coeficiente de masa,  $C_m$ , es función de  $D/L$ .
- La fuerza se defasa con respecto a la aceleración un ángulo  $\delta$ , que depende de  $D/L$ .

Las cantidades  $C_m (D/L)$  y  $\delta (D/L)$  aparecen en la Figura 4. Obsérvese que para  $D/L < 0,1$ , lo que generalmente es el caso,  $\delta < 5^\circ$  y  $C_m = 2$ .

Aunque la teoría de la difracción no incluye efectos de rozamiento superficial y de forma, lo que supone  $C_D = 0$ , puede servir como índice para estimar los valores de  $C_m$  y de  $\delta$ , y sobre todo para determinar el campo de validez de la hipótesis  $D/L \ll 1$ .



**FIGURA 4.** Tomada de Dean y Harleman (1966).

### 3. DESCRIPCIÓN DE LAS FUERZAS PRODUCIDAS POR EL OLAJE SOBRE UN CILINDRO VERTICAL

Según ya indicábamos, las estructuras exteriores pueden considerarse en la mayor parte de los casos como “obras rígidas”, salvo que el periodo del oleaje coincida con el de la estructura, y como consecuencia su colapso será producido por la fuerza resultante máxima ocurrente durante el temporal de cálculo. Por tal motivo centraremos nuestro interés en la “descripción de las fuerzas resultantes máximas”, haciendo recurso de los métodos de la geometría estadística.

#### 3.1. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE LAS FUERZAS DE INERCIA Y DE ARRASTRE

Considerando constantes  $C_m$ ,  $C_D$  y  $D$  y  $T$ , la distribución de probabilidad de  $f_D$  y  $f_I$  vendrán dadas por, Bretschneider (1967),

$$p(f_D) df_D = p(H) dH \quad (66)$$

$$p(f_I) df_I = p(H) dH \quad (67)$$

La hipótesis de que  $T$  es constante involucra que no existe correlación entre  $H$  y  $T$ . Esta hipótesis es aceptable siempre que la anchura del espectro del oleaje sea muy pequeña, teóricamente cero.

Longuet-Higgins (1952) ha demostrado que cuando el espectro del oleaje es de banda de periodos de anchura cero,  $\epsilon = 0$ , Cartwright y Longuet-Higgins (1956), la distribución de probabilidad de alturas de ola sigue la distribución de Rayleigh,

$$p(H) = \frac{2H}{H_m^2} e^{-\left(\frac{H}{H_m}\right)^2} \quad (68)$$

en donde  $H_m$  es la altura de ola media cuadrática, Bores (1967).

De las ecuaciones (48) y (49) se deduce,

$$df_D = 2 K_1 H dH \quad (69)$$

$$df_I = K_2 dH \quad (70)$$

y como consecuencia, de ((48), (66), (68) y (69)) y ((49), (67), (68) y (70)) resulta,

$$p(f_D) df_D = \frac{1}{K_1 H_m^2} e^{-\left(\frac{f_D}{K_1 H_m}\right)^2} df_D \quad (71)$$

$$p(f_I) df_I = \frac{2f_I}{K_2^2 H_m^2} e^{-\left(\frac{f_I}{K_2 H_m}\right)^2} df_I \quad (72)$$

Denominando,

$$f_{Da} = \bar{f}_D = K_1 \bar{H}^2 = K_1 H_m^2 \quad (73)$$

$$f_{Im}^2 = \bar{f}_I^2 = K_2^2 \bar{H}^2 = K_2^2 H_m^2 \quad (74)$$

las distribuciones de probabilidad de las fuerzas de inercia y de arrastre (71) y (72) pueden escribirse en la forma,

$$p(f_D) df_D = \frac{1}{f_{Da}} e^{-\frac{f_D}{f_{Da}}} df_D \quad (75)$$

$$p(f_I) df_I = \frac{2f_I}{f_{Im}^2} e^{-\left(\frac{f_I}{f_{Im}}\right)^2} df_I \quad (76)$$

La probabilidad de que la fuerza  $f_D$  ( $f_I$ ) exceda un cierto valor  $f_D$  ( $f_I$ ) vendrá entonces dada por, Bores (1967),

$$q(f_D) = \int_{f_D}^{\infty} p(f_D) df_D = \int_{f_D}^{\infty} \frac{1}{f_{Da}} e^{-\frac{f_D}{f_{Da}}} df_D = e^{-\frac{f_D}{f_{Da}}} \quad (77)$$

$$q(f_I) = \int_{f_I}^{\infty} p(f_I) df_I = \int_{f_I}^{\infty} \frac{2f_I}{f_{Im}^2} e^{-\left(\frac{f_I}{f_{Im}}\right)^2} df_I = e^{-\left(\frac{f_I}{f_{Im}}\right)^2} \quad (78)$$

Ya que de acuerdo con la teoría lineal  $f_D$  es proporcional a  $H^2$  –expresión (48)– y  $f_I$  es proporcional a  $H$  –expresión (49)–, las distribuciones de  $(f_D/f_{Da})^{1/2}$  de  $(f_I/f_{Im})$  y de  $(H/H_m)$  serán análogas, es decir, las tres seguirán la distribución de Rayleigh. Como consecuencia todos los resultados obtenidos en la “Estructura del Oleaje” son aplicables al caso de las fuerzas  $f_D$  y  $f_I$ .

De las distribuciones de probabilidad (75) y (76) se obtiene entonces,

$$f_{D, \max, N} = f_{Da} \ln N \quad (79)$$

$$f_{I, \max, N} = f_{Im} \sqrt{\ln N} \quad (80)$$

Una vez que  $f_D$  y  $f_I$  han sido determinadas para un cierto nivel de probabilidad puede ser calculada la fuerza resultante  $f_m$  con el auxilio de las expresiones (58<sub>a,b</sub>).

Por ejemplo, la fuerza resultante media cuadrática  $f_{m,a}$  será,

$$f_{m,a} = f_{Da} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{f_{Im}}{f_{Da}} \right)^2 \right] \quad (0 \leq f_{Im} / f_{Da} \leq 2) \quad (81a)$$

$$f_{m,a} = f_{Im} \quad (f_{Im} / f_{Da} \leq 2) \quad (81b)$$

y la fuerza resultante máxima probable, para un cierto valor de  $N$ ,

$$f_{m, \max, N} = f_{D, \max, N} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{f_{I, \max, N}}{f_{D, \max, N}} \right)^2 \right] \text{ para } (0 \leq f_{I, \max, N} / f_{D, \max, N} \leq 2) \quad (82a)$$

$$f_{m, \max, N} = f_{I, \max, N} \quad (f_{I, \max, N} / f_{D, \max, N} \leq 2) \quad (82b)$$

#### 3.2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE LA FUERZA RESULTANTE, $f_m$

La distribución de probabilidad de la fuerza resultante  $f_m$  puede ser obtenida en forma análoga a la correspondiente a las fuerzas de arrastre y de inercia. Por lo tanto,

$$p(f_m) df_m = p(H) dH \quad (83)$$

Recordando entonces que,

$$f_m = K_1 H^2 + \frac{1}{4} \frac{K_2^2}{K_1} \quad (0 \leq \beta \leq \pi/2) \quad (57)$$

resulta inmediatamente,

$$df_m = 2K_1 H dH \quad (84)$$

y como consecuencia

$$q(f_m) = 1 - e^{-\left[ \frac{f_m}{f_{Da}} - \frac{1}{4} \left( \frac{f_{Im}}{f_{Da}} \right)^2 \right]} \quad \left( 0 \leq \frac{f_{Im}}{f_{Da}} \leq 2 \right) \quad (85a)$$

$$q(f_m) = 1 - e^{-\left(\frac{f_m}{f_{Im}}\right)^2} \quad \left( \frac{f_m}{f_{Da}} \geq 2 \right) \quad (85b)$$

en donde  $f_{m,m}$  es la media cuadrática de las  $f_m = f_{Im}$ .

Las ecuaciones (85)<sub>a,b</sub> obtenidas coinciden con las deducidas por Borgman en forma algo diferente.

Recordamos que el valor máximo probable de la fuerza resultante puede ser deducido de la ecuación (82)<sub>a,b</sub>.

**4. PREVISIÓN ESPECTRAL DE LAS FUERZAS PRODUCIDAS POR EL OLAJE SOBRE UN CILINDRO VERTICAL**

Según vimos en el apartado 1, la expresión general de las fuerzas producidas por una onda monocromática sobre una pila cilíndrica vertical viene dada por,

$$f(t) = c |u(t)| u(t) + k \dot{u}(t) \quad (23)$$

En la hipótesis de que la velocidad  $u(t)$  y la aceleración  $\dot{u}(t) = a(t)$  constituyen un proceso estacionario gaussiano bivariable, lo que es perfectamente válido para el oleaje, la función covariancia de  $f$ ,  $H_f(\tau)$ , viene dada por, Borgman (1965),

$$H_f(\tau) = c^2 E_u^2 G\left(\frac{H_u(\tau)}{E_u}\right) + k^2 H_a(\tau) \quad (86)$$

siendo  $H_u(\tau)$  y  $H_a(\tau)$  las funciones covariancia de la velocidad y la aceleración respectivamente y en donde,

$$E_u = \int_0^\infty 2 S_u(\omega) d\omega \quad (87)$$

$$G(r) = \frac{(2 + 4r^2) \arcsen r + 6r \sqrt{1 - r^2}}{\pi} \quad (88)$$

Desarrollando en serie la función  $G(r)$  se obtiene, Borgman (1965),

$$G(r) = \frac{1}{\pi} \left[ 8r + \frac{4r^3}{8} + \frac{r^6}{15} + \dots \right] \quad (89)$$

que converge rápidamente para  $(0 \leq r \leq 1)$ .

La aproximación lineal,

$$g_1(r) = \frac{8r}{\pi} \quad (90)$$

difiere de  $G(r)$ , para  $r = 1$ , solamente en un 15,5%, mientras que la aproximación cúbica,

$$g_3(r) = \frac{1}{\pi} \left[ 8r + \frac{4r^3}{8} \right] \quad (91)$$

únicamente en el 1,1%.

Eliminando entonces  $G(r)$  entre (86) y (90) resulta la forma lineal aproximada de la función covariancia,

$$H_f(\tau) = \frac{8c^2 E_u}{\pi} H_u(\tau) + k^2 H_a(\tau) \quad (92)$$

cuya transformada es,

$$S_f(\omega) = \frac{8c^2 E_u}{\pi} S_u(\omega) + k^2 S_a(\omega) \quad (93)$$

en donde,

$$S_u(\omega) = \frac{\omega^2 \text{ch}^2 \kappa(h+z)}{\text{sh}^2 \kappa h} S_\eta(\omega) = Y_{u\eta} S_\eta(\omega) \quad (94)$$

$$S_a(\omega) = \frac{\omega^4 \text{ch}^2 \kappa(h+z)}{\text{sh}^2 \kappa h} S_\eta(\omega) = Y_{a\eta} S_\eta(\omega) \quad (95)$$

son los espectros de la velocidad y de la aceleración respectivamente, véase "Estructura del Oleaje"—publicación 4-B-, ligados al espectro del oleaje  $S_\zeta(\omega)$  por las funciones de transferencia espectral,

$$Y_{u\zeta} = \frac{\omega^2 \text{ch}^2 \kappa(h+z)}{\text{sh}^2 \kappa h} \quad (96)$$

$$Y_{a\zeta} = \frac{\omega^4 \text{ch}^2 \kappa(h+z)}{\text{sh}^2 \kappa h} \quad (97)$$

Las Figuras 5 y 6 muestran los resultados obtenidos para el registro n°. 10 de Davenport, Wiegel, Beebe, Moon y James (1957).

**5. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE LAS ESTRUCTURAS EXTERIORES**

Con el fin de evitar que entren en resonancia con el oleaje, las estructuras exteriores en claraboya son proyectadas generalmente de forma que su periodo propio sea del orden de un segundo o menos, ya que el espectro del oleaje posee normalmente una energía despreciable para esa gama de periodos.

En estas condiciones las estructuras exteriores se calculan desde un punto de vista "estático", considerando como "fuerza de cálculo" la máxima probable del temporal de cálculo.

A pesar de haberse tomado estas precauciones en el proyecto, la Texas Tower N°. 4 entró en resonancia produciéndose como consecuencia el colapso de la estructura. Ello fue debido a que por deterioración de la unión entre la plataforma y los elementos de sustentación su periodo propio aumentó hasta un valor comprendido dentro del intervalo de periodos característicos del oleaje reinante. Otro ejemplo de colapso es el

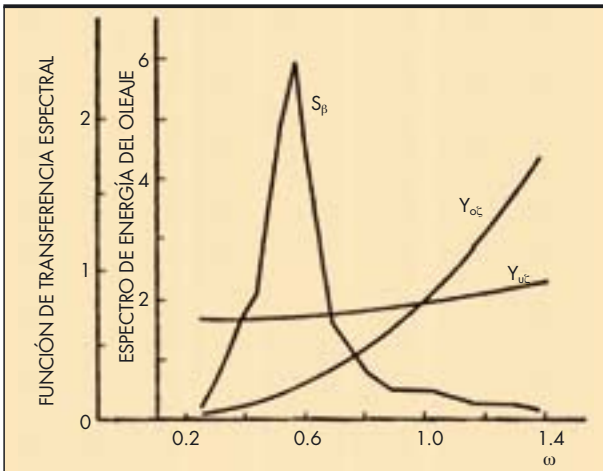


FIGURA 5. Espectro de energía del oleaje y función de transferencia espectral para el registro n°. 10 de Davenport. Borgman (1965).

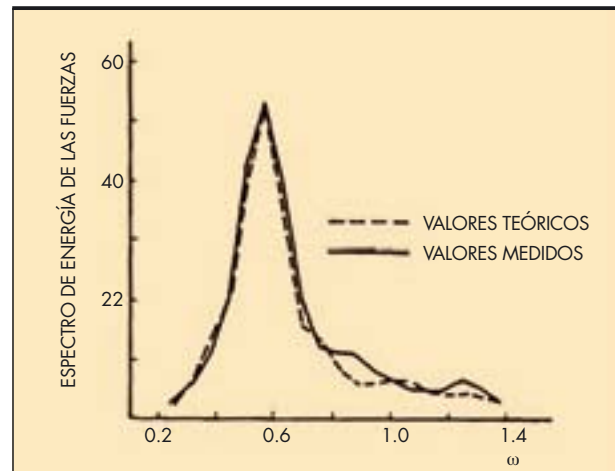


FIGURA 6. Comparación entre los valores teóricos —aproximación lineal— y experimentales para el registro n°.10 de Davenport. Borgman (1965).



ocurrido en 1961 con la United Senate. Esta plataforma, situada en la costa Este de los Estados Unidos falló por resonancia, al tener un periodo propio comprendido dentro del intervalo característico de periodos del oleaje.

Para profundidades iguales o superiores a 60 m. no se puede, sin embargo, evitar que las estructuras exteriores tengan un periodo propio comprendido entre 4 y 8 segundos. En este caso es claro que será imprescindible considerar el comportamiento dinámico de la estructura como base para el proyecto.

**5.1. ANÁLISIS DINÁMICO**

La respuesta de una estructura sometida a la acción de una onda monocromática ha sido considerada por diversos investigadores: Laird (1962), Michalos (1962), Nolan y Honsinger (1962), Gaither y Billington (1964), etc.

Harleman, Nolan y Honsinger (1963) admiten que tanto la estructura como las fuerzas debidas a la onda pueden ser sustituidas respectivamente por:

- Una estructura dinámicamente equivalente, constituida por una plataforma rígida en donde se concentra toda la masa de la estructura, soportada por elementos flexibles y sin peso.
- Un sistema de fuerzas equivalente,  $P(\tau)$ , actuando horizontalmente sobre el centro de gravedad de la plataforma.

La fuerza real producida por el oleaje sobre el prototipo, según hemos visto en el apartado 1, actúa sobre los elementos de sustentación según una resultante cuyo punto de aplicación se encuentra a una altura (S) sobre el fondo.

Para que este modelo físico matemático sea "equivalente" al prototipo han de cumplirse las siguientes condiciones:

- I. Las frecuencias naturales de ambas estructuras, modelo y prototipo, han de ser equivalentes.
- II. El desplazamiento horizontal del modelo por la acción del sistema de fuerzas  $P(\tau)$  ha de ser igual al del prototipo por la acción de la onda.

**5.1.1. Ecuaciones del movimiento**

Admitiendo que el modelo posee un solo grado de libertad, que las fuerzas de amortiguamiento y de restauración son lineales y que la excitación es senoidal, la ecuación del movimiento será, evidentemente,

$$m \ddot{x} + C \dot{x} + k x = p(\tau) = P_m \text{sen} \omega \tau \tag{98}$$

en donde:

- m es la masa total de la estructura.
- C el coeficiente de amortiguamiento.

k el coeficiente de restitución, constante elástica de la estructura.

$P_m$  la amplitud de la fuerza de excitación.

$\omega$  la frecuencia de la excitación ( $= 2\pi/T$ ).

$\tau$  el tiempo en el modelo.

La solución de esta ecuación es:

$$x(\tau) = \frac{P_m/K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2 \frac{C\omega}{C_c\omega_n}\right]^2}} \text{sen}(\omega\tau - \varepsilon) \tag{99}$$

con;

$x(\tau)$  desplazamiento del centro de gravedad de la plataforma sobre su posición de equilibrio.

$$\omega_n = \sqrt{K/m}, \text{ la frecuencia natural del modelo.} \tag{100}$$

$$C_c = 2K\eta, \text{ el coeficiente crítico de amortiguamiento.} \tag{101}$$

$$\varepsilon = \tan^{-1} \left[ 2 \frac{C\omega}{C_c\omega_n} / 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right], \text{ la fase.} \tag{102}$$

Admitiendo que la excitación viene dada por una onda de Stokes en tercer grado de aproximación, Harleman, Nolan y Honsinger (1963), la fuerza es no lineal, pero puede ser linealizada mediante un desarrollo de Fourier. Cada término de  $F(t)$  puede entonces ser relacionado con el correspondiente de  $P(\tau)$  introduciendo una función de influencia.

Admitiendo entonces el principio de superposición lineal los desplazamientos debidos a los términos de la función de excitación pueden ser sumados, obteniéndose así el desplazamiento total de la estructura en función del tiempo,  $x_t(t)$ , es decir,

$$x_t(t) = \sum_0^n x_i(t) \tag{103}$$

**5.1.2. Determinación de las características de la estructura**

En el caso en que los elementos de sustentación tengan empotramiento completo en ambos extremos, suelo y plataforma, para una fuerza F aplicada a la altura S resulta un desplazamiento del prototipo,

$$x_P = \frac{FS^2}{NEI} \left( \frac{\ell}{4} - \frac{S}{6} \right) \tag{104}$$

en donde, véase Figura 7,

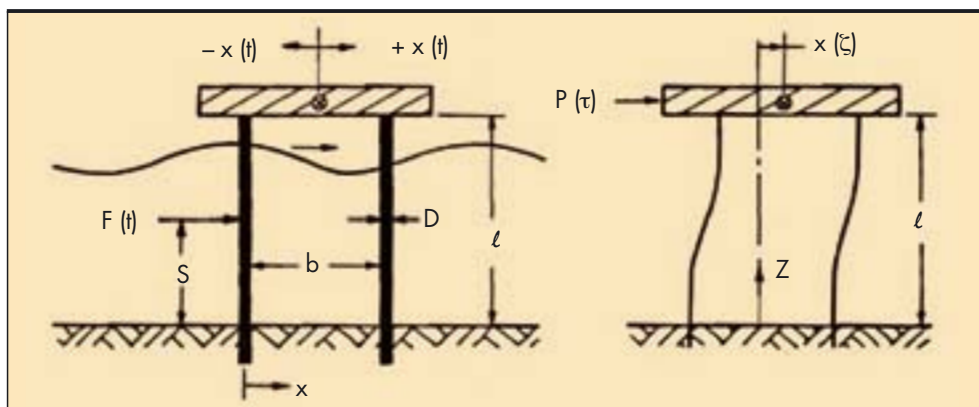


FIGURA 7. Disposición esquemática del prototipo y del modelo. Harleman, Nolan y Honsinger (1963).

E es el módulo elástico de los elementos de sustentación.  
 I su momento de inercia.  
 $\ell$  la altura del centro de gravedad de la plataforma.  
 N el número de elementos de sustentación.

En el modelo, la fuerza P está aplicada en el centro de gravedad de la plataforma, como consecuencia, haciendo ( $5 = \ell$ ) en la expresión (104) se obtiene,

$$x_m = \frac{P\ell^2 \left( \frac{\ell}{4} - \frac{\ell}{6} \right)}{NEI} = \frac{P\ell^3}{12 NEI} \quad (105)$$

De la condición II - igualdad de desplazamientos del modelo y del prototipo,

$$X_m = X_p \quad (106)$$

se deduce la "función de influencia",

$$\frac{P}{F} = \phi = 3 \left( \frac{S}{\ell} \right)^2 - 2 \left( \frac{S}{\ell} \right)^3 \quad (107)$$

De la función de influencia se deduce que el desplazamiento al nivel (z) es,

$$\frac{x(z)}{X} = 3 \left( \frac{z}{\ell} \right)^2 - 2 \left( \frac{z}{\ell} \right)^3 \quad (108)$$

Por definición, la constante elástica del modelo es,

$$K = \frac{P}{X_m} = \frac{12 NEI}{\ell^3} \quad (109)$$

como consecuencia, aplicando el principio de Rayleigh se puede determinar la frecuencia natural.

En efecto, para un desplazamiento máximo X la energía potencial  $E_p$  es, evidentemente,

$$E_p = \frac{K X^2}{2} \quad (110)$$

La energía cinética máxima  $E_C$  del prototipo vendrá dada por, Harleman, Nolan y Honsinger (1963),

$$E_C = \frac{Q \omega_n^2 X^2}{g} + N \int_0^\ell \frac{q \omega_n^2 x(z)}{2} dz \quad (111)$$

en donde Q es el peso de la plataforma y q el peso por unidad de longitud de los elementos de sustentación.

Eliminando entonces  $x(z)$  entre las expresiones (108) y (111) e integrando resulta,

$$E_C = \frac{\omega_n^2 X^2}{2g} \left( Q + \frac{13}{35} Nq\ell \right) \quad (112)$$

Igualando las expresiones (110) y (112) se obtiene finalmente,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g K}{Q + \frac{13}{35} Nq\ell}} \quad (113)$$

Por la condición I -frecuencia natural del modelo igual a la del prototipo- eliminando  $\omega_n$  entre las expresiones (100) y (113) se obtiene la "masa efectiva" del modelo,

$$m_m = \frac{1}{g} \left( Q + \frac{13}{35} Nq\ell \right) \quad (114)$$

El coeficiente (13/35) corresponde al empotramiento rígido de los elementos de sustentación en ambos extremos. Si la unión de estos con la plataforma fuese articulada tendríamos (33/140). En cualquier caso este coeficiente depende del grado de empotramiento.

Considerando únicamente el amortiguamiento debido a la propia estructura, ya que el rozamiento con el fluido es despreciable en este caso, Harleman, Nolan y Honsinger (1963),

$$\frac{C}{C_C} = \frac{1}{2\pi} \ln(x_1/x_2) \quad (115)$$

en donde  $x_1$  y  $x_2$  son las amplitudes sucesivas de desplazamiento de la estructura.

### 5.2. FUERZA DE EXCITACIÓN

De acuerdo con Harleman y Shapiro (1955), la fuerza resultante total que actúa sobre un cilindro circular vertical, véase apartado 2, puede expresarse en la forma,

$$F = F_{Dc} \sin^2\theta + F_I \cos\theta \quad (0 < \theta < 180^\circ) \quad (116a)$$

$$F = F_{Ds} \sin^2\theta + F_I \cos\theta \quad (180 < \theta < 360^\circ) \quad (116b)$$

en donde  $F_{Dc}$  es la fuerza de arrastre total correspondiente al paso de la cresta y  $F_{Ds}$  a la del seno.

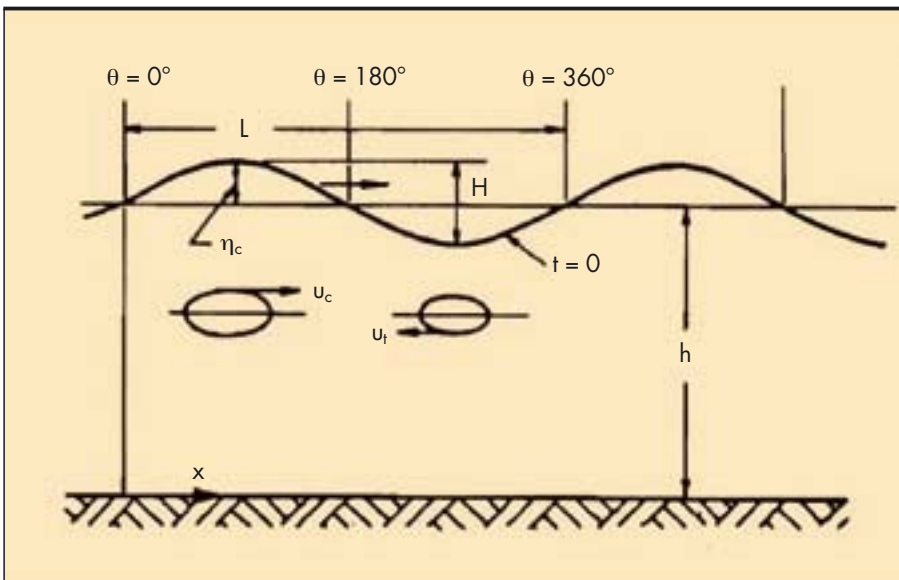


FIGURA 8. Harleman, Nolan y Honsinger (1963).

Las expresiones (116<sub>a,b</sub>) pueden ser aproximadas por un desarrollo en serie de Fourier de la forma,

$$F = a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (117)$$

en donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \cos n\theta \, d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \sin n\theta \, d\theta \quad (118)$$

La aproximación obtenida con los tres términos principales del desarrollo,

$$F = \frac{F_{Dc} - F_{Ds}}{4} + \frac{4}{3\pi} (F_{Dc} + F_{Ds}) \sin\theta + F_I \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (119)$$

válida para el campo ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ), es suficiente para las aplicaciones prácticas. Véase Figura 8.

### 5.3. DESPLAZAMIENTO TOTAL DE LA ESTRUCTURA

De la expresión (107) de la función de influencia se deduce,

$$\phi_c = \frac{P_c}{F_{Dc}} = 3 \left( \frac{S_c}{\ell} \right)^2 - 2 \left( \frac{S_c}{\ell} \right)^3 \quad (120)$$

$$\phi_s = \frac{P_s}{F_{Ds}} = 3 \left( \frac{S_s}{\ell} \right)^2 - 2 \left( \frac{S_s}{\ell} \right)^3 \quad (121)$$

$$\phi_I = \frac{P_I}{F_I} = 3 \left( \frac{S_I}{\ell} \right)^2 - 2 \left( \frac{S_I}{\ell} \right)^3 \quad (122)$$

Como consecuencia la fuerza de excitación al nivel del centro de gravedad de la plataforma, sobre el modelo, P, vendrá dada por, véase expresión (119),

$$P = \frac{F_{Dc} \phi_c - F_{Ds} \phi_s}{4} + \frac{4}{3\pi} (F_{Dc} \phi_c + F_{Ds} \phi_s) \sin\theta + F_I \phi_c \sin(\theta + 90^\circ) \quad (123)$$

Introduciendo entonces la fuerza de excitación P, (123), en la ecuación diferencial (98) y recordando (103) se obtiene finalmente,

$$x_t = x_1 + x_2 + x_3 \quad (124)$$

en donde,

$$x_1 = \frac{4 P_1}{K} \quad (125)$$

$$x_2 = \frac{2 P_2}{K\sqrt{v}} \left\{ \sin(\omega t - \varepsilon) + \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{b}{L} - \varepsilon\right) \right\} \quad (126)$$

$$x_3 = \frac{2 P_3}{K\sqrt{v}} \left\{ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{b}{L} + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \right\} \quad (127)$$

siendo b la distancia entre los elementos de sustentación, L la longitud de onda,

$$v = \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2 \frac{C\omega}{C_c \omega_n} \right]^2 \quad (128)$$

véase expresión (99), y,

$$P_1 = \frac{P_{Dc} \phi_c - P_{Ds} \phi_s}{4} \quad (129)$$

$$P_2 = \frac{4}{3\pi} (F_{Dc} \phi_c - F_{Ds} \phi_s) \quad (130)$$

$$P_3 = F_I \phi_I \quad (131)$$

### 6. INTERACCIÓN ENTRE CILINDROS CERCANOS

La proximidad de los elementos de sustentación de las estructuras exteriores es un factor que puede modificar los resultados que se deducen de los apartados anteriores.

Borgman (1965), (1967) desde un punto de vista teórico y Biermann y Herrstein (1933), Laird, Johnson y Walker (1960)

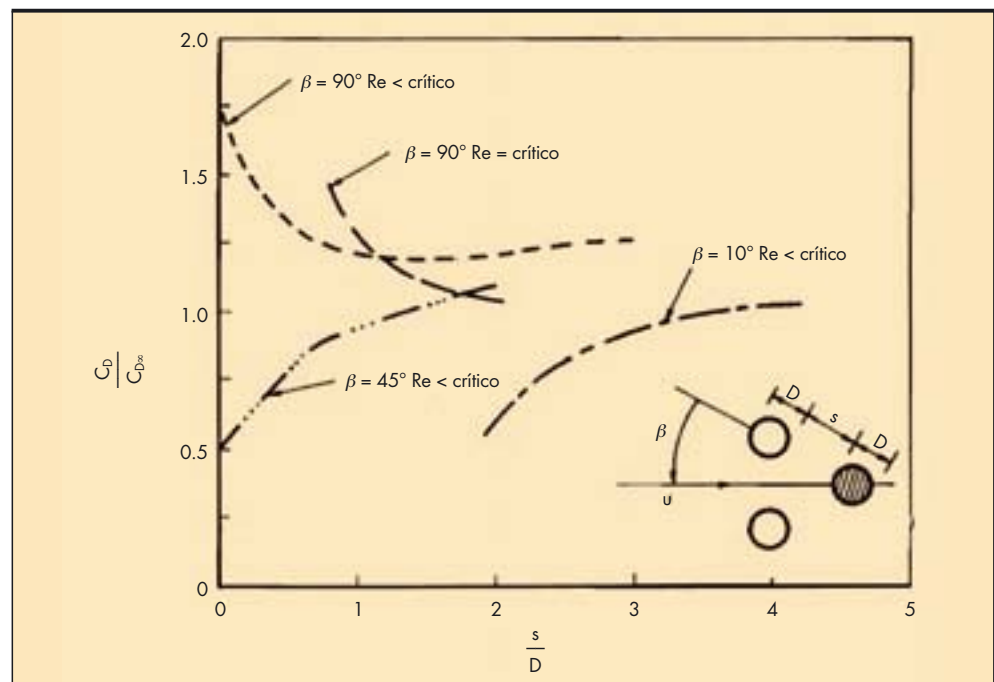


FIGURA 9. Interacción de cilindros a tresbolillo. Observaciones de Biermann y Herstein (1933), Laird, Johnson y Walker (1960).

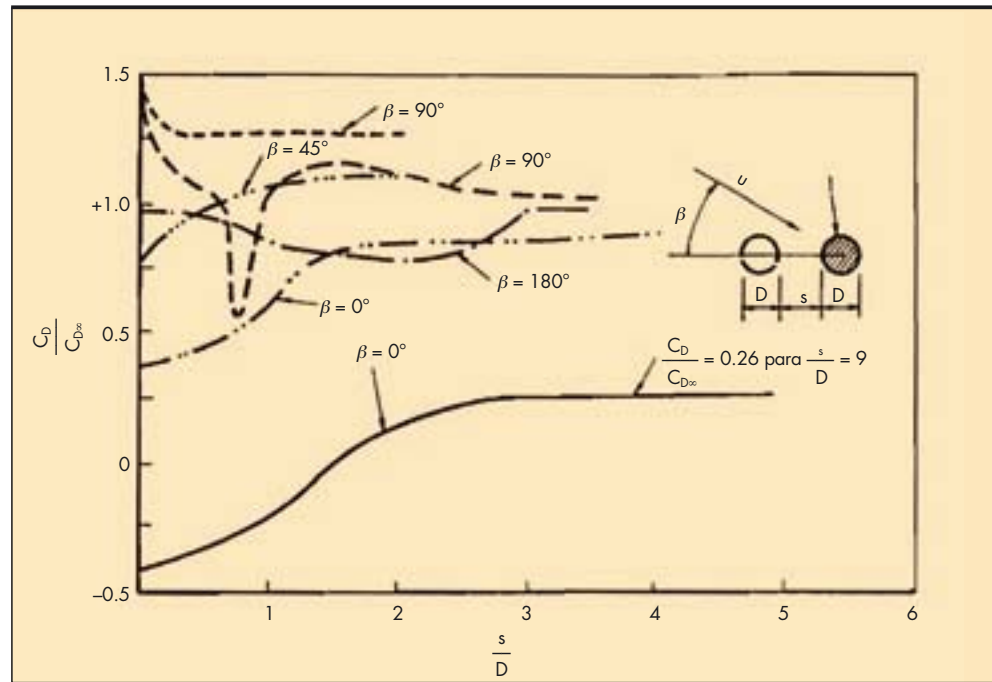


FIGURA 10. Interferencia de cilindros. Ross (1959, Laird, Johnson y Walker (1960).

y Ross (1959) experimentalmente han considerado este problema. Los resultados experimentales aparecen en las Figuras 9 y 10.

Nótese que con cualquier disposición de los cilindros, para  $s/D > 3$ , que es la situación más frecuente, los efectos de interacción son despreciables, comportándose los cilindros como elementos aislados.

No debe olvidarse en el proyecto que por ser el oleaje un movimiento ondulatorio la posición relativa de los cilindros se invierte en cada semiperiodo.

El número de Reynolds “efectivo” empleado en estos gráficos –Figuras 9 y 10–, viene dado por la expresión,

$$(Re)_e = \frac{u_m D}{\nu} \quad (132)$$

### 7. INFLUENCIA DE OTROS FACTORES

Aunque no muy frecuentemente, se emplean a veces, particularmente en el caso de estructuras provisionales elementos de sustentación de sección no circular.

Morison, Johnson y O’Brien (1954) han considerado este problema. Los resultados de su experimentación son los mostrados en la Tabla 3 y en la Figura 11.

En adición a los elementos de sustentación verticales, las estructuras exteriores suelen poseer otros elementos dispuestos horizontalmente o inclinados, también sometidos a la acción del oleaje.

La experimentación realizada por Bursnall y Loftin (1951) parece indicar que para números de Reynolds superiores al crítico debería ser usada la velocidad resultante,

Orientación y forma de la pila. (Tamaño)	Momento		
	Relación = $\frac{\text{Momento}}{\text{Momento para una sección circular}}$		
→ O	1,00 ( $\beta = 5^\circ$ )	1,00 ( $\beta = 20^\circ$ )	1,00 ( $\beta = 26^\circ$ )
→ H	1,52 ( $\beta = 14^\circ$ )	2,46 ( $\beta = 35^\circ$ )	2,19 ( $\beta = 16^\circ$ )
→ H $\alpha = 90^\circ$	1,42 ( $\beta = 10^\circ$ )	2,08 ( $\beta = 43^\circ$ )	2,58 ( $\beta = 41^\circ$ )
→ H $\alpha = 90^\circ$	2,44 ( $\beta = 5^\circ$ )	3,50 ( $\beta = 55^\circ$ )	2,22 ( $\beta = 15^\circ$ )
→ I	1,28 ( $\beta = 4^\circ$ )	1,17 ( $\beta = 37^\circ$ )	1,37 ( $\beta = 9^\circ$ )

TABLA 3. Efecto de la forma de la sección transversal de la pila sobre el momento máximo.  $\beta$ , es el ángulo de fase, véase apartado 2.

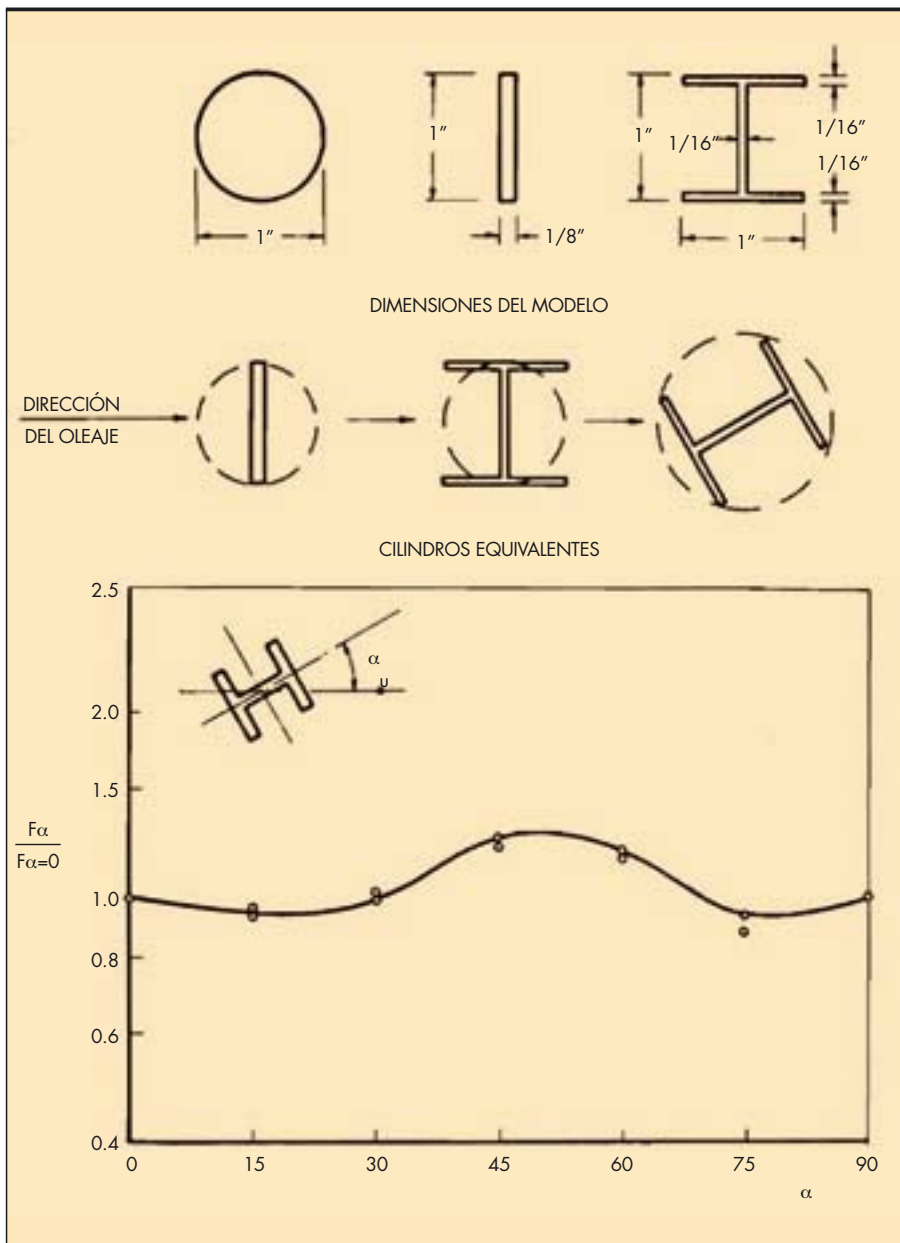


FIGURA 11. Morison y otros (1954).

$$V_r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (133)$$

para calcular las fuerzas normales sobre cilindros inclinados.

En profundidades reducidas la velocidad resultante es superior a la componente normal al eje del cilindro. Por tal razón, Dean y Harleman (1966) recomiendan las siguientes ecuaciones:

$$f_D = \frac{1}{2} \rho C_D D V_r \frac{V_n}{|V_n|} \quad (134)$$

$$f_I = \frac{\pi}{4} \rho C_m D^2 \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \frac{\dot{V}_n}{|\dot{V}_n|} \quad (135)$$

en donde  $V_n$  y  $\dot{V}_n$  son las componentes normales al eje del cilindro, de la velocidad y aceleración respectivamente. Como consecuencia  $V_n / |V_n|$  y  $\dot{V}_n / |\dot{V}_n|$  definen el sentido de la fuerza.

Las expresiones (134) y (135) son aplicables siempre que el ángulo de ataque sea inferior a  $60^\circ$ , quedando definido el ángulo de ataque por la normal al eje del cilindro y la dirección de la velocidad resultante.

## 8. FUERZAS PRODUCIDAS POR UNA ONDA DE ROTURA

Hall (1958) ha realizado ensayos sobre el comportamiento de pilas en varias posiciones situadas sobre una playa con pendiente del 10 por 100.

Como resultado de los ensayos, Hall (1958), propone para las fuerzas totales la siguiente expresión,

$$F = g C_b \rho D H_B^2 \quad (136)$$

en donde  $H_B$  es la altura de la onda en rotura y  $C_B$  un coeficiente cuyo valor medio es del orden de 1,5, con un valor máximo cercano a 3,0. Figura12.

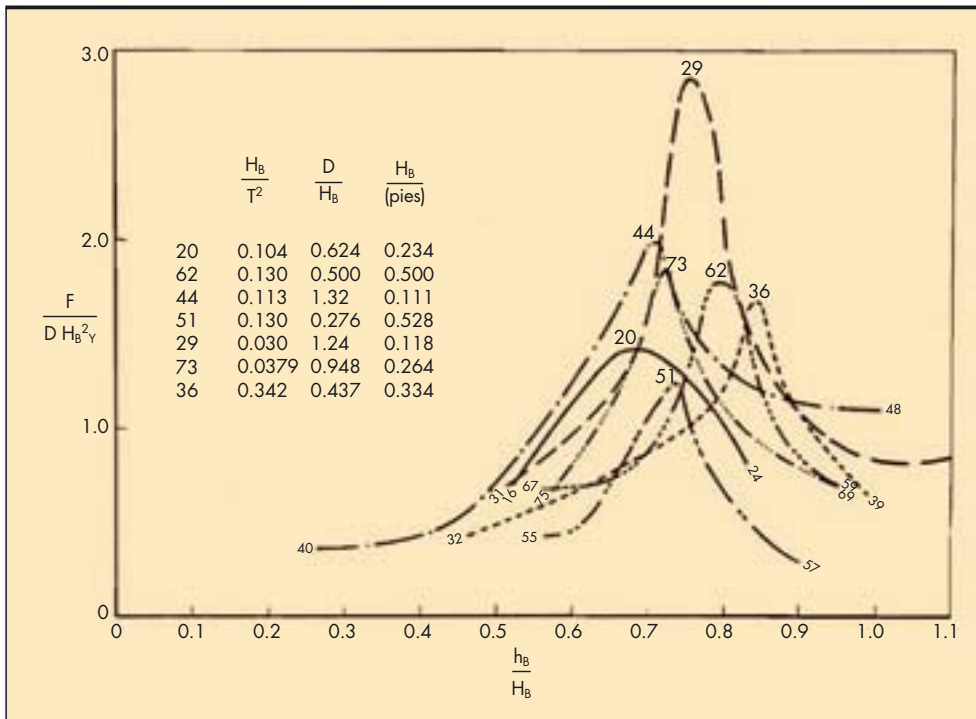


FIGURA 12. Coeficiente  $C_B$ . Observaciones de Hall (1958).

### 9. FUERZAS PRODUCIDAS POR UNA ONDA SOBRE TUBERÍAS SUBMARINAS

Con el fin de evitar la acción del oleaje y de las corrientes, generalmente, cuando el fondo es de arena, las tuberías submarinas se entierran una cierta profundidad, superior a las variaciones estacionales y accidentales de los fondos. Tal protección, sin embargo, no es posible cuando los fondos son rocosos. En este caso la acción del oleaje y de las corrientes habrá de ser soportada por el rozamiento con el fondo o por la resistencia mecánica de la conducción, si se disponen apoyos para salvar las irregularidades del fondo.

Suponiendo un apoyo continuo y uniforme sobre el fondo, las fuerzas de rozamiento, de Coulomb, pueden expresarse en la forma,

$$F_r = \mu (P - \gamma_t \nabla) \quad (137)$$

o bien, Beckmann y Thibodeaux (1962),

$$F_r = \mu K D^2 \gamma_a (d - 1) \quad (138)$$

en donde:

- $\mu$  es el coeficiente de rozamiento con el fondo.
- $P$  el peso de la tubería en el estado de carga más desfavorable.
- $\gamma_a$  el peso específico del agua.
- $\gamma_t$  el peso específico total, aparente, de la tubería.
- $d$  su densidad relativa, con respecto al agua  $\gamma_t / \gamma_a$ .
- $\nabla$  el volumen desplazado por unidad de longitud de la tubería.
- $D$  su diámetro o altura, en el caso en que no sea circular.
- $k$  un factor de forma, igual a  $(\pi/4)$  cuando la tubería es circular.

En cualquier caso  $k D^2 = \text{área de la sección.}$

A las fuerzas de arrastre y de inercia totales  $F_D$  y  $F_I$  consideradas en los apartados anteriores se suma ahora la

“fuerza de sustentación”  $F_L$ , producida por la disimetría del flujo, originada por la cercanía de la tubería al contorno.

La fuerza de sustentación, por analogía con  $F_D$  y  $F_I$  puede ser escrita,

$$F_L = \frac{\rho}{2} C_L D u^2 \quad (139)$$

en donde  $C_L$  es el coeficiente de sustentación.

La ecuación de equilibrio en el caso de tubería simplemente apoyada sobre el fondo, sin elementos especiales de apoyo, viene dada por:

$$\mu k D^2 \gamma_a (d - 1) - \mu F_L \geq F_D + F_I \quad (140)$$

Nótese que en este caso particular las fuerzas  $F_D$  y  $F_I$  no corresponden a las expresiones (26), (30) y (27), (31), ya que, en general, las tuberías no serán verticales, y como consecuencia el campo de velocidades y aceleraciones no es el correspondiente a cilindros verticales.

#### 9.1. FUERZAS SOBRE TUBERÍAS CIRCULARES

La configuración de la estructura en estudio y del flujo en sus inmediaciones son mostrados en la Figura 13. En la región cercana al contacto de la tubería con el terreno existirá una zona de relativo reposo, en donde probablemente se acumulará la arena, modificándose con el tiempo el esquema hidrodinámico de la Figura 13.

##### 9.1.1. Coeficiente de sustentación, $C_L$

Beckmann y Thibodeaux (1962) han sugerido varios métodos para determinar el coeficiente de sustentación, proponiendo para el caso de tuberías circulares apoyadas en toda su longitud  $C_L$  0,5. En opinión de Wilson y Reid (1963) esta estima, sin embargo, parece ser demasiado baja.

De acuerdo con Wilson y Reid (1963) el coeficiente de sustentación en el caso de flujo potencial, producido por un movi-

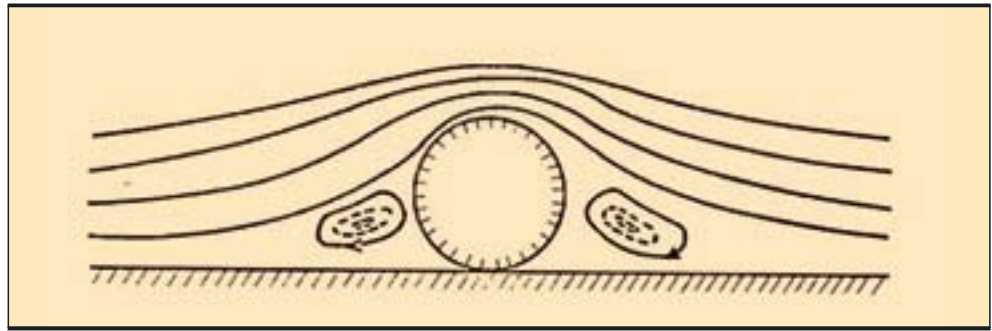


FIGURA 13. Beckmann y Thibodeaux (1962).

miento uniforme de velocidad constante  $U$ , sobre un cilindro circular apoyado sobre una superficie plana, viene dado por,

$$C_L = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\left\{\cos \frac{\theta}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2} \tan \frac{\theta}{2}\right)\right\}^4} \quad (141)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo medido a partir del punto superior del cilindro.

La velocidad de flujo ( $V$ ) en un punto cualquiera ( $\theta$ ), sobre la superficie del cilindro es, entonces,

$$V = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\left[\operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2} \tan \theta\right)\right]^2}{\cos \frac{\theta}{2}} U \quad (142)$$

de donde  $V_{\max} = 2,46 U$ , para la parte superior del cilindro.

Denominando ahora  $V_2$  y  $V_1$  a las velocidades de flujo de un fluido real en la parte superior e inferior del cilindro, en zonas no perturbadas por la capa límite, ya que  $C_L$  es una medida del contraste de velocidades sobre y bajo el cilindro, Wilson y Reid (1963) proponen la corrección,

$$C_L = (C_L)_{f.p.} \frac{U^2}{V_2^2 - V_1^2} \quad (143)$$

Según hemos visto, en el caso de flujo potencial, cuando la tubería se halla en contacto con el suelo,

$$\begin{aligned} V_2 &= 2,46 U \\ V_1 &= 0 \\ (C_L)_{f.p.} &= 4,48 \end{aligned}$$

como consecuencia,

$$C_L = 4,48 U^2 / (2,46 U)^2 = 0,74 \quad (144)$$

En el caso de fluido real es lógico que  $U < v < V_2$ , como consecuencia  $C_L$  debería ser superior a 0,74. De la experimentación realizada por Dementev (1934) se deduce que  $C_L = 0,78$ .

Wilson y Reid (1963) proponen entonces para el proyecto  $C_L \geq 1$ .

Un método para evitar que las fuerzas de sustentación sean excesivas, consiste en separar la tubería del terreno, apoyándola a alguna distancia del fondo sobre soportes preparados al efecto. Los resultados de la experimentación realizada por Knoblock y Troller son mostrados en la Figura 14.

Nótese que en el campo crítico, para valores de  $s/D > 0,30$  el coeficiente de sustentación es negativo, es decir, la fuerza de sustentación se halla dirigida hacia el suelo.

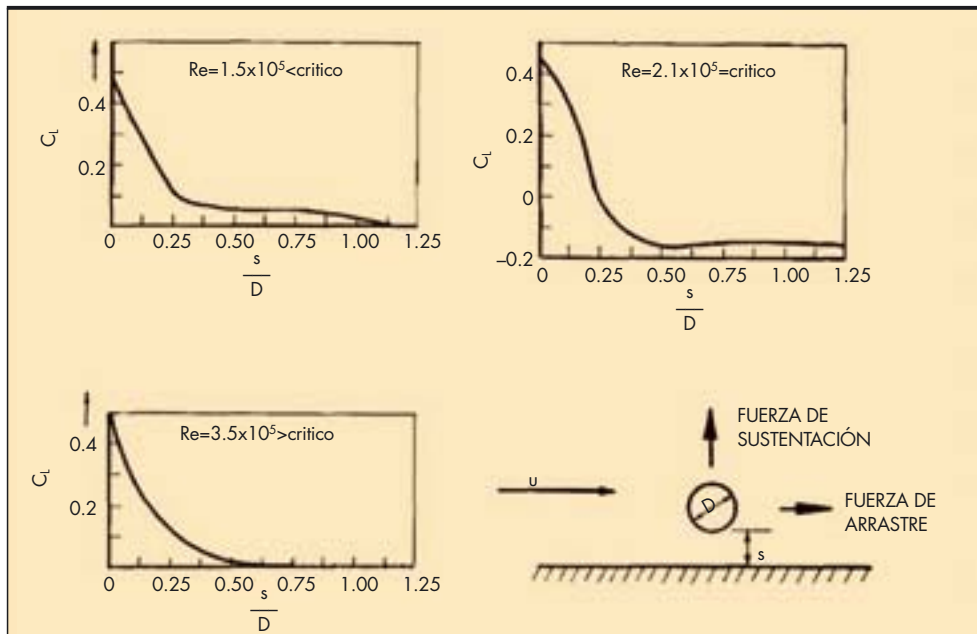


FIGURA 14. Coeficiente de sustentación. Influencia del contorno. Observaciones de Knoblock y Troller, en Dean y Harleman (1966).

**9.1.2. Coeficiente de inercia,  $C_m$**

De acuerdo con Wilson y Reid (1963) –Milne-Thompson (1951)– el coeficiente de inercia  $C_m$  en el caso de flujo potencial, producido por un movimiento uniforme de velocidad  $U$ , sobre un cilindro circular apoyado sobre una placa plana, viene dado por,

$$C_m = 2 \int_0^\pi \text{sen } \theta \text{ th} \left( \frac{\pi}{2} \tan \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 3,3 \quad (145)$$

en lugar de  $C_m = 2$  según fué deducido en el apartado 1 para el caso de cilindro circular no afectado por el contorno.

Ya que el valor medio de los valores observados de  $C_m$  es del orden de 1,5 en lugar de 2, como resultaría del flujo potencial, Wilson y Reid (1963) recomiendan disminuir proporcionalmente el coeficiente de inercia para cilindros apoyados en el suelo, proponiendo  $C_m = 2,5$ .

**9.1.3. Coeficiente de arrastre,  $C_D$**

En la Tabla 2, correspondiente a los valores observados por diversos investigadores, puede apreciarse que para cilindros circulares libres, no afectados por el contorno, el coeficiente de arrastre para números de Reynolds inferiores crítico es del orden de  $C_D = 1,5$ , mientras que para números de Reynolds superiores al crítico  $C_D$  es del orden de 0,40.

La rugosidad de la superficie de las tuberías tiende a rebajar el número de Reynolds crítico, pero según han observado Blumberg y Rigg (1961)  $C_D$  es función de la rugosidad para el campo supercrítico, aumentando con ésta.

Ya que todas las estructuras marinas tienden a adquirir una cubierta de fauna o flora, antes o después la tubería perderá su lisura inicial, aumentando gradualmente su rugosidad. Parece entonces aconsejable adoptar valores de  $C_D \geq 1$  para tuberías en contacto con el fondo.

**9.2. FUERZAS SOBRE CONDUCCIONES SUBMARINAS TRAPECIALES**

En el caso de conducciones submarinas trapeziales, de acuerdo con Beckmann y Thibodeaux (1962) puede admitirse  $C_D = 0,7$  y  $C_L = 0$ .

Estos coeficientes son independientes del número de Reynolds y aplicables tanto a movimientos permanentes como oscilantes.

**10. BIBLIOGRAFÍA**

BECKMANN, H. and THIBODEAUX, M.H. (1962) –“Wave force coefficients for offshore pipelines”– Proc. ASCE, WW2, pag. 3141.

BIERMANN, D. and HERRSTEIN, W.H. (1933)– “The interference between struts in various combinations”– NACA Report n°. 468.

BISHOP, R.E.D. and HASSAN, A.Y. (1964) –“The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid”– Proc. Roy. Soc. of London Ser. A, vol. 277.

(1964) –“The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid”– Proc. Roy. Soc. of London, Ser. A, vol. 277.

BLUMBERG, R. and RIGG, A.M. (1961) –“Hydrodynamic drag at supercritical Reynolds numbers”– Paper presented at Petroleum Session. ASME meeting, Los Angeles, Calif.

BONNEFILLE, R. (1963) –“Action de la houle sur les ouvrages cylindriques isolés de grande dimension”– Bull. Cent. de Recherches et d’Essais de Chatou, 3.

BORES, P.S. (1967) –“Estructura del oleaje”– Lab. de Puertos C.E.E.O.P. Publ. N°. 4-B.

BORGMAN, L.E. (1958) –“Computation of the ocean wave forces on inclined cylinders”– Trans. AGU, vol. 39, n°. 5.

(1964) –“The statistical distribution of ocean waves on vertical piling”– Instit. of Eng. Res., HEL 9-3, Univ. of Calif. - CERC Techn. Mem. n°. 13.

BORGMAN, L.E. (1965) –“Wave forces on piling for narrow-band spectra”– Proc. ASCE, Journ. WW3, pag. 4443.

(1965) –“A statistical theory for hydrodynamic forces on objects”– Wave Res. Rep. HEL 9-6, Hydr. Eng. Lab., Univ. of Calif., Berkeley - Annals of Mathematical Statistics. (Feb. 1967).

(1965) –“The spectral density for ocean wave forces”– Proc. 10th Conference on Coastal Eng. - Proc. ASCE, WW2, pag. 5247 (1967).

BRATER, E.F., McNOWN, J.S. and STAIR, L.D. (1958) –“Wave forces on submerged structures”– Proc. ASCE Journ. HY, pag. 1833.

BRETSCHNEIDER, Ch. (1957) –“Evaluation of drag and inertial coefficients for maximum range of total wave force”– Texas A&M., Res. Found., Techn. Rep. N°. 55 - 5 .

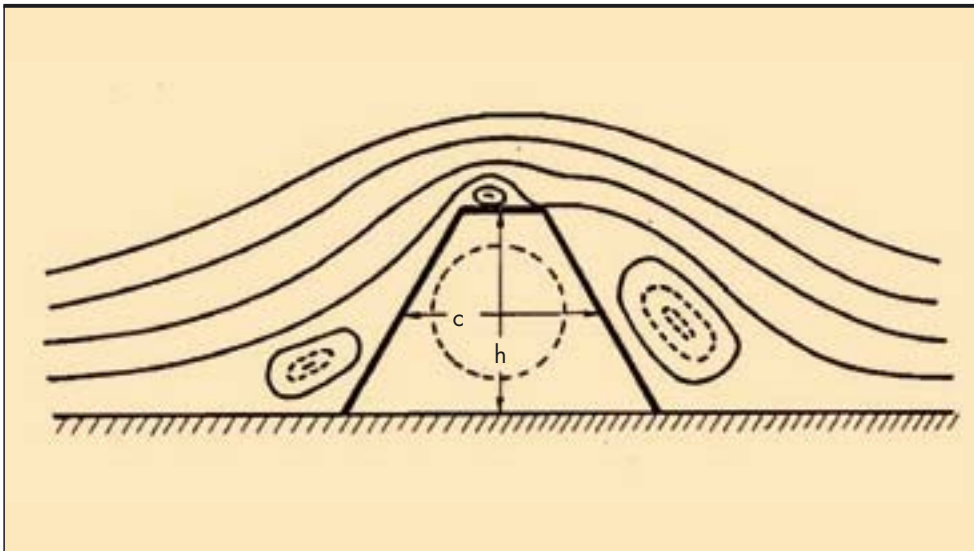


FIGURA 15. Esquema del flujo alrededor de una conducción trapezoidal. Beckmann y Thibodeaux (1962).



- (1965) –“On the probability distribution of wave force and on introduction to the correlation inertial coefficient”– Proc. 10th Conferencé on Coastal Eng. - Proc. ASCE, WW2, pag. 5217 (1967).
- BRETSCHNEIDER, Ch., COLLINS, J.I. and PICK, G.S. (1965) –“Gravity wave and wave force theory, measurements and date analysis: State of the Art”– NERCO, Techn. Rep. 98, vol. 1.
- BURNSNALL, W. J. and LOFTIN, L. K. (1951) –“Experimental in vestigation of the pressure distribution about a yawed cylinder in the critical Reynolds number range”– NACA, Techn. Note 2463.
- CARTWRIGHT, D.E. and LONGUET-HIGGINS, M.S. (1956) –“The statistical distribution of rmaxima of a random function”– Proc. Roy. Soco of London, Ser. A, vol. 237.
- COURANT & HILBERT (1962) –“Methods of Mathematical Physics”– Interscience Publ., New York.
- CROOKE, R.C. (1965) –“Re-analysis of existing force data on model piles”– BEB, Techn. Mem. n°. 71.
- DEAN, R.G. (1956) –“Fluid forces on circular cylinders”– thesis Texas A&M., College Statidn, Texas.
- DEAN, R.G. and HARLEMAN, D.R.F. (1966) –“Interaction of structures and waves”– en Estuary and coastline hydrodynamics, IPPEN ed. - McGraw Hill Book Comp.
- DEMENTEV (1934) –Trans. Sc. Res. Inst. of Hydrotechn. Leningrad, vol. 12.
- GAITHER, W.S. and BILLINGTON, D.P. (1964) –“The dynamic response of offshore structures to timedependent forces”– Proc. 9th Conference on Coastal Eng.
- HALL, M.A. (1958) –“Laboratory study of breaking wave for ces on piles”– BEB Techn. Mem. n°. 106.
- HARLEMAN, D.R.F. and SHAPIRO, W.C. (1955) –“Experimental and analytical studies of wave force s on offshore structures, Part I”– MIT Hydrody. Lab. T.R. n°. 19.
- HARLEMAN, D.R.F., SHAPIRO, W.C. and MARLOW, T.A. (1957) –“Experimental and analytical studies of wave forces on offshore drilling structures, Part II”– MIT Hydrod. Lab. T. R. n°. 24.
- HARLEMAN, D.R.F., NOLAN, W.C. and HONSINGER, V.C. (1963) –“Dynamic analysis of offshore estructures”– Proc. 8th Conference on Coastal Eng.
- IRIBARREN, R. Y NOGALES, C. (1954) –“Obras Marítimas: Oleaje y Diques”– Dossat, Madrid.
- KEIM, S.R. (1956) –“Fluid resistance to cylinders in aaccelerated motion”– Proc. ASCE, HY 6, pag. 1113.
- KEULEGAN, C.H. and CARPENTER, L.H. (1958) –“Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid”– NBS Rep. 4821, Nat. Bureau of Standards.
- KNOBLOCK and TROLLER –“Tests on the effect of sidewind on the ground handling of airships”– Report of. the tests conducted at the Guggenheim Airship Inst.
- LAIRO, A.O.K. (1961) –“Eddy forces on rigid cylinders”– Proc. ASCE, WW.
- (1962) –“Water force s on flexible oscillating cylinders”– Proc. ASCE, WW3, pag. 3234.
- LAIRD, A.D.K., JOHNSON, C.A. and WALKER, R.W. (1960) –“Water eddy forceson oscillating cylinders”– Proc. ASCE, HY9.
- LAMB, H. (1945) –“Hydrodynamics”– Dover Publ.
- LONGUET-HIGGINS, M.S. (1952) –“On statistical distribution of the heights of sea waves”– Journ. Mar. Res. vol. 11, n°. 3.
- LUNEAU, J. (1948) –“Sur l’effect d’inertie des sillages de corps se déplaçant dans un fluide d’un mou vement accéléré”– CR. Acad. des Sciences. Paris, 227, 17.
- MacCAMY, R.C. and FUCHS, R.A. (1954) –“Wave force s on piles: a diffraction theory”– BEB, Techn. Mem. n°. 69.
- MICHALOS, J. (1962) –“Dynamic response and stability of piers on piles”– Proc. ASCE, WW3, pag. 3221.
- MICHALOS, J. and BILLINGTON, D.P. (1961) –“Oesign and stability considerations for unique pier”– Proc. ASCE, WW2.
- MILNE-THOMPSON, M.L. (1951) –“Hidrodinámica teórica”– Aguilar - Madrid.
- MORISON, J.R. (1951) –“The design of piling”– Proc. First Conference on Coastal Eng.
- MORISON, J.R., O’BRIEN, M.P., JOHNSON, J.W. and SCHAAF, S. A. (1950) –“The force exerted by surface waves on piles”– Petroleum Trans. 189, TP. 2846.
- MORISON, J.R., JOHNSON, J.W. and O’BRIEN, M.P. (1954) –“Experimental studies of for.ces on piles”– Proc. 4th Conference on Coastal Eng.
- MURTHA, J.P. (1954) –“Virtual mass of partially submerged bodies”– Thesis Carnegie Inst. Tech. Dep. of Civil Eng.
- NOLAN, W.C. and HONSINGER, V.C. (1962) –“Wave induced vibrations in fixed offshore structures”– Naval Eng. Thesis MIT.
- PAAPE, A. and BREUSERS (1966) –“The influence of pile dimensions on forces exerted by waves”– Proc. 10th Conference on Coastal Eng.
- PIERSON, W.J. and HOLMES, P. (1965) –“Irregular wave forces on apile”– Proc. ASCE, WW4 - pag. 4528.
- REID, R.O. (1956) –“Correlation of water level variations with wave forces on a vertical pile for nonperiodiq waves”– Proc. 6th Conference on Coas tal Eng.
- REID, R.O. and BRETSCHNEIDER, Ch. (1953). –“Surface waves and offshore structures: The design wave in deep and shallow water”– Texas A & M.
- RIABOUCHINSKI, P. (1920) –“Sur la résistance des fluides”– Intern. Congr. Math. Strasbourg.
- ROSS, C.W. (1959) –“Large-scale teste of wave forces on piling”– BEB, Techn. Mem. n°. 111.
- SCHILLER, L. and LINKE, W.Z. (1935) - Z. Angew. Math. und Mech. 15,35.
- SCHLICHTING, H. (1955) –“Boundary layer theory”– MacGraw Hill Book Comp., New York.
- SKJELBREIA, L., HENDRICKSON, J.A., GRAGG, W. and WEBB, L. M. (1960) –“Loading on cylindrical piling due to action of ocean waves”– NESCO, Techn. Report, 4 vol.
- TASK COMMITTEE ON WIND FORCE (1961) –“Wind forces on structures”– Trans. ASCE, 126, Part II.
- TEXAS TOWER N°. 4 –“Platform motion study”– Brewer Eng. Laboratories Inc. Report 173 MarionMass. June 10, (1959).
- THOM, A. (1929) –A.R.C. Reports and Memoranda N°. 1194.
- UNITED STATES SENATE –“The collapse of Texas Tower N°. 4. Report by Preparedness Investigating Subcomroittee of the Cormmittee on Armed Services U. S. Senate. 87th Congress, 1st Session, Government Printing Office, Washington D.C. (1961).
- WIEGEL, R.L., BEEBE, K.E. and MOON, J. (1957) –“Ocean wave forces on circular cylindrical piles”– Proc. ASCE, HY2, pag. 1199.
- WILSON, B.W. (1957) –“Results of analysis of wave force data confused sea conditions around a 30-inch. diameter Testpile, Gulf of Mexico”– Texas A & M., Techn. Rep. N°. 55-7.
- WILSON, B.W. and REID, R.O. (1963) –“Discussion of Wave force coefficients for offshore pipelines”– Proc. ASeE, WW1, pág. 61-65.