

Metodología aproximada para el análisis de una viga en curva circular usando un elemento recto de parrilla en la cuerda de la curva

Approximated Methodology for a Circular Curved Beam Analysis Using a Straight Grid Element on the Curve Chord

José Christian Chanchí Golondrino^{1*}, Evelyn Esperanza Burbano Argoty², Juan Sebastián Delgado Trujillo³, María Victoria Gómez Quintero⁴

Resumen

Las vigas en curva son usadas en diferentes aplicaciones en Ingeniería Civil y Mecánica. El análisis estructural de vigas en curva por métodos actualmente disponibles es complejo. Este artículo propone un método simple para el análisis de una viga en curva circular usando un elemento recto de parrilla en la cuerda de la curva. El método propuesto es validado numéricamente para vigas en curva empotradas en ambos extremos, con ángulos centrales entre 1° y 180° y analizadas con un método convencional elástico para vigas en curva. Un análisis paramétrico de la influencia de las propiedades geométricas y mecánicas de la sección transversal de la viga en curva sobre las reacciones de la viga fue realizado usando el método convencional elástico. Los resultados muestran que para vigas en curva con ángulos centrales menores o iguales a 60°, las reacciones calculadas con el método propuesto varían entre el 78 % y 100 % de las calculadas con el método convencional elástico. Los resultados también muestran que mientras las reacciones en el método propuesto no son influenciadas por las propiedades geométricas y mecánicas de la sección transversal, las reacciones en el método convencional son influenciadas hasta el 18 % para vigas en curva con factores de rigidez de 0.50-2.0, el cual fue obtenido a partir de las propiedades geométricas y mecánicas de la sección transversal de la viga en curva. El método propuesto puede ser usado como herramienta para el pre-dimensionamiento rápido de vigas en curva debido a que este es de fácil adopción, sus ecuaciones son simples, fáciles de programar y similares a las de vigas rectas.

Palabras clave: vigas en curva, análisis aproximado de vigas en curva, análisis matricial, elemento de parrilla.

Abstract

Curved beams are frequently used for different applications in Civil and Mechanical engineering. Structural analysis of curved beam using current available conventional methods is complex. This paper lays out a simple methodology for analyzing a circular curved beam using a straight grid element on the curve chord. The aforementioned method was validated for curved beams with both fixed ends, central angles of 1°-180°, and analyzed by a conventional elastic method for curved beams. A parametric analysis of the influence of the geometrical and mechanical beam cross section properties on the curved beam reactions was undertaken using the conventional elastic method. Results show that for curved beams with central angles equal to or less than 60°, the beam reactions predicted with the proposed method were 78 %-100 % of those predicted with the conventional elastic method. Results also show that while reactions in the proposed method are independent of the geometrical and mechanical beam cross section properties, reactions in the elastic conventional method are dependent up to 18 % for curved beams with stiffness factors of 0.50-2.0, which was obtained from the geometrical and mechanical properties of the curved beam cross section. Thus, the proposed method can be used as a tool for a fast first design approach of curved beams, since it's easy on the uptake, and its equations are simple, easy to program and similar to those for straight beams.

Keywords: curved beams, approximate analysis of curved beams, matrix analysis, grid element.

1. INTRODUCCIÓN

Las vigas en curva tienen diversas aplicaciones en ingeniería civil e ingeniería mecánica (Excel Douglas, 2018). Estructuras tales como puentes, balcones, teatros, auditorios, tanques elevados y elementos de máquinas, pueden

ser ensambladas usando vigas en curva (Buckner Moorman, 1937; Ali y Henzah, 2014). El análisis de vigas en curva es complejo, no solo porque sus acciones internas interactúan en el espacio, sino también porque estas acciones internas son afectadas por la deformabilidad de la sección transversal de la viga en curva (Buckner Moorman, 1937; Gendy y Saleeb, 1992; Yang y Kuo, 1987).

Los primeros trabajos investigativos en análisis de vigas en curva obtuvieron las ecuaciones de las acciones internas ignorando la deformabilidad de la sección transversal y usando teoremas energéticos o ecuaciones diferenciales basadas en equilibrio (Buckner Moorman, 1937; Wong, 1970; Komendant, 1972). Esta metodología es laboriosa debido a que la complejidad de las ecuaciones de las

* Autor de contacto: jcchanchigo@unal.edu.co

¹ Profesor Asociado. Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales.

² Ingeniera Civil-Egresada de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales.

³ Ingeniero Civil-Egresado de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales.

⁴ Ingeniera Civil-Egresada de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales.

acciones internas aumenta con la cantidad de luces de la viga y con la complejidad de la función que define el caso de carga. Trabajos de investigación posteriores usaron análisis matricial para la obtención de las acciones internas de vigas en curva (Tuma, 1988; Chanchí, 2001; Excel Douglas, 2018; Upadhyay *et al.*, 2018). En análisis matricial, las ecuaciones que rigen las acciones internas de la viga en curva obtenidas a partir de métodos energéticos, son organizadas en ecuaciones matriciales que relacionan las fuerzas externas con los desplazamientos a través de una matriz que cuantifica la rigidez de la viga en curva. Esta metodología es aplicable a vigas en curva continuas y requiere programación extensa en un paquete computacional matemático. El análisis matricial también ha sido usado para reducir la complejidad del análisis de vigas en curva, considerando la trayectoria de la viga en curva como una sucesión de elementos rectos (Weissman, 1970; Yoda *et al.*, 1983; Gendy y Saleeb, 1992; Excel Douglas, 2018).

Aunque esta metodología se ha validado numéricamente, su aplicación práctica es laboriosa para vigas de gran longitud debido a que buenas aproximaciones se logran para elementos rectos subtendidos en ángulos menores o iguales a 10° (Yoda *et al.*, 1983). Recientemente se ha introducido el análisis de vigas en curva a través del método de los elementos finitos con el fin de cuantificar el efecto de la deformabilidad de la sección transversal sobre las acciones internas (Gendy y Saleeb 1992; Hall *et al.*, 1999; Yang y Kuo 1987). No obstante, el método de los elementos finitos permite desarrollar un análisis riguroso de las vigas en curva, los paquetes computacionales de elementos finitos usan condiciones de borde que son difíciles de elegir para diseñadores de poca experiencia y estos paquetes no siempre están al alcance de todos los diseñadores. Estas características reducen la aplicabilidad del método de elementos finitos.

Los anteriores trabajos investigativos muestran que diferentes metodologías para el análisis de vigas en curvas han sido propuestas. Sin embargo, la aplicación de estas metodologías requiere:

1. El dimensionamiento previo de la sección transversal de la viga en curva, con el fin de obtener propiedades geométricas
2. La elección previa del material de la sección transversal de la viga en curva, con el fin de obtener propiedades mecánicas
3. El uso de ecuaciones complejas o el uso de paquetes computacionales especializados

Estos requerimientos conducen a que el análisis de vigas en curva sea dispendioso, complejo, lento y dependiente de la relación entre las propiedades geométricas y mecánicas de la sección transversal de la viga en curva, expresadas a través de un factor denominado el factor de rigidez (Tuma, 1988). Para efectos de pre-dimensionamiento y pre-diseño de vigas en curva, una metodología aproximada que permita cuantificar rápidamente las acciones internas de vigas en curva y que requiera poca información de entrada es requerida. Por tal razón, este artículo propone una metodología sencilla y rápida para el análisis de vigas en curva circulares usando un elemento recto de parrilla localizado en la cuerda de la curva. El método propuesto ignora el efecto de la deformabilidad de la sección sobre

las acciones internas, las ecuaciones son similares a las de vigas rectas, usa un bajo número de variables de entrada y puede programarse fácilmente. El método propuesto es validado analíticamente para el caso de una viga en curva de una luz empotrada en ambos extremos analizada con el método convencional para el análisis de vigas en curva y definido por (Tuma, 1988). Usando este método convencional y a través de un análisis paramétrico, también se calculó el efecto del factor de rigidez sobre las reacciones en los soportes de la viga en curva. Este factor de rigidez fue obtenido a partir de las propiedades geométricas y mecánicas de la sección transversal de la viga en curva. Respuestas a las siguientes preguntas son obtenidas en este artículo:

1. ¿Es posible plantear un método para obtener las reacciones de una viga en curva usando un elemento recto de parrilla en la cuerda de la curva?
2. ¿Cuál es el rango de valores del factor de rigidez para vigas en curva construidas con materiales y secciones transversales de uso común en Ingeniería Civil e Ingeniería Mecánica?
3. ¿Cuál es la influencia de las propiedades mecánicas y geométricas de la sección transversal de la viga en curva, en el cálculo de las reacciones con el método convencional y el propuesto?
4. ¿Con qué precisión el método propuesto predice las reacciones de la viga en curva, respecto al método convencional?
5. ¿Cuáles son las aplicaciones, ventajas y limitaciones del método propuesto?

2. MÉTODOS ANALÍTICOS Y MATERIALES

2.1. Definición de viga en curva

La viga en curva es un elemento prismático cuyo eje axial recorre una curva circular y soporta cargas en dirección perpendicular al plano que contiene el eje axial, como se muestra en la figura 1. La viga en curva se localiza espacialmente mediante tres sistemas de ejes coordenados ortogonales que siguen las direcciones X , Y , Z cumpliendo la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura 1 y son definidos:

1. Sistema local en la cuerda de la curva x_p , y_p , z_p , contiene la cuerda y su eje x_p coincide con la orientación de la cuerda, como se muestra en la figura 1
2. Sistema local en la curva x_c , y_c , z_c , es definido para cada punto de la curva, el eje x_c coincide con la tangente en cada punto de la curva y el eje z_c coincide con el radio de la curva en el punto, como se muestra en la figura 1
3. Sistema global X_g , Y_g , Z_g , contiene el sistema local de la cuerda y todos los sistemas locales de la curva en un solo cuadrante, como se muestra en la figura 1

Una viga en curva se define geoméricamente por el ángulo central de la curva, 2θ , comprendido entre los radios de la curva, r , que interceptan el extremo izquierdo, L , y el extremo derecho, R , de la viga en curva, como se muestra en la figura 1. La sección transversal de la viga en curva es definida geoméricamente por el momento de inercia respecto al eje z_c en el sistema local de la curva, I , y por el momento polar de inercia respecto al eje x_c en el sistema local

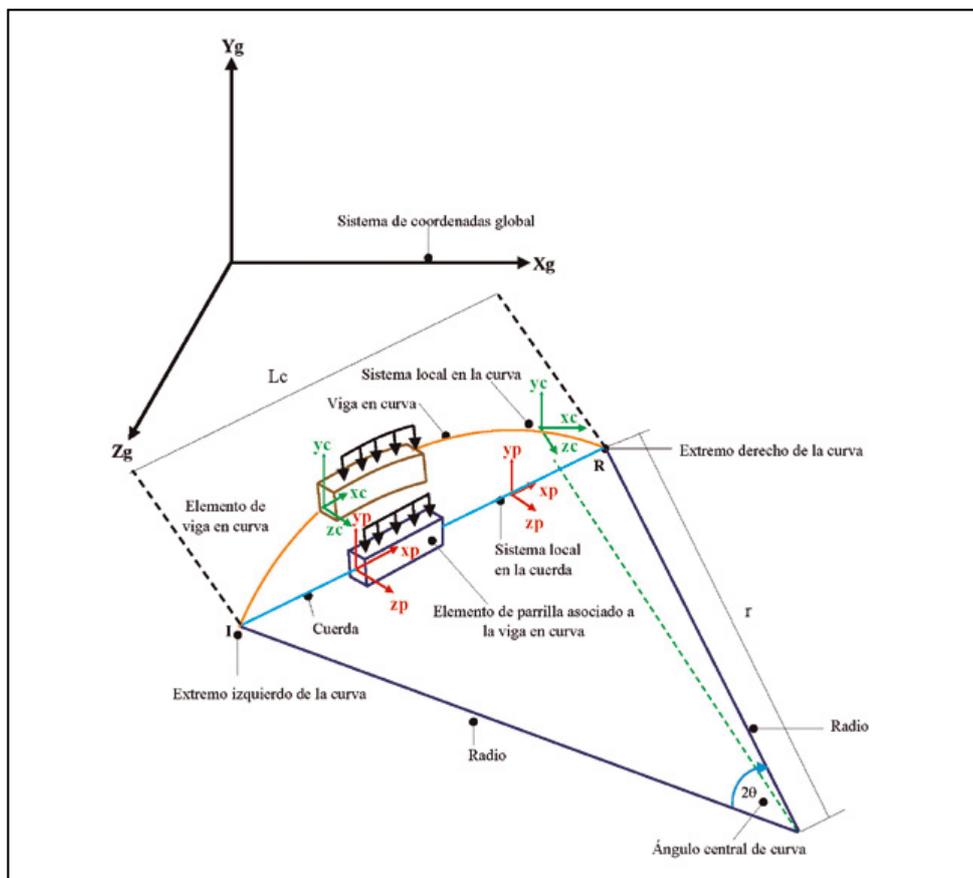


Figura 1. Componentes de la viga en curva y de elemento de parrilla asociado.

de la curva, J , como se muestra en la figura 1. El material de la viga en curva es definido por el módulo de elasticidad, E , y el módulo de corte, G .

2.2. Elemento de parrilla asociado a la viga en curva

El elemento de parrilla asociado a la viga en curva, es un elemento recto cuyo eje axial coincide con la cuerda de la viga en curva, pertenece al mismo plano que contiene el eje axial de la viga en curva y soporta las mismas cargas de la viga en curva, como se muestra en la figura 1. El elemento de parrilla asociado a la viga en curva se localiza espacialmente mediante el sistema local de coordenadas en la cuerda de la curva x_p, y_p, z_p , como se muestra en la figura 1 y su longitud, L_c , de acuerdo a la figura 1, se determina:

$$L_c = 2 \times r \times \text{sen}\theta \quad [1]$$

Dónde, r es el radio de la curva y θ es el semi-ángulo central de la curva.

2.3. Apoyos, fuerzas externas y acciones internas de la viga en curva y del elemento de parrilla asociado

La viga en curva y el elemento de parrilla asociado se consideran apoyados en sus extremos izquierdo y derecho en empotramientos, como se muestra en la figura 2. Para la viga en curva, dos tipos de fuerzas externas paralelas al eje global Y_g son consideradas: puntual y uniformemente distribuida sobre toda la longitud. Para la solución de la viga en curva a partir del elemento de parrilla asociado, la fuerza puntual se traslada radialmente al elemento de parrilla asociado, como se muestra en la figura 2, y la fuerza distribuida se traslada sobre la longitud total del elemento de parrilla asociado. Tanto la fuerza puntual como la fuerza distribuida se trasladan desde la viga en curva y al elemento de parrilla asociado manteniendo su magnitud. Las acciones internas en un punto de la viga en curva en su eje local o en un punto del elemento de parrilla asociado en su eje local, corresponden a una fuerza cortante, V , sobre el eje y , a un momento flector, M , alrededor del eje z y a un momento torsor, T , alrededor del eje x , como se muestra en la figura 2.

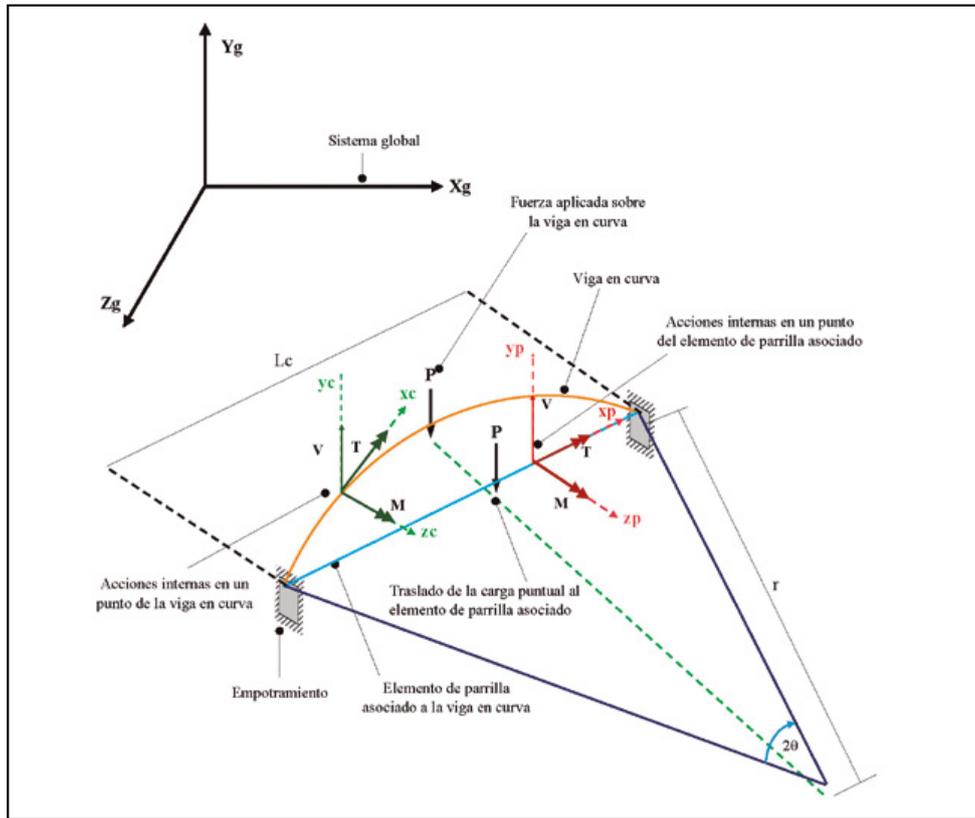


Figura 2. Apoyos, fuerzas externas y acciones internas de la viga en curva y del elemento de parrilla asociado.

2.4. Reacciones en los soportes de la viga en curva por el método convencional

El método convencional aquí usado es el definido por Tuma (1988). En este método convencional, las reacciones en el apoyo izquierdo de la viga en curva empotrada – empotrada, para los casos de carga puntual y de carga uniforme sobre toda la longitud de la viga en curva son definidos así: reacción de cortante, W_{Lo} , reacción de momento flector, Y_{Lo} , y reacción de momento torsor, X_{Lo} , como se muestra en la figura 3.

Para el caso de la carga distribuida sobre toda la longitud de la viga en curva, las reacciones en el apoyo izquierdo de la viga en curva son definidas por Tuma (1988), como:

$$W_{Lo} = \theta \times r \times w \tag{2}$$

$$X_{Lo} = (\text{sen}\theta - \theta \text{cos}\theta) \times r^2 \times w \tag{3}$$

$$Y_{Lo} = \left[\frac{\left[\frac{(1+k)}{2} \times (\theta^2 \text{sen}\theta + 2\theta \text{cos}\theta - 2\text{sen}\theta) \right] + \left[\frac{(1-k)}{2} \times (\text{sen}\theta - \theta \text{cos}\theta) \times \text{cos}^2\theta \right]}{\left(\frac{(1+k)}{2} \times \theta \right) + \left(\frac{(1-k)}{2} \times \text{sen}\theta \times \text{cos}\theta \right)} \right] \times r^2 w \tag{4}$$

$$k = \frac{E}{G} \times \frac{I}{J} \tag{5}$$

Para el caso de la carga puntual, las reacciones en el apoyo izquierdo de la viga en curva son definidas por Tuma (1988), como:

$$W_{Lo} = (K_1 \times G_{11} + K_2 \times G_{12} + K_3 \times G_{13}) \times p \tag{6}$$

$$X_{Lo} = (K_2 \times G_{11} + K_5 \times G_{12} + K_4 \times G_{13}) \times r \times p \tag{7}$$

$$Y_{Lo} = -(K_3 \times G_{11} + K_4 \times G_{12} + K_7 \times G_{13}) \times r \times p \tag{8}$$

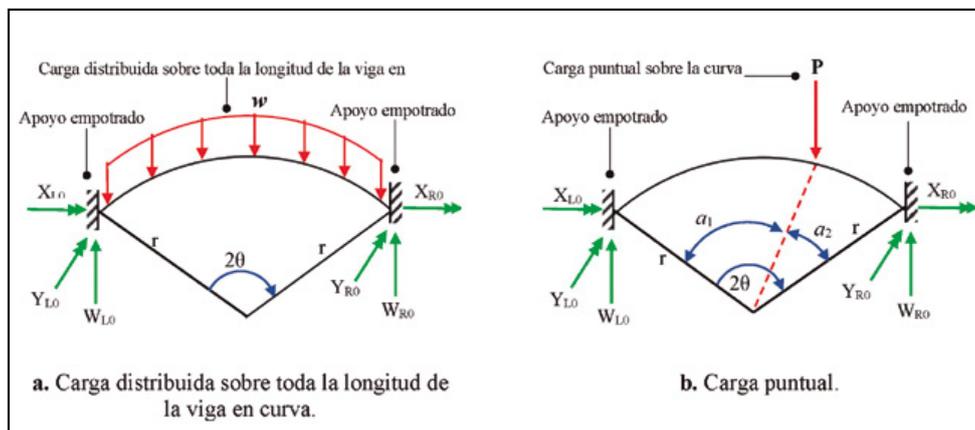


Figura 3. Reacciones de la viga en curva empotrada – empotrada con carga distribuida en toda la longitud y con carga puntual (Tuma, 1988).

Donde en las ecuaciones 3–8, para la viga en curva, r es el radio, 2θ es el ángulo central, w es la carga distribuida, P es la carga puntual, E es el módulo de elasticidad del material, I es el momento inercia de la sección transversal respecto al eje local de la curva zc , G es el módulo de corte del material y J es el momento polar de inercia de la sección transversal. El factor k definido por la ecuación 5 se denomina factor de rigidez. Este factor es adimensional y agrupa las propiedades geométricas de la sección transversal I y J y las propiedades mecánicas del material de la viga en curva E y G . Las variables K_1 a K_7 y G_{11} a G_{13} en las ecuaciones 6–8, son definidas por Tuma (1988), y son función de r , 2θ , k y del ángulo entre el punto de aplicación de la carga puntual y el apoyo derecho de la viga en curva, a_2 , mostrado en la figura 3b. Las expresiones de las reacciones en el apoyo izquierdo de la viga en curva, para el caso de la carga puntual, son presentadas en forma general en las ecuaciones 6-8, debido a que estas expresiones son extensas y matemáticamente complejas.

2.5. Reacciones en los soportes del elemento recto de parrilla

Las ecuaciones para el cálculo de las reacciones en los soportes de un elemento recto de parrilla empotrado–empotrado son las propuestas por Hurtado Gómez (2016). Estas ecuaciones son definidas para los casos de carga puntual y de carga uniforme sobre toda la longitud del elemento de parrilla y en el apoyo empotrado izquierdo así: reacción de cortante, $W_{L\text{ parrilla}}$, reacción de momento flector, $Y_{L\text{ parrilla}}$, y

reacción de momento torsor, $X_{L\text{ parrilla}}$, como se muestra en la figura 4.

Para el caso de la carga distribuida en toda la longitud del elemento de parrilla, las reacciones en el apoyo izquierdo del elemento recto de parrilla son definidas por Hurtado Gómez (2016), como:

$$W_{L\text{ parrilla}} = \frac{w \times Lc}{2} \quad [9]$$

$$Y_{L\text{ parrilla}} = \frac{w \times Lc^2}{12} \quad [10]$$

Para el caso de la carga puntual, las reacciones en el apoyo izquierdo del elemento recto de parrilla son definidas por Hurtado Gómez (2016), como:

$$W_{L\text{ parrilla}} = \frac{P \times La_2^2}{Lc^3} \times (3La_1 + La_2) \quad [11]$$

$$Y_{L\text{ parrilla}} = -\frac{P \times La_1 \times La_2^2}{Lc^2} \quad [12]$$

Donde en las ecuaciones 9–12, Lc es la longitud del elemento recto de parrilla, w es la carga distribuida, P es la carga puntual, La_1 es la distancia entre el apoyo izquierdo y el punto de aplicación de la carga puntual, y La_2 es la distancia entre el apoyo derecho y el punto de aplicación de la carga puntual, como se muestran en la figura 4. Debe notarse que para el elemento recto de parrilla y para las dos condiciones de carga, el momento torsor $X_{L\text{ parrilla}}$ es nulo debido a que el elemento recto de parrilla está aislado o no conectado a otro elemento de parrilla.

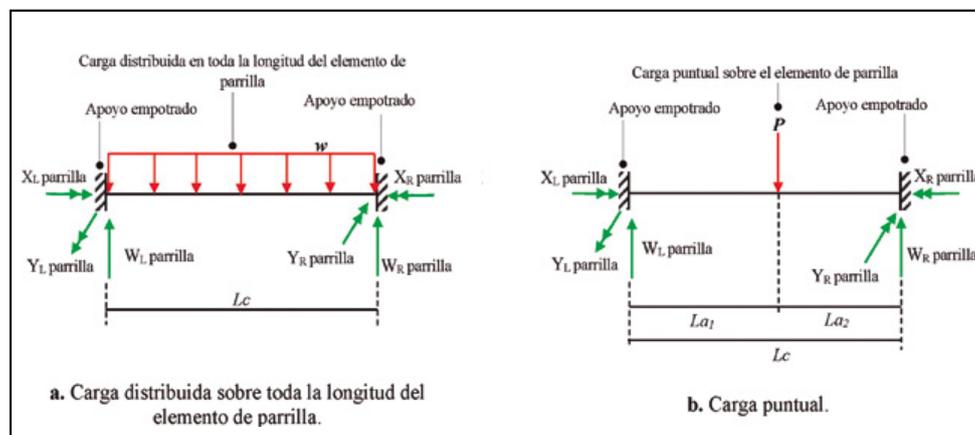


Figura 4. Elemento de parrilla empotrado – empotrado con carga distribuida en toda la longitud y con carga puntual (Hurtado Gómez, 2016).

2.6. Aproximación del método propuesto al convencional

La aproximación del método propuesto al convencional, A , es un valor no dimensional expresado en porcentaje y obtenido como el cociente entre una reacción de la viga en curva calculada por el método propuesto y el valor de la misma reacción calculada por el método convencional (Tuma 1988). Si A varía en el rango 85 %-115 % se considera una buena aproximación y si A varía en el rango 70–85 % o en el rango 115 %-130 % se considera una aproximación aceptable. Los valores de estos rangos fueron

definidos con el fin de considerar una aproximación buena o aceptable, cuando el método propuesto difiere del método convencional como máximo en el 15 % o en el 30 %, respectivamente. La aproximación del método propuesto al convencional, A , se calcula como:

$$A = \frac{MP}{MC} \times 100 \% \quad [13]$$

Donde, MP es el valor de una reacción calculada por el método propuesto y MC es el valor de la misma reacción calculada por el método convencional.

2.7. Materiales considerados en el análisis de la viga en curva

En el análisis de la viga en curva usando el método convencional (Tuma, 1988), concretos con resistencia a compresión de 21 MPa - 42 MPa y acero con resistencia a fluencia de 250 MPa, son considerados. Para estos materiales y el método convencional, el módulo de elasticidad, E , y el módulo de corte, G , son las propiedades mecánicas que definen el material de la viga en curva. Valores de E y G son listados en la tabla 1.

Tabla 1. Propiedades mecánicas de materiales considerados en el análisis de la viga en curva

Material	Resistencia a compresión o resistencia a fluencia	Módulo de elasticidad	Módulo de corte
	f'c o fy	E	G
	MPa	MPa	MPa
Concreto	21	21,538*	8,974*
	28	24,870*	10,362*
	35	27,805*	11,585*
	42	30,459*	12,691*
Acero	250	200,000 **	77,200 **

* Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente (Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo territorial 2010).

** Steel Construction Manual (American Institute of Steel Construction Inc. 2005).

2.8. Secciones transversales consideradas en el análisis de la viga en curva

En el análisis de la viga en curva por el método convencional (Tuma, 1988), secciones transversales de viga en curva circular, rectangular y cuadrada fueron consideradas. Estas secciones transversales se consideraron sólidas y huecas. En el método convencional, la sección transversal de la viga en curva es definida por el momento de inercia, I , respecto al eje local de la viga en curva zc mostrado en la figura 1 y el momento polar de inercia, J , respecto al eje local de la viga en curva xc mostrado en la figura 1. Expresiones de I y J para las secciones transversales consideradas se muestran en la tabla 2.

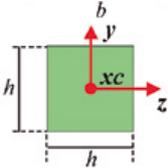
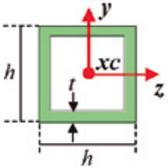
2.9. Influencia del factor de rigidez sobre las reacciones de la viga en curva

La influencia del factor de rigidez sobre las reacciones de la viga en curva, β , es un factor no dimensional que cuantifica la variación de las reacciones de la viga en curva con el factor de rigidez, k , definido en la ecuación 5. Este factor β es obtenido como el cociente entre el valor de una reacción de la viga en curva calculada con el método convencional Tuma (1988) para un factor de rigidez dado y el valor de la misma reacción calculada con el método convencional Tuma (1988) para un factor de rigidez unitario. La influencia del factor de rigidez sobre las reacciones de la viga en curva, β , se calcula como:

$$\beta = \frac{R_{ki}}{R_{k=1}} \quad [14]$$

Tabla 2. Propiedades geométricas de secciones rectas consideradas en el análisis de la viga en curva respecto a los ejes locales de la viga en curva xc , yc , zc mostrados en la figura 1

Tipo de sección transversal de viga en curva	Representación de la sección transversal de la viga en curva en el sistema de ejes locales de la viga en curva xc , yc , zc	Inercia respecto al eje local de la viga en curva zc	Momento polar de inercia respecto al eje local de la viga en curva xc
		I	J
Circular Sólida		$I = \frac{\pi d^4}{64}$	$J = \frac{\pi d^4}{32}$
Circular Hueca		$I = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2}$	$J = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2}$
Rectangular Sólida		$I = \frac{bh^3}{12}$	$J = bh^3 \left[\frac{1}{3} - 0.21 \frac{h}{b} \left(1 - \frac{1}{12} \left[\frac{h}{b} \right]^4 \right) \right]$
Rectangular Hueca		$I = \frac{(3b + h) th^2}{6}$	$J = \frac{2b^2 h^2 t}{b + h}$

Tipo de sección transversal de viga en curva	Representación de la sección transversal de la viga en curva en el sistema de ejes locales de la viga en curva xc, yc, zc	Inercia respecto al eje local de la viga en curva zc	Momento polar de inercia respecto al eje local de la viga en curva xc
		I	J
Cuadrada Sólida		$I = \frac{h^4}{12}$	$J = 0.141h^4$
Cuadrada Hueca		$I = \frac{2h^3t}{3}$	$J = h^3t$

* *Handbook of Structural and Mechanical Matrices* (Tuma, 1988).

§ *Roark's Formulas for Stress and Strain* (Young, 2002).

! *Roark's Formulas for Stress and Strain* (Young, 2002) y *Handbook of Structural and Mechanical Matrices* (Tuma, 1988).

Donde, R_{ki} es el valor de una reacción de la viga en curva calculada con un factor de rigidez k dado y $R_{k=1}$ es el valor de la misma reacción calculada con un factor de rigidez k unitario.

3. DESARROLLO DEL MÉTODO PROPUESTO

3.1. Principio y suposiciones del método propuesto

El método propuesto se basa en obtener las reacciones en el apoyo izquierdo de la viga en curva a partir de las reacciones en el apoyo izquierdo del elemento recto de parrilla y calculadas cuando el elemento de recto de parrilla es sometido a las mismas cargas de la viga en curva. En el método propuesto, los diagramas de corte, momento flector y momento torsor de la viga en curva pueden ser obtenidos a partir de las reacciones en el apoyo izquierdo de la viga en curva. El método propuesto no es aplicable al cálculo de deflexiones de la viga en curva. Las siguientes suposiciones son usadas para el desarrollo del método propuesto:

1. El material de la viga en curva se comporta elásticamente
2. Las dimensiones de la sección transversal de la viga en curva son pequeñas cuando son comparadas con el radio de la curva y con la longitud de la viga en curva
3. La sección transversal de la viga en curva es rígida en su propio plano, de tal manera que esta no sufre distorsión
4. No se considera el alabeo de la viga en curva

3.2. Traslado de las cargas de la viga en curva al elemento recto de parrilla asociado

En el método propuesto, las cargas sobre la viga en curva son trasladadas al elemento recto de parrilla asociado manteniendo su magnitud. Para el caso de la carga distribuida en toda la longitud de la viga en curva, esta

se aplica en toda la longitud del elemento recto de parrilla, como se muestra en la figura 5a. Para el caso de la carga puntual sobre la viga en curva, esta se traslada al elemento recto de parrilla asociado sobre el radio que contiene el punto en la curva sobre el cual actúa la carga puntual, como se muestra en la figura 5b. Debe notarse que al trasladar la carga distribuida de la viga en curva al elemento recto de parrilla asociado, manteniendo la magnitud, las reacciones sobre el elemento recto de parrilla asociado serán inferiores a las de la viga en curva. Esto es debido a que la longitud del arco es mayor que la de la cuerda. Esta consideración hace que el método propuesto sea una aproximación de cálculo. La validez de esta aproximación se evalúa en la sección 4.3 en donde se compara el método propuesto con el método convencional Tuma (1988).

3.3. Descomposición de reacciones del elemento de parrilla asociado sobre la viga en curva

Las reacciones en los apoyos del elemento recto de parrilla asociado y debidas a las cargas trasladadas desde la viga en curva, para los casos de carga distribuida en toda la longitud y carga puntual se muestran en las figuras 6a–b. Estas reacciones, para cada caso de carga y en cada apoyo del elemento recto de parrilla corresponden a la reacción de cortante, W_{parrilla} , y a la reacción de momento flector, Y_{parrilla} , como se muestra en las figuras 6a–b. Para el apoyo izquierdo del elemento recto de parrilla, estas reacciones son definidas por las ecuaciones 9-12 de la sección 2.5.

En la figuras 6c–d, las reacciones en los apoyos del elemento recto de parrilla asociado, debidas a las cargas trasladadas desde la viga en curva, fueron descompuestas sobre los ejes locales de la viga en curva xc, yc y zc . La reacción de cortante del elemento recto de parrilla asociado, W_{parrilla} , se considera igual a la reacción de cortante de la viga en curva, W_{curva} , debido a que los ejes locales verticales de estos dos elementos (yp y yc) son colineales, como se muestra en la figura 6c. La reacción de momento flector del elemento recto de parrilla asociado, Y_{parrilla} , fue descompuesta sobre

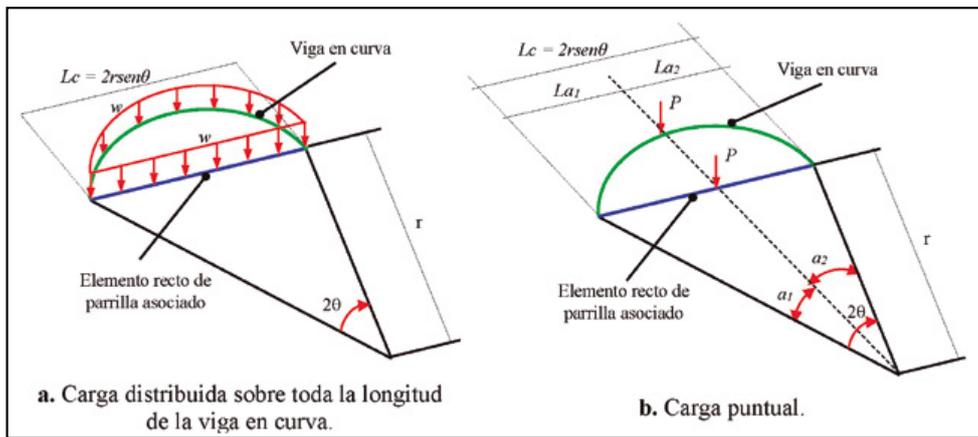


Figura 5. Traslado de las cargas de la viga en curva al elemento recto de parrilla asociado (Apoyos de la viga en curva y del elemento recto de parrilla no son mostrados).

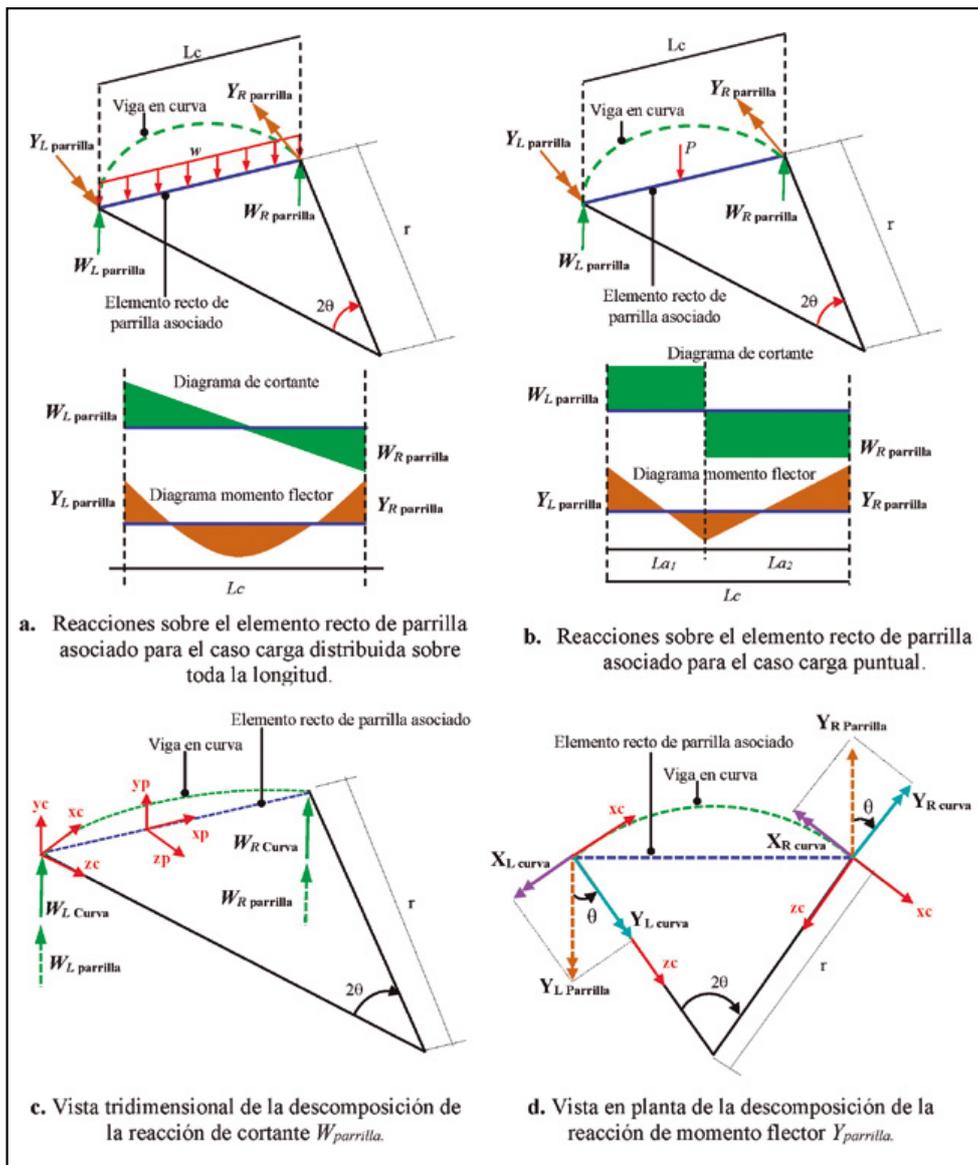


Figura 6. Reacciones sobre el elemento recto de parrilla asociado y descomposición de las reacciones del elemento recto de parrilla asociado sobre las reacciones de la viga en curva para los casos de carga distribuida sobre toda la longitud y puntual.

los ejes locales de la viga en curva x_c y z_c usando el semi-ángulo central de la curva, θ , para generar sobre la viga en curva el momento torsor, X_{curva} , y el momento flector, Y_{curva} , como se muestra en la figura 6d.

Basados en la figura 6 y en la descomposición descrita anteriormente, las ecuaciones del método propuesto para las reacciones en el apoyo izquierdo de la viga en curva son:

1. Para el caso de la carga distribuida sobre toda la longitud de la viga en curva:

$$W_{L\text{ curva}} = r \times w \times \text{sen}\theta \quad [15]$$

$$X_{L\text{ curva}} = \frac{w \times Lc^2}{12} \times \text{sen}\theta \quad [16]$$

$$Y_{L\text{ curva}} = \frac{w \times Lc^2}{12} \times \text{cos}\theta \quad [17]$$

2. Para el caso de la carga puntual en la viga en curva:

$$W_{L\text{ curva}} = \frac{P \times La_2^2}{Lc^3} \times (3La_1 + La_2) \quad [18]$$

$$X_{L\text{ curva}} = \frac{P \times La_1 \times La_2^2}{Lc^2} \times \text{sen}\theta \quad [19]$$

$$Y_{L\text{ curva}} = -\frac{P \times La_1 \times La_2^2}{Lc^2} \times \text{cos}\theta \quad [20]$$

Donde en las ecuaciones 15–20, Lc es la longitud del elemento recto de parrilla, w es la carga distribuida, P es la carga puntual, r es el radio de la curva, θ es el semi-ángulo central de la curva, La_1 es la distancia entre el apoyo izquierdo y el punto de aplicación de la carga en el elemento recto de parrilla, y La_2 es la distancia entre el apoyo derecho y el punto de aplicación de la carga en el elemento recto de parrilla, como se muestran en la figura 5.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1. Rango de variación del factor de rigidez para vigas en curva

El factor de rigidez, k , definido por la ecuación 5 en la sección 2.4, es usado para el análisis de vigas en curva en el método convencional (Tuma, 1988). Para determinar el rango de variación de k , la ecuación 5 fue expresada como el producto de dos factores denominados factor de material, k_{material} , y factor de geometría, $k_{\text{geometría}}$, los cuales son definidos:

$$K_{\text{material}} = \frac{E}{G} \quad [21]$$

$$K_{\text{geometría}} = \frac{I}{J} \quad [22]$$

En donde, para el material de la viga en curva, E y G son el módulo de elasticidad y el módulo de corte, respectivamente, y para la sección transversal de la viga en curva, I y J son el momento de momento de inercia respecto al eje local de la viga en curva zc y el momento polar de inercia respecto al eje local de la viga en curva xc , respectivamente.

Valores de k_{material} de 2.40 y 2.60 fueron obtenidos para concreto y acero, respectivamente. Estos valores fueron obtenidos usando la ecuación 21 y los valores de E y G definidos en la tabla 1 de la sección 2.7. Valores de $k_{\text{geometría}}$ entre 0.50 y 0.66 fueron obtenidos para las secciones transversales de la viga en curva presentadas en la tabla 2 de la sección 2.8 y usando la ecuación 22. Valores detallados de $k_{\text{geometría}}$ son presentados en la tabla 3. La tabla 3 muestra que para secciones transversales circulares y cuadradas,

indiferente si son huecas o sólidas, $k_{\text{geometría}}$ es constante. Sin embargo, para secciones transversales rectangulares huecas o sólidas, $k_{\text{geometría}}$ varía en un rango dependiente de la relación entre la altura y la base de la sección rectangular, h/b .

Tabla 3. Factor de geometría, $k_{\text{geometría}}$, para las secciones transversales de la viga en curva listadas en la tabla 2 de la sección 2.8

Sección transversal de la viga en curva	$k_{\text{geometría}}$ ()
Circular sólida	0.50
Circular hueca	0.50
Rectangular sólida	0.25 – 0.59
Rectangular hueca	0.25 – 0.66
Cuadrada sólida	0.59
Cuadrada hueca	0.66

Para secciones rectangulares sólidas y huecas, $k_{\text{geometría}}$ en función de h/b , fue calculado en la tabla 3 usando las ecuaciones 23–24, respectivamente. En ambos casos, los límites inferior y superior del rango de $k_{\text{geometría}}$ fueron obtenidos para $h/b = 0.0$ y $h/b = 1.0$, los cuales corresponden a secciones muy anchas y poco altas, de aplicación común en puentes, y a secciones cuadradas, respectivamente. De acuerdo a los resultados en la tabla 3, se puede establecer que el factor de geometría, $k_{\text{geometría}}$, para las secciones transversales consideradas en la tabla 2 de la sección 2.8 varía en el rango 0.25-0.66.

$$k_{\text{geometría}} = \frac{1}{12 \times \left[\frac{1}{3} - 0.21 \frac{h}{b} \times \left(1 - \frac{1}{12} \times \left[\frac{h}{b} \right]^4 \right) \right]} \quad [23]$$

$$k_{\text{geometría}} = \frac{1}{12} \times \left[3 + \frac{h}{b} \right] \times \left[1 + \frac{h}{b} \right] \quad [24]$$

Usando los rangos obtenidos anteriormente para el factor de material, k_{material} y el factor de geometría, $k_{\text{geometría}}$, el factor de rigidez, k , se calculó como el producto de estos dos factores, de acuerdo a la ecuación 5. Los límites inferior y superior de factor de rigidez k fueron obtenidos en la tabla 4, como el producto de los mínimos y máximos valores de ambos factores, respectivamente. La tabla 4 muestra que para las secciones transversales definidas en la tabla 2, las cuales son de uso común en aplicaciones de Ingeniería Civil y Mecánica y construidas en concreto o acero, el factor de rigidez varía en el rango 0.60–1.71.

Tabla 4. Rango de valores del factor de rigidez k para las secciones transversales de la viga en curva listadas en la tabla 2 de la sección 2.8 y construidas en concreto o acero

	Factor de material $k_{\text{material}} = \frac{E}{G}$	Factor de geometría $k_{\text{geometría}} = \frac{I}{J}$	Factor de rigidez $k = k_{\text{geometría}} \times k_{\text{material}}$
Límite	()	()	()
Inferior	2.40	0.25	0.60
Superior	2.60	0.66	1.71

4.2. Influencia del factor de rigidez en los métodos propuesto y convencional

La figura 7 muestra la influencia del factor de rigidez sobre las reacciones de cortante, momento flector y momento torsor en el apoyo izquierdo de la viga en curva, β , calculada usando la ecuación 14 de la sección 2.9. β fue calculado para factores de rigidez $k = 0.5-2$, y para los casos de carga distribuida sobre toda la longitud de la viga en curva y carga puntual. Este rango de k fue asumido de acuerdo con los resultados reportados en la tabla 4 de la

sección 4.1. Las reacciones de cortante, momento flector y momento torsor usadas para calcular β fueron obtenidas con el método convencional Tuma (1988) definido por las ecuaciones 2-8 y para vigas curvas con ángulo central $2\theta = 0^\circ-180^\circ$, radio $r = 1m$, carga uniforme $w = 1 N/m$, y una carga puntual $p = 1 N$ localizada variando desde el apoyo izquierdo cada 0.1 la relación γ . Esta relación γ es definida como el cociente entre el ángulo desde el punto de aplicación de la carga y hasta el apoyo derecho a_2 mostrado en la figura 3b y el ángulo central de la curva 2θ . Debe notarse que los valores en la figura 7 fueron calculados para valores

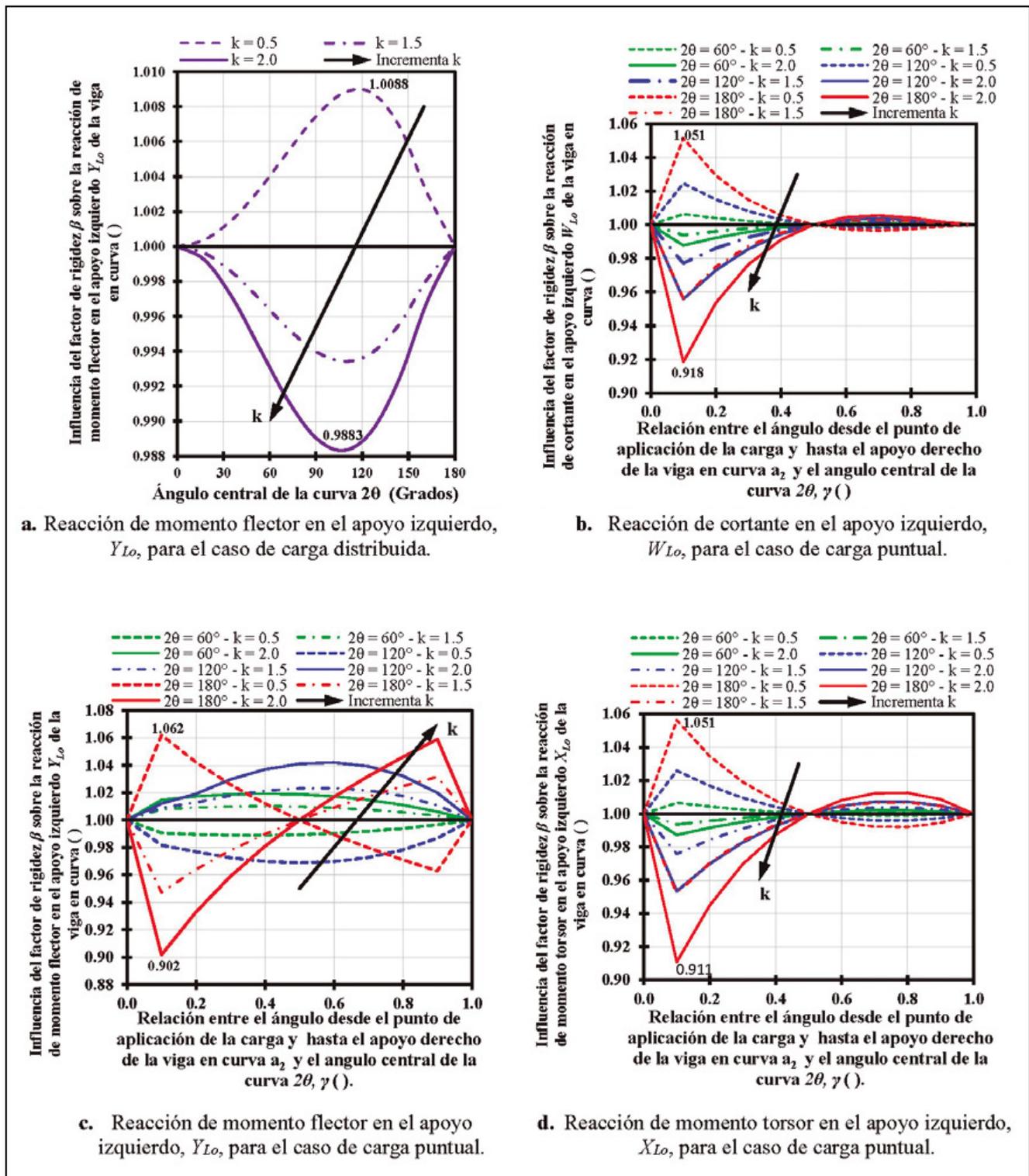


Figura 7. Influencia del factor de rigidez β sobre las reacciones en el apoyo izquierdo de la viga en curva para los casos de carga distribuida y puntual, usando el método convencional (Tuma, 1988).

unitarios de r , p , y w , debido a que al evaluar β como el cociente entre la reacción para un k dado y la reacción para un k unitario, r , p , y w se anulan.

En la figura 7a para el caso de carga distribuida en toda la longitud de la viga en curva, la influencia del factor de rigidez sobre las reacciones β , sólo fue calculada para la reacción de momento flector, debido a que sólo esta reacción es dependiente del factor de rigidez k , como se muestra en las ecuaciones 2-4 en la sección 2.4. La figura 7a muestra que al aumentar k de 0.5 a 2.0, los valores más altos de β redujeron de 1.0088 a 0.9883. Esta máxima reducción de β ocurrió para vigas en curva con ángulos centrales $2\theta = 105^\circ$ - 120° . El cociente entre estos valores más altos de β es de 1.021, indicando que la máxima variación de la reacción de momento flector fue de aproximadamente del 2 %, cuando el factor de rigidez k se incrementó de 0.5 a 2.0. Por tal razón, se puede establecer que, para el caso de vigas en curva con carga distribuida en toda la longitud, la influencia de factor de rigidez k en las reacciones en los apoyos es máximo 2 %.

En las figuras 7b-d para el caso de carga puntual, la influencia del factor de rigidez sobre las reacciones β , fue calculada para las reacciones de cortante, momento flector y momento torsor, debido a que estas tres reacciones son dependientes del factor de rigidez k , como se muestra en las ecuaciones 6-8 en la sección 2.4. Las figuras 7b-d muestran que al aumentar k de 0.5 a 2.0, mientras para las reacciones de cortante y momento torsor, los valores más altos de β se redujeron de 1.051 a 0.918 y de 1.051 a 0.911, respectivamente, para la reacción de momento flector, los valores más altos de β se redujeron de 1.062 a 0.902. Para las tres reacciones, la máxima variación de β ocurrió en vigas curvas con ángulos centrales $2\theta = 180^\circ$ y con una relación $\gamma = 0.1$. El cociente entre los extremos de estos rangos de variación máxima de β son 1.14 para la reacción de cortante y la reacción de momento torsor y 1.18 para la reacción de momento flector. Estos resultados indican que al aumentar k de 0.5 a 2.0, la máxima variación de la reacción de cortante y momento torsor es del 14 % y la máxima variación de la reacción de momento flector es del 18 %. Por tal razón, se puede establecer que, para el caso de vigas en curva con

carga puntual, la influencia de factor de rigidez k en las reacciones en los apoyos es máximo del 18 %.

Los resultados anteriores muestran que en el método convencional definido por Tuma (1988), para el caso de carga distribuida en toda la longitud de la viga en curva y el caso de carga puntual, las reacciones de cortante, momento flector y momento torsor varían como máximo el 18 %, cuando el factor de rigidez k varía de 0.5 a 2.0. Esto indica que, en el método convencional, la influencia del factor de rigidez sobre las reacciones es baja. En el método propuesto descrito en la sección III y para estos mismos casos de carga, las reacciones de la viga en curva no son dependientes del factor de rigidez k , como se puede observar en las ecuaciones 15-20. Este resultado indica que en el método propuesto las reacciones de la viga en curva pueden ser evaluadas sin previo conocimiento de las propiedades geométricas o mecánicas de la sección transversal de la viga curva, lo cual facilita la obtención de las acciones internas de la viga curva para agilizar su proceso de pre-dimensionamiento.

4.3. Comparación entre método propuesto y convencional

Las figuras 8-9 muestran la aproximación del método propuesto al método convencional, A , calculada con la ecuación 13 de la sección 2.6, para las reacciones de cortante, momento flector y momento torsor en el apoyo izquierdo de la viga en curva, y para los casos de carga distribuida sobre toda la longitud y carga puntual. Esta aproximación A fue calculada para vigas en curva con ángulo central $2\theta = 0^\circ$ - 180° , radio $r = 1m$, carga uniforme $w = 1 N/m$, y una carga puntual $p = 1 N$ localizada variando desde el apoyo izquierdo cada 0.1 la relación γ . Esta relación γ es definida como el cociente entre el ángulo desde el punto de aplicación de la carga y hasta el apoyo derecho a_2 mostrado en la figura 3b y el ángulo central de la curva 2θ . Para ambos casos de carga y en el método convencional definido por Tuma (1988), se usó un factor de rigidez $k = 1.0$. Este factor de rigidez k fue asumido unitario por facilidad debido a que

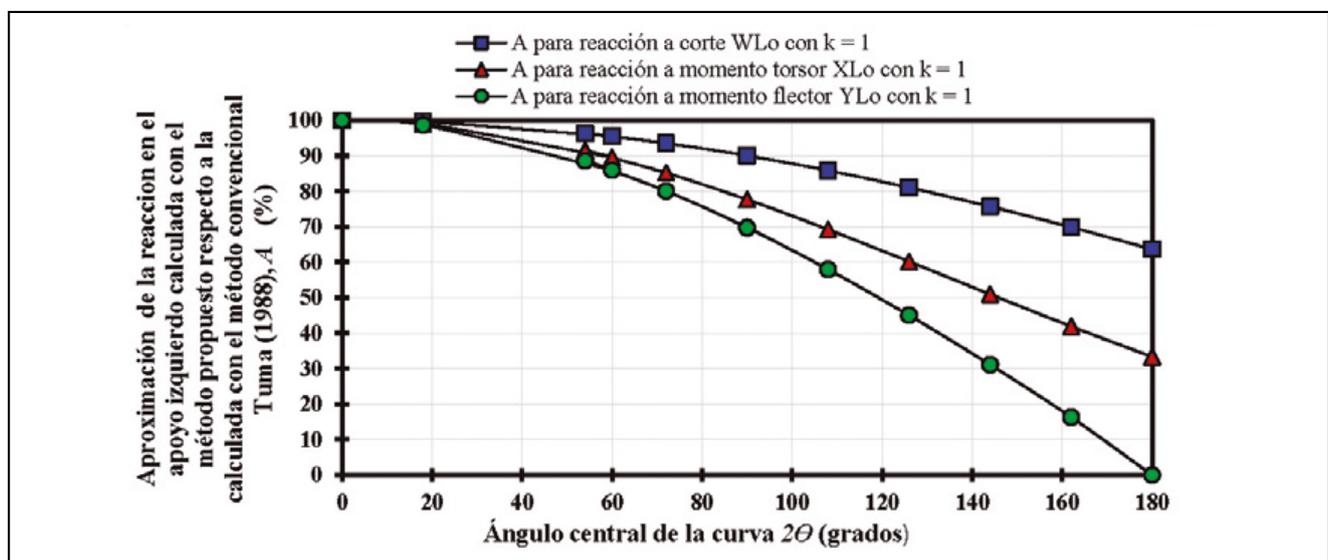
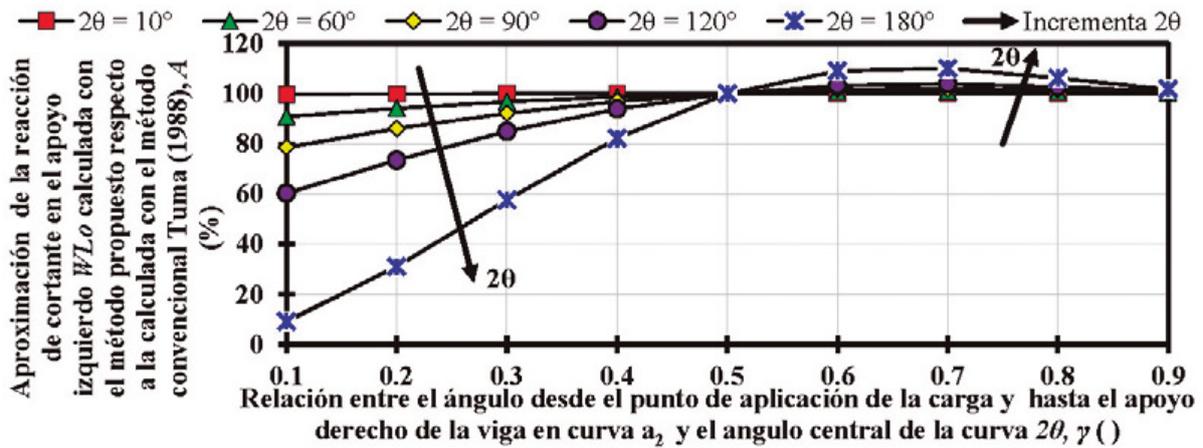
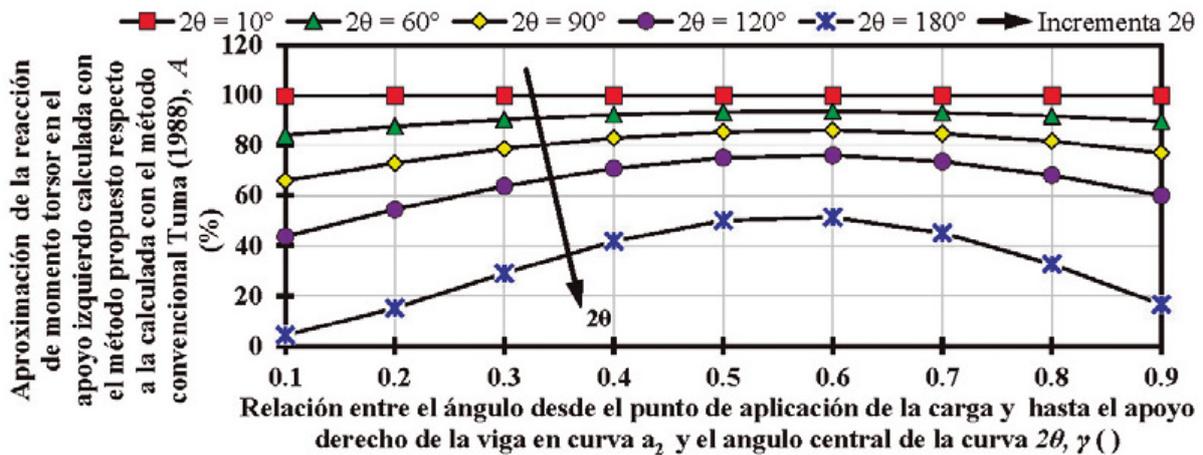


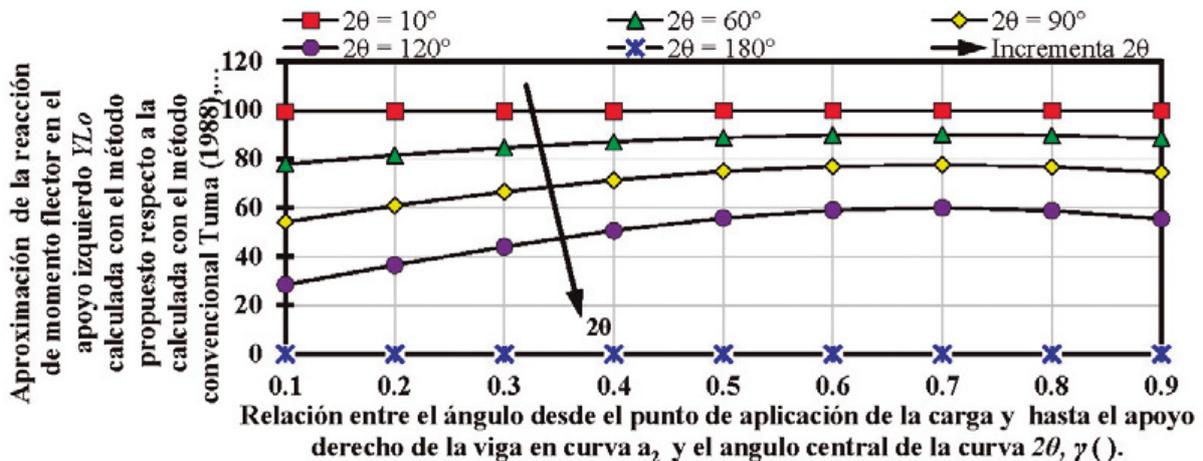
Figura 8. Aproximación del método propuesto al método convencional Tuma (1988), de las reacciones de cortante, momento torsor y momento flector en el apoyo izquierdo para el caso de carga distribuida sobre toda la longitud de la viga en curva.



a. Aproximación A de la reacción de cortante en el apoyo izquierdo WLo .



b. Aproximación A de la reacción de momento torsor en el apoyo izquierdo XLo .



c. Aproximación A de la reacción de momento flector en el apoyo izquierdo YLo .

Figura 9. Aproximación del método propuesto al método convencional Tuma (1988) de las reacciones de cortante, momento torsor y momento flector en el apoyo izquierdo para el caso de carga puntual.

en la sección 4.2 se demostró que, para los dos casos de carga considerados, la dependencia de las reacciones de cortante, momento flector y momento torsor a este factor k es baja cuando k varía entre 0.5 y 2.0. Debe notarse que los valores de A en las figuras 8-9 fueron calculados para valores unitarios de r , w , y p debido a que al evaluar A como el cociente entre las reacciones calculadas por el método propuesto y el método convencional, r , p y w se anulan.

La figuras 8 y 9 muestran la aproximación del método propuesto al convencional, A , en las reacciones de cortante, momento flector y momento torsor en el apoyo izquierdo de la viga en curva, para el caso de carga de carga uniforme sobre toda la longitud y el caso de carga puntual, respectivamente. En ambos casos de carga y para las tres reacciones, la aproximación del método propuesto al convencional A disminuye cuando el ángulo central de la curva 2θ aumenta. Para las reacciones de cortante, momento torsor y momento flector, cuando el ángulo central de la curva 2θ varió entre 0° y 180° , A varió en los rangos 64-100 %, 33-100 % y 0-100 %, respectivamente, para el caso de carga uniforme sobre toda la longitud, como se muestra en la figura 8. Para el caso de carga puntual, A varió en los rangos 9-110 %, 4-100 % y 0-100 %, respectivamente, como se muestra en la figura 9. En ambos casos de carga y en el rango de ángulo central $2\theta = 0^\circ$ - 180° , los mínimos valores de estos rangos de A ocurrieron para $2\theta = 180^\circ$. Estos rangos de valores de A son amplios y los valores más bajos de A son inferiores al 63 %, indicando que el método propuesto no es confiable en el rango total de ángulo central de la viga en curva considerado ($2\theta = 0^\circ$ - 180°).

En las figuras 8 y 9 también se puede observar que cuando el ángulo central varía en el rango $2\theta = 0^\circ$ - 60° , los rangos de valores de A se reducen y los valores más bajos de A son superiores a 77 %. Por ejemplo, para las reacciones de cortante, momento torsor y momento flector, mientras en el caso de carga distribuida sobre toda la longitud, A varió en los rangos 96-100 %, 90-100 % y 86-100 %, respectivamente, y para el caso de carga puntual, A varió en los rangos 91-100 %, 84-100 %, 78-100 %, respectivamente. Estos resultados indican que para vigas curvas con ángulo central $2\theta = 0^\circ$ - 60° , el método propuesto predice con buena aproximación las tres reacciones en ambos casos de carga, indicando por tanto que en este rango de ángulo central, el método propuesto es confiable para ambos casos de carga.

4.4. Aplicaciones y limitaciones del método propuesto

La sección III muestra que el método propuesto es más sencillo y rápido que el método convencional (Tuma, 1988). Esto es debido a que las ecuaciones de las reacciones de la viga en curva obtenidas para el método propuesto usan menos variables, son cortas, no requieren conocimiento previo del material ni de la geometría de la sección transversal y son similares a las usadas en el análisis de vigas rectas. Estas ventajas permiten que el método propuesto sea de fácil adopción y aplicación. El método propuesto predice las reacciones para ángulos centrales de curvas 0° - 60° con aproximaciones del 77 %-105 %. Sin embargo, para ángulos centrales de curvas entre 60° - 180° los resultados

no son confiables. El método propuesto puede aplicarse como herramienta para el pre-dimensionamiento de vigas en curva circulares, en donde la obtención rápida de los diagramas de cortante, momento flector, y momento torsor, es requerida como información básica para obtener una primera aproximación a las dimensiones de la sección transversal de la viga en curva. El método propuesto no puede usarse para el cálculo de deflexiones de la viga en curva, debido a que las deflexiones son sensibles al factor de rigidez.

Aunque el método propuesto fue validado numéricamente para vigas en curva empotrada-empotrada de acero y concreto, con las secciones de mayor aplicación estructural; para aplicaciones prácticas, este método puede usarse en cualquier tipo de material y sección transversal, siempre y cuando el análisis sea elástico, el factor de rigidez varíe entre 0.5-2 y la sección transversal no sea propensa a sufrir distorsión o alabeo. A futuro el método propuesto puede expandirse a otros casos de carga, al análisis de vigas en curva continuas y al análisis matricial de vigas en curva. Estas expansiones podrían validarse numéricamente con resultados desde paquetes computacionales.

5. CONCLUSIONES

Este artículo propone un método para el análisis de vigas en curva circulares usando elementos rectos de parrilla en la cuerda de la curva. El método propuesto fue validado usando un método convencional para el análisis de vigas en curva. Se demostró que:

1. Un método para el cálculo de las reacciones de una viga en curva fue propuesto. El método propuesto se basa en calcular las reacciones de un elemento recto de parrilla localizado en la cuerda de la curva, manteniendo los apoyos y las cargas de la viga en curva, y usando las ecuaciones que rigen vigas rectas. El método propuesto se validó analíticamente usando un método convencional de análisis de vigas en curva.
2. El factor de rigidez para vigas en curva con secciones transversales sólidas o huecas y con forma circular, o rectangular, o cuadrada, y construidas en concreto o acero, varía en el rango 0.60-1.71.
3. Las propiedades mecánicas y geométricas de la sección transversal de la viga en curva, expresadas a través del factor de rigidez, influyen el cálculo de las reacciones de la viga en curva hasta el 18 % en el método convencional. En el método propuesto, estas propiedades no tienen ninguna influencia en el cálculo de las reacciones de la viga en curva.
4. El método propuesto predice las reacciones de la viga en curva con aproximaciones de 86 %-100 % y 78 %-100 %, respecto al método convencional y para los casos de carga distribuida y carga puntual, respectivamente. Estas aproximaciones fueron obtenidas para vigas en curva empotradas en ambos extremos y con ángulos centrales menores o iguales a 60° .
5. El método propuesto puede usarse para la obtención rápida de los diagramas de cortante, momento torsor y momento flector, los cuales permiten pre-dimensionar la sección transversal de la viga en curva.

Las ecuaciones que rigen el método propuesto son cortas, no requieren conocimiento previo del material, ni de la geometría de la sección transversal y son similares a las usadas en el análisis de vigas rectas. Sin embargo, estas ecuaciones solo son confiables para vigas en curva con ángulos centrales entre 0°-60°, que se comparten elásticamente y que no sean susceptibles de distorsión o alabeo.

6. REFERENCIAS

- Ali, A.Y., y Hemzah, S.A. (2014). Nonlinear Analysis for Behavior of R.C. Horizontally Semicircular Curved Beams with Openings and Strengthened by CFRP Laminates. *International Journal of Scientific & Technology Research*, 3(8): pp. 136-145.
- American Institute of Steel Construction Inc. (2005). *Steel Construction Manual* (13th ed.). Chicago (IL/USA): AISC.
- Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (2010). *Reglamento Colombiano de Construcción Sismo-Resistente NSR-10*. Bogotá, DC: Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial (Gobierno de Colombia).
- Buckner Moorman, R.B. (1937). *Stresses in the curved beam under loads normal to the plane of its axis*. (PhD Thesis–Major Subject Structural Engineering). Iowa State University.
- Chanchí Golondrino, J.C. (2001). *Análisis y Diseño de Puentes Curvos en Viga Cajón Reforzada*. (Tesis de maestría no publicada). Bogotá, DC: Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental-Universidad de los Andes.
- Excel Douglas, A. (2018). Analysis of Curved Beams. *International Journal of Civil and Structural Engineering Research*, 6(1): pp. 114-123.
- Gendy, A.S., y Saleeb, A.F. (1992). On The Finite Element Analysis of the Spatial Response of Curved Beams with Arbitrary Thin-Wallet Sections. *Computers & Structures*, 44(3): pp. 639–652.
- Hall, D.H., Grubb, M.A., y Yoo, C.H. (1999). *Improved Design Specifications for Horizontally Curved Steel Girder Highway Bridges*. Washington, DC: National Academy Press.
- Hurtado Gómez, J.E. (2013). *Análisis matricial de estructuras*. Manizales (Colombia): Universidad Nacional de Colombia.
- Komendant, A.E. (1972). *Contemporary Concrete Structures*. New York: McGraw-Hill.
- Tuma, J.J. (1988). *Handbook of Structural and Mechanical Matrices* (1st ed.). New York: McGraw-Hill.
- Upadhyay, H., Rao, N., y Desai, P. (2018). Direct Stiffness Method for a Curved Beam and Analysis of a Curved Beam Using SAP. *Interwoven: An Interdisciplinary Journal of Navrachana University*, 2(1): pp. 1-10.
- Weissman, H.A. (1970). Straight-Element Grid Analysis of Horizontally Curved Beam Systems. *Engineering Journal*, 7(2): pp. 41-49.
- Wong, Y.C. (1970). *Horizontally Curved Beam Analysis and Design*. (Thesis for the Master of Science in Structural Engineering). Oregon State University.
- Yang, Y.B., ASCE, A.M., y Kuo S.R. (1987). Effect of Curvature on Stability of Curved Beams. *Journal of Structural Engineering*, 113(6): pp. 1185-1202.
- Yoda, T. (1985). Validity and Accuracy of Straight Beam Element Approximation for the Analysis of Curved Beams. *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 171-178.
- Young, W.C., y Budynas, R.G. (2002). *Roark's Formulas for Stress and Strain* (7th ed.). New York: McGraw-Hill.