

Flexión unidimensional

Unidimensional Bending

Vitto Baracco Dávila^{1*}

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo desarrollar la teoría de la flexión de un elemento unidimensional basándose en una descripción detallada de los desplazamientos, que permita cumplir con las ecuaciones de equilibrio interno.

Palabras clave: deformación, flexión, vigas, corte, tensiones en vigas.

Abstract

The present work aims to develop the flexural theory of a one-dimensional element based on a detailed description of the displacements, which allows to comply with the internal equilibrium equations.

Keywords: deformation, bending, beams, shear, stresses in beams.

1. INTRODUCCIÓN

El entendimiento de las deformaciones ocasionadas por la flexión nos permite describir el estado de esfuerzos de un elemento, logrando predicciones sobre su comportamiento y resistencia, con lo cual nos permite proyectar elementos estructurales que cumplan con nuestras necesidades. Por ello, la teoría de flexión, junto con un vasto conjunto de conocimientos, nos permite diseñar y construir elementos importantísimos, que han moldeado las civilizaciones modernas. Con el paso del tiempo, las edificaciones cada vez han tenido mayor relevancia en nuestro desarrollo, llevando con ello al desafío constante de las teorías en las cuales se soporta el diseño de las mismas. Por ello, es fácil notar que bajo cierto rango determinado por la relación entre el peralte y la longitud del elemento, la teoría de flexión no logra describir o incluir en un mismo marco teórico los fenómenos observados como el caso de vigas pared o cables. Para poder dar solución a estos elementos, los ingenieros hacen uso de formulaciones empíricas, de manera que permitan obtener un margen de seguridad de los elementos para los cuales la teoría de flexión no permite obtener un estado de esfuerzos. Por ello, es importante seguir indagando sobre el verdadero comportamiento de la flexión, a fin de mejorar la predictibilidad de los fenómenos que suceden bajo este tipo de sollicitud.

2. RESEÑA HISTÓRICA

A lo largo de la historia, el fenómeno de la flexión ha sido estudiado por muchos pensadores. Muestra de ellos es que en el siglo XV Leonardo di ser Piero da Vinci (1452-1519) realizó las primeras observaciones sobre la deformación que conlleva una cara cuando de ella se cuelgan pesos a distintas

distancias de sus apoyos. Con el advenimiento del cálculo descubierto por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y posteriormente sintetizado y completado por Georg Friedrich Bernhard Reimann (1826-1866) las observaciones y entendimiento sobre este efecto pudieron ampliarse notablemente. No obstante, en el siglo XVIII Leonhardt Paul Euler (1707-1783) y Daniel Bernoulli (1700-1782) desarrollaron en conjunto lo que podemos considerar como los fundamentos de la teoría de la flexión. Sin embargo, es Claude-Louis Henri Navier (1785-1836) el que logra sintetizar en un mismo marco teórico las observaciones y conocimientos sobre este fenómeno resultando en lo que conocemos actualmente como teoría de flexión o la teoría Euler-Bernoulli-Navier. En 1921 Stephen Timoshenko (1878-1972) propone agregar a la teoría de flexión los efectos debidos a las tensiones cortantes, siendo ello una primera observación sobre los postulados de la teoría. En 1981, Levinson propone que el desplazamiento sobre el eje longitudinal del elemento no es constante a lo largo del peralte del elemento. El desplazamiento propuesto por Levinson se muestra a continuación:

$$\delta_x = -z\varphi_{xz} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \varphi_{xz} \right)$$

$$\delta_z = w_z$$

Siendo φ_{xz} un ángulo adicional debido a la acción de las tensiones cortantes propuesto por Timoshenko. En 1984, Reddy y posteriormente Shi-Voyiadjis en 2007, desarrollan planteamientos similares a Levinson, utilizando aproximaciones polinómicas, funciones trigonométricas e hiperbólicas, con el objetivo de refinar las aproximaciones del corte que sufre el elemento.

3. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

La teoría de la elasticidad es la rama de la mecánica de sólidos deformables que describe como un sólido se mueve

* Mail: vittobaracco@gmail.com

¹ Bachiller en Ingeniería Civil. Universidad Ricardo Palma, Lima (Perú).

y deforma como respuesta de fuerzas externas, considerando que las deformaciones son termodinámicamente reversibles. Esta teoría se basa en tres postulados, los cuales nos permiten relacionar los desplazamientos que sufre el elemento con los esfuerzos y las características mecánicas del cuerpo.

3.1. Deformaciones

Definamos la deformación como el cambio infinitesimal de desplazamientos pequeños con relación a las dimensiones del mismo. Por ello, las deformaciones que sufre un elemento debido a desplazamientos externos pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \quad (1.1a) \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \quad (1.1d)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial \delta_y}{\partial y} \quad (1.1b) \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \delta_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta_z}{\partial x} \quad (1.1e)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \quad (1.1c) \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \delta_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta_z}{\partial y} \quad (1.1f)$$

Siendo $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ los desplazamientos del elemento en los ejes x, y, z , respectivamente.

3.2. Ecuaciones constitutivas de Lamé-Hooke

Robert Hooke (1635-1703) y de Gabriel Lamé (1795-1870), mediante sus trabajos sobre elasticidad, relacionaron las deformaciones con los esfuerzos de elementos homogéneos isotrópicos (mismas características mecánicas en todas sus direcciones) mediante las siguientes ecuaciones:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - u(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \quad (1.2a)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - u(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \quad (1.2b)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - u(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \quad (1.2c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1+u}{E} \sigma_{xy} \quad (1.2d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1+u}{E} \sigma_{xz} \quad (1.2e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1+u}{E} \sigma_{yz} \quad (1.2f)$$

O expresado a través de las deformaciones:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+u)(1-2u)} \left((1-u)\epsilon_{xx} + u(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right) \quad (1.3a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+u)(1-2u)} \left((1-u)\epsilon_{yy} + u(\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}) \right) \quad (1.3b)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+u)(1-2u)} \left((1-u)\epsilon_{zz} + u(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right) \quad (1.3c)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+u} \gamma_{xy} \quad (1.3d)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1+u} \gamma_{xz} \quad (1.3e)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{1+u} \gamma_{yz} \quad (1.3f)$$

3.3. Ecuaciones de Equilibrio Interno

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) desarrolla la teoría de equilibrio infinitesimal, la cual indica que los esfuerzos de un elemento se encuentran en un estado de equilibrio cuando las deformaciones que sufre el elemento son constantes en el tiempo, las cuales se relacionan mediante las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (1.4a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (1.4b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \quad (1.4c)$$

En donde b_x, b_y y b_z representan fuerzas ocasionadas por campos externos. Así el problema de hallar las deformaciones de un elemento isotrópico, sometido a desplazamientos pequeños, implica el cumplimiento de las seis ecuaciones indicadas en (1.1), las seis indicadas en (1.3) y las tres consideradas en (1.4). Si incluimos las ecuaciones (1.1) en (1.3) considerando $D = \frac{E}{(1+u)(1-2u)}$ obtenemos las siguientes relaciones:

$$\sigma_{xx} = D \left((1-u) \frac{\partial \delta_x}{\partial x} + u \left(\frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \right) \right) \quad (1.5a)$$

$$\sigma_{yy} = D \left((1-u) \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + u \left(\frac{\partial \delta_z}{\partial z} + \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \right) \right) \quad (1.5b)$$

$$\sigma_{zz} = D \left((1-u) \frac{\partial \delta_z}{\partial z} + u \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} \right) \right) \quad (1.5c)$$

$$\sigma_{xy} = D(1-2u) \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right) \quad (1.5d)$$

$$\sigma_{xz} = D(1-2u) \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta_z}{\partial x} \right) \quad (1.5e)$$

$$\sigma_{yz} = D(1-2u) \left(\frac{\partial \delta_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta_z}{\partial y} \right) \quad (1.5f)$$

Si incluimos las ecuaciones (1.5) en (1.4), obtenemos lo siguiente:

$$D(1-u) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \right) + D(1-2u) \left(\frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial z^2} \right) + b_x = 0 \quad (1.6a)$$

$$D(1-u) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \right) + D(1-2u) \left(\frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial z^2} \right) + b_y = 0 \quad (1.6b)$$

$$D(1-u) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \right) + D(1-2u) \left(\frac{\partial^2 \delta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial y^2} \right) + b_z = 0 \quad (1.6c)$$

Las ecuaciones (1.6) nos muestran las relaciones que deben de existir entre los desplazamientos. Sin embargo, las ecuaciones (1.6) no son sencillas de resolver debido a que no conocemos a priori cuales son los desplazamientos que sufre el elemento ante la presencia de una carga. Para simplificar el problema, consideremos que el término común de las ecuaciones (1.6) es nulo, que equivale a indicar que:

$$\frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

O expresado a través de las deformaciones descritas en las ecuaciones (1.1a), (1.1b) y (1.c):

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = 0 \quad (1.8)$$

Si consideramos la ecuación (1.8), las ecuaciones (1.6) se simplifican en:

$$\frac{\partial^2 \delta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial z^2} + \frac{b_x}{D(1-2u)} = 0 \quad (1.9a)$$

$$\frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial z^2} + \frac{b_y}{D(1-2u)} = 0 \quad (1.9b)$$

$$\frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial y^2} + \frac{b_z}{D(1-2u)} = 0 \quad (1.9c)$$

Las ecuaciones (1.9) nos dicen que los desplazamientos son funciones de las segundas derivadas con respecto a los ejes ortogonales y de la fuerza perpendicular ocasionada por un campo externo. Consideremos que sobre el elemento actúa únicamente fuerzas en la dirección z , expresando esto como $b_x = b_y = 0$ y..., con lo cual las ecuaciones (1.9) se reducen a:

$$\frac{\partial^2 \delta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_x}{\partial z^2} = 0 \quad (1.10a)$$

$$\frac{\partial^2 \delta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_y}{\partial z^2} = 0 \quad (1.10b)$$

$$\frac{\partial^2 \delta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_z}{\partial y^2} = -\frac{b_z}{D(1-2u)} \quad (1.10c)$$

La ecuación (1.10a) y la ecuación (1.10b) se puede entender como una condición de curvatura nula sobre el plano yz y xz , respectivamente, ante la aplicación de un desplazamiento perpendicular a dichos planos. Sin embargo la ecuación (1.10c) nos indica que la curvatura sobre el plano xy puede no ser constante y a su vez depende de las características mecánicas del objeto.

4. OBSERVACIÓN A LA TEORÍA DE FLEXIÓN CLÁSICA

La teoría de flexión utiliza tres hipótesis simplificadas. La primera de ellas indica que posterior a la deformación, las secciones transversales normales al eje del elemento

permanecen planas y ortogonales a dicho eje. La segunda hipótesis indica que los desplazamientos son pequeñas en comparación con las dimensiones del elemento. Por último, la tercera hipótesis indica que las características mecánicas del elemento son constantes e independiente de la posición y dirección por la cual se midan.

La segunda y tercera hipótesis, corresponden a las simplificaciones propias que se realiza para la descripción de las deformaciones. Sin embargo la primera hipótesis, corresponde a una simplificación del problema, el cual nos permite aproximar los desplazamientos según la teoría clásica de flexión.

Ante la aplicación de una carga perpendicular al elemento, este sufrirá un desplazamiento debido a momentos y cortantes conocidos. Denominemos w_z a la deformación central que sufre el elemento debido a estas acciones.

Se puede observar que w_z varía a lo largo del elemento, por lo cual, el ángulo del elemento deformado no es constante. Dado que la teoría de elasticidad utilizada refiere que w_z es pequeño con relación a L , podemos aproximar dicho ángulo como la derivada de w_z con respecto a x o $\frac{\partial w_z}{\partial x}$.

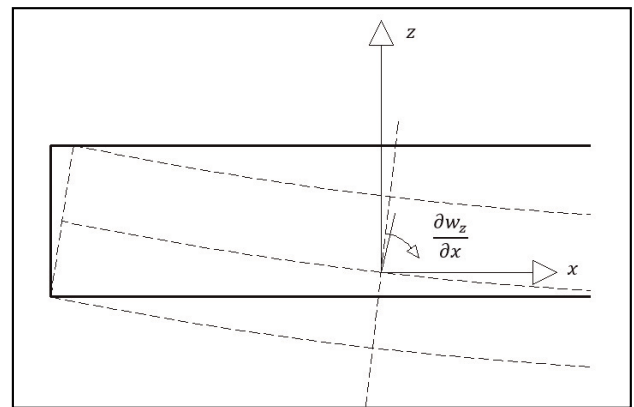


Figura 1. Aproximación de la pendiente del elemento y ubicación de coordenadas en el elemento deformado.

La teoría de flexión aproxima las deformaciones considerando que una sección plana antes de la deformación se mantiene plana posterior a la deformación. Esto indica que la sección sufre un desplazamiento adicional perpendicular a su sección, y que el mismo se encuentra relacionado por el ángulo ocasionado y por la distancia del punto de análisis al centro del elemento (véase figura 1). Así, los desplazamientos que sufre el elemento se pueden aproximar a través de las siguientes ecuaciones:

$$\delta_x = -z \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \quad (2.1a)$$

$$\delta_y = 0 \quad (2.1b)$$

$$\delta_y = w_z \quad (2.1c)$$

Descritos los desplazamientos, la ecuación (1.1) nos permite hallar las deformaciones, resultando en:

$$\epsilon_{xx} = -z \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (2.2a) \quad \epsilon_{xy} = 0 \quad (2.2d)$$

$$\epsilon_{yy} = 0 \quad (2.2b) \quad \epsilon_{xz} = 0 \quad (2.2e)$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad (2.2c) \quad \epsilon_{yz} = 0 \quad (2.2f)$$

Los esfuerzos que generan los desplazamientos descritos en (2.1) se pueden hallar reemplazando estos términos de las ecuaciones (2.2) en (1.5), obteniendo lo siguiente:

$$\sigma_{xx} = -zD(1-u) \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (2.3a) \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (2.3d)$$

$$\sigma_{yy} = -zDu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (2.3b) \quad \sigma_{xz} = 0 \quad (2.3e)$$

$$\sigma_{zz} = -zDu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (2.3c) \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (2.3f)$$

Ahora introduzcamos las ecuaciones (2.3) en (1.4):

$$-zD(1-u) \left(\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Dado que las relaciones materiales no pueden ser nulas, la ecuación (2.4) solo puede cumplirse si indicamos que la tercera derivada del desplazamiento perpendicular del elemento con respecto al eje de su generatriz es nula, o lo mismo que:

$$\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} = 0 \quad (2.5)$$

Los esfuerzos que sufre el elemento deben de ser capaces de asegurar un estado de equilibrio con relación a las fuerzas externas que se aplican, esto en observancia que el elemento se encuentra en un estado de reposo (o que el mismo no es dependiente del tiempo). Por ello, el momento interno generado por los esfuerzos debe de ser igual al momento externo. Esta igualdad queda reflejada en la siguiente relación:

$$M_y = \iint z \sigma_{xx} dA = -D(1-u) \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \iint z^2 dydz \quad (2.6)$$

En donde $D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Por definición w_z se encuentra aplicado sobre el centro del elemento. Si consideramos que la sección del elemento posee un peralte h y un espesor b , la sección se encuentra definida entre los bordes $-b/2 + b/2$ en el eje "y", y $-h/2 + h/2$ en el eje "z", conduciendo que la ecuación (2.6) sea una integral definida, cuya solución es la siguiente:

$$M_y = -D(1-u) \frac{bh^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (2.7)$$

Dado que M_y es parte de los datos iniciales del problema, es factible indicar que el desplazamiento del elemento se encuentra determinado por:

$$\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{K} \quad (2.8)$$

En donde $K = D(1-u) \left(\frac{bh^3}{12} \right)$

Con la ecuación (2.8), nos es factible hallar cuál es la tercera derivada del desplazamiento con relación a y compararla con la ecuación (2.5):

$$\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} = -\frac{1}{K} \left(\frac{dM_y}{dx} \right) = 0 \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9), nos indica que la teoría de flexión es válida (o bien se encuentra fundamentada en la teoría de elasticidad) solo para aquellos campos de fuerzas externas

y perpendiculares aplicadas sobre el elemento, tal que generen un momento constante a lo largo de la misma. Por ello, la teoría de flexión necesita ser revisada ya que los desplazamientos planteados inicialmente permiten la solución, teóricamente conforme a la teoría de elasticidad, de un grupo muy limitado de problemas, siendo la mayoría de problemas prácticos aquellos en el cual la deformación puede tomar formas solo limitadas por las condiciones de apoyo.

5. DESARROLLO FLEXIÓN UNIDIMENSIONAL

Para el desarrollo de esta formulación partamos de las siguientes hipótesis simplificadoras:

1. La deformación volumétrica del cuerpo es nula. Esta hipótesis nos permite simplificar el problema elástico.
2. Los desplazamientos que sufre el elemento debido a cargas externas son pequeños en comparación con las dimensiones del objeto. Esto nos permite aproximar la pendiente del elemento como la derivada del desplazamiento en x , así como el uso de la definición de las deformaciones dadas por la teoría de la elasticidad y mostradas mediante las ecuaciones (1.1).
3. El elemento está conformado por un material homogéneo isotrópico, pudiendo con ello indicar que las características mecánicas que muestra el objeto son independientes de la posición y dirección por el cual se midan.

Ahora consideremos un elemento de longitud L y de sección $h \times b$, el cual se encuentra sometido a un desplazamiento desconocido w_z aplicado en el centro del elemento y que a su vez este elemento no sufre desplazamientos en el eje y (véase figura 2).

Definamos una función $w_z = w_z(x)$, la cual representa

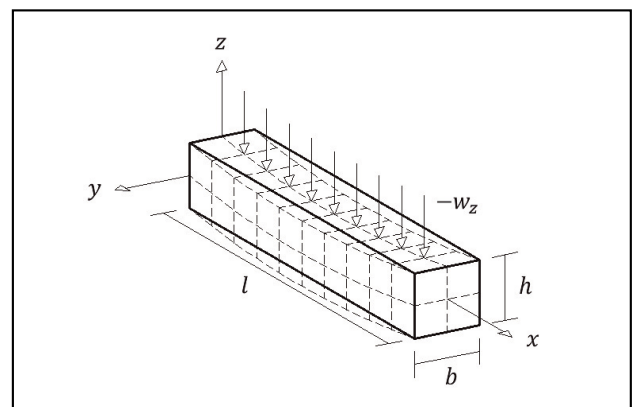


Figura 2. Ejes, medidas y desplazamiento w_z .

el desplazamiento que sufre el punto medio del elemento y una función $a_z = a_z(z)$ que nos permita aproximar los desplazamientos restantes en la sección. Con la utilización de estas funciones describimos los desplazamientos que genera la flexión de la siguiente manera:

$$\delta_x = -\frac{\partial a_z}{\partial z} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \quad (3.1a)$$

$$\delta_y = 0 \quad (3.1b)$$

$$\delta_z = w_z + a_z \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.1c)$$

La descripción de los desplazamientos mostrada en (3.1) cumple con la primera hipótesis, dado que:

$$\frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} = -\frac{\partial a_z}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial a_z}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.2)$$

El cumplimiento de la segunda hipótesis se logra a través de la aplicación de las ecuaciones (1.1), lo que resulta para los desplazamientos propuestos las siguientes relaciones:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\partial a_z}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.3a)$$

$$\epsilon_{yy} = 0 \quad (3.3b)$$

$$\epsilon_{zz} = +\frac{\partial a_z}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.3c)$$

$$\gamma_{xy} = 0 \quad (3.3d)$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + a_z \left(\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} \right) \quad (3.3e)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (3.3f)$$

Para cumplir la tercera hipótesis, solo bastaría con definir los esfuerzos internos mediante las ecuaciones dadas por la teoría de la elasticidad a través de las ecuaciones (1.3), resultando en:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+u} \left(-\frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.4a)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (3.4b)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+u} \left(+\frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.4c)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (3.4d)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1+u} \left(\left(1 - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + a_z \left(\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} \right) \right) \quad (3.4e)$$

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (3.4f)$$

Para asegurar que el elemento se encuentre en un equilibrio estático, es necesario que los esfuerzos mostrados en (3.4) cumplan con la condición de equilibrio mostrada en (1.4). Incluimos los esfuerzos (3.4) en la ecuación de equilibrio (1.4) con $b_x = b_y = 0$:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{E}{1+u} \left(-\frac{\partial^3 a_z}{\partial z^3} \right) \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (3.5b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = \frac{E}{1+u} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + a_z \left(\frac{\partial^4 w_z}{\partial x^4} \right) \right) + b_z = 0 \quad (3.5c)$$

La ecuación (3.5a) nos indica que, para cualquier forma que adopte w_z , el equilibrio en el eje x se cumple si a_z es una función de segundo orden. Por tanto, definimos la función a_z como:

$$a_z = \alpha \frac{z^2}{2} + \beta z + \gamma \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5b) nos muestra que el equilibrio en el eje y queda satisfecho ante cualquier valor que puedan adoptar los desplazamientos. Esto es debido a que se planteó el problema considerando que el desplazamiento en esa dirección es nulo. Sin embargo la ecuación (3.5c) nos indica que a la aplicación de un desplazamiento w_z genera un campo opositor que asegura la estabilidad. Si consideramos que b_z representa la variación del peso del elemento, el desplazamiento w_z generará un reordenamiento de las partículas dentro del sólido, manifestándose en incrementos locales de la densidad, de forma de que esta variación permita asegurar la estabilidad del conjunto.

Sabemos que sobre el elemento actúan fuerzas externas, las cuales ocasionan deformaciones. Estas deformaciones generan, a su vez, esfuerzos internos, la sumatoria de los cuales debe equilibrar las fuerzas externas para asegurar un estado estático. Por tanto, conociendo los esfuerzos mostrados en (3.5), obtenemos las fuerzas asociadas a estos mediante la integración sobre la sección del elemento, resultando:

$$P_{xx} = \int \sigma_{xx} dA = -\frac{Eb}{1+u} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \int \frac{\partial a_z}{\partial z} dz \quad (3.7a)$$

$$M_{xz} = \int z \sigma_{xz} dA = -\frac{Eb}{1+u} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \int z \frac{\partial a_z}{\partial z} dz \quad (3.7b)$$

$$V_{xz} = \int \sigma_{xz} dA = \frac{Eb}{1+u} \int \left(\left(1 - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + a_z \left(\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} \right) \right) dz \quad (3.7c)$$

Si consideramos que sobre el elemento actúan únicamente momentos y cortantes, considerando la relación conocida que existe entre ellos, obtenemos las siguientes igualdades:

$$V_{xz} - \frac{\partial M_{xz}}{\partial x} = \frac{Eb}{1+u} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \int \left(1 - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) dz + \left(\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} \right) \int \left(a_z + z \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dz \right) = 0 \quad (3.8a)$$

$$P_{xx} = -\frac{Eb}{1+u} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \int \frac{\partial a_z}{\partial z} dz = 0 \quad (3.8b)$$

De las relaciones (3.8) notamos que tienen solución independiente de si cumple con las siguientes características:

$$\int \left(1 - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) dz = 0 \quad \int \left(a_z + z \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dz = 0 \quad \int \frac{\partial a_z}{\partial z} dz = 0$$

Dado que la ecuación (3.6) muestra que para que se cumpla el equilibrio $a_z = \alpha \frac{z^2}{2} + \beta z + \gamma$:

$$\int \left(1 - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) dz = 0 \rightarrow 1 - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} = 1 \rightarrow \alpha = 1 \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = z + \beta \rightarrow \int \frac{\partial a_z}{\partial z} dz = \frac{z^2}{2} + \beta z \quad (3.9b)$$

$$\int \left(a_z + z \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dz = \int \left(\frac{3z^2}{2} + 2\beta z + \gamma \right) dz = \frac{z^3}{2} + \beta z^2 + \gamma z \quad (3.9c)$$

Utilizando las relaciones (3.9) en una sección definida entre $-h/2$ a $+h/2$ en el eje z , y $-b/2$ a $+b/2$ en el eje y , concluimos que la función a_z es:

$$a_z = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (3.10)$$

Con la función hallada, los desplazamientos propuestos cumplen con las hipótesis simplificadoras y a su vez con la teoría de la elasticidad, siendo estos los que se muestran a continuación:

$$\delta_x = -z \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \quad (3.11a)$$

$$\delta_y = 0 \quad (3.11b)$$

$$\delta_z = w_z + \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.11c)$$

Habiendo hallado el valor de a_z , el problema de la flexión se soluciona si determinamos el valor w_z tal que cumpla con las condiciones de contorno del elemento y a su vez que se encuentren relacionadas con el conjunto de fuerzas que se le aplica al elemento. Para ello, primero determinamos la relación existente entre w_z y las cargas externas. Conociendo a_z , hallamos el valor del momento y cortante, el cual resulta en:

$$M_{xz} = -\frac{Eb}{1+u} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \int z \frac{\partial a_z}{\partial z} dz = -\frac{EI}{1+u} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \quad (3.12a)$$

$$V_{xz} = -\frac{EI}{1+u} \left(\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} \right) \quad (3.12b)$$

Siendo $l = \frac{bh^3}{12}$

Imaginemos que el elemento se encuentra simplemente apoyado en ambos extremos (equivalente a indicar que su desplazamiento δ_z en sus extremos es nulo, y a su vez indicar que los momentos en estos puntos también son nulos). Definamos un elemento de longitud l y aplicamos sobre él una carga constante q . El cortante y momento que genera esta carga se expresaría de la siguiente forma:

$$V = q \left(x - \frac{l}{2} \right) \quad (3.13a)$$

$$M = q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l}{2} \right) \quad (3.13b)$$

Sabemos que las fuerzas externas deben de igualarse con las fuerzas internas, de manera que la relación entre ambas puede expresarse de la siguiente forma:

$$V + V_{xz} = 0 \quad (3.13c)$$

$$M + M_{zz} = 0 \quad (3.13d)$$

Igualamos la expresión (3.13a) con la (3.12b) tomando en consideración la ecuación (3.13c), resultando:

$$V + V_{xz} = q \left(x - \frac{l}{2} \right) - \frac{EI}{1+u} \left(\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} \right) = 0$$

Con lo cual, podemos hallar w_z :

$$\frac{\partial^3 w_z}{\partial x^3} = q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} = q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l}{2} + \alpha \right) \quad (3.14)$$

Sabemos a través de la ecuación (3.12a) que el momento de la sección puede ser expresada a través de los desplazamientos de la siguiente forma:

$$M_{xz} = -\frac{EI}{1+u} \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} = -\left(\frac{1+u}{EI} \right) M_{xz} \quad (3.15)$$

Si incluimos en la ecuación (3.13d) la ecuación (3.13b), el valor del momento de la ecuación (3.12a), habiendo sustituido en esa ecuación el valor de $\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}$ mostrado en (3.14), obtenemos:

$$q \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l}{2} \right) - \frac{EI}{1+u} \left(q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l}{2} + \alpha \right) \right) = 0 \quad (3.16)$$

Podemos concluir que $\alpha = 0$

Desarrollando las integraciones sucesivas de la ecuación (3.14) considerando $\alpha = 0$ llegamos a:

$$w_z = q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3 l}{12} + \beta x + \zeta \right) \quad (3.17)$$

Siendo β, ζ coeficientes de integración. La expresión (3.17) debe ser tal que satisfaga las condiciones de contorno impuestas al problema, quiere decir, que el desplazamiento δ_z en el centro del elemento sea nulo en $x = 0$ y $x = l$. Por tanto, si incluimos (3.17) en (3.11c) y evaluamos en estos puntos, obtenemos:

$$\delta_z = q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3 l}{12} + \beta x + \zeta \right) + \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l}{2} \right) \right)$$

$$\delta_{z(x=0, z=0)} = q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \zeta = 0 \rightarrow \zeta = 0 \quad (3.18a)$$

$$\delta_{z(x=l, z=0)} = q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(-\frac{l^4}{24} + \beta l \right) = 0 \rightarrow \beta = \frac{l^3}{24} \quad (3.18b)$$

Usando las expresiones halladas en (3.18a) y (3.18b), w_z se expresa de la siguiente forma:

$$w_z = q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3 l}{12} + \frac{x l^3}{24} \right) \quad (3.19)$$

Si incluimos (3.19) en (3.11) obtenemos los desplazamientos de un elemento simplemente apoyado en ambos extremos, sometido a una carga constante.

$$\delta_x = -z q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 l}{4} + \frac{l^3}{24} \right) \quad (3.20)$$

$$\delta_y = 0 \quad (3.20)$$

$$\delta_z = q \left(\frac{1+u}{EI} \right) \left(\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3 l}{12} + \frac{x l^3}{24} \right) + \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l}{2} \right) \right) \quad (3.20)$$

Obtenidos los desplazamientos, a través de las ecuaciones (3.4) obtenemos los esfuerzos:

$$\sigma_{xx} = -\frac{qz}{I} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l}{2} \right) \quad (3.21a)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (3.21b)$$

$$\sigma_{zz} = +\frac{qz}{I} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x l}{2} \right) \quad (3.21c)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (3.21d)$$

$$\sigma_{xz} = +\frac{q}{2I} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left(x - \frac{l}{2} \right) \quad (3.21e)$$

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (3.21f)$$

6. CONCLUSIONES

1. La formulación nos permite derivar el estado de esfuerzos a través de los desplazamientos y no a través de simplificaciones como el estado de deformación plana o el estado de esfuerzos planos, tal y como se realiza en la teoría de flexión clásica.
2. La formulación expuesta cumple con las ecuaciones de equilibrio interno a diferencia de la teoría de flexión clásica.
3. La formulación expuesta predice la aparición de un esfuerzo paralelo a la carga aplicada igual al esfuerzo perpendicular a la sección del elemento ($\sigma_{zz} = -\sigma_{xx}$).

4. La formulación no incluye dentro de sus hipótesis que las secciones planas permanecen planas después de la deformación. Esto permite, en base al presente trabajo (o en observación al procedimiento adoptado), desarrollos posteriores de la teoría para elementos donde se conoce experimentalmente que la hipótesis expuesta al principio de este párrafo no es válida.
5. Esta formulación nos describe un desplazamiento adicional δ_z que el estimado por la teoría de flexión clásica, correspondiente a la inclusión de las deformaciones tangenciales en el desarrollo de la teoría.

7. AGRADECIMIENTOS

A mis padres, por apoyar siempre mi curiosidad.

8. REFERENCIAS

- Canet, J.M. (2012). *Resistencia de Materiales y Estructuras*. Barcelona: CIMNE.
- Chandrupatla, T.R., y Belegundu, A.D. (2012). *Introduction to Finite Elements in Engineering* (4th ed.). Harlow (UK): Pearson Education Limited.
- Ortiz Berrocal, L. (1998). *Elasticidad* (3ª ed.). Madrid: McGraw-Hill.
- Timoshenko, S., y Goodier, J.N. (1951). *Theory of Elasticity* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.
- Ventsel, E., y Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells. Theory, Analysis, and Applications*. Nueva York: Taylor & Francis Group/Marcel Dekker.
- Zienkiewicz, O.C., y Taylor, R.L. (1994). *El Método de Elementos Finitos* (4ª ed.). Vol. I: Formulación básica y problemas lineales. Madrid: McGraw-Hill.