

Curvas momento-curvatura de secciones de hormigón confinadas por estribos rectangulares

Moment-Curvature Curves of Concrete Sections Confined by Rectangular Stirrups

Juan José Hernández Santana^{1*}

Resumen

El diseño sísmo resistente de edificaciones plantea la necesidad de lograr una alta ductilidad de las estructuras y por tanto de las secciones de sus elementos componentes. Este no es un problema en las vigas para las que las normativas modernas obligan a diseñar secciones con una ductilidad que como regla satisface estos requerimientos, sin embargo, en columnas controladas por la compresión solo se logran secciones dúctiles si se confina el hormigón con armaduras transversales densas. En este artículo se aborda el confinamiento provocado por estribos rectangulares.

Las curvas momento-curvatura en secciones a flexión compuesta son una herramienta imprescindible para evaluar el comportamiento de una sección, para medir la capacidad portante y la ductilidad de la sección bajo diversos estadios de carga. Tomando en cuenta esta importancia, el objetivo principal de este trabajo consistió en desarrollar una metodología para la obtención de curvas momento-curvatura en vigas y columnas con hormigón confinado.

Esta metodología consta de varios pasos que fue necesario implementar:

- Calcular el grado de confinamiento provocado en la sección por el refuerzo transversal por estribos rectangulares.
- La obtención de los coeficientes del diagrama rectangular equivalente para los modelos de Mander y de Kent y Park modificado.
- La aplicación de estos resultados en la construcción de curvas de comportamiento de secciones confinadas a flexión compuesta.

En cada caso estos procedimientos se acompañan con valoraciones sobre la influencia de diversos factores en el comportamiento del tipo de secciones estudiadas, conclusiones útiles en la orientación para el proyecto estructural.

Palabras clave: hormigón confinado, diagramas tensión-deformación, curvas momento-curvatura, Mander, estribos rectangulares.

Abstract

The earthquake-resistant design of buildings raises the need to achieve high ductility of the structures and, therefore, of the cross-sections of their component elements. This is not a problem in beams for which modern regulations require the design of sections with a ductility that as a rule satisfies these requirements; however, in columns controlled by compression, ductile sections are only achieved if the concrete is confined with transverse reinforcement. dense. This article addresses the confinement caused by rectangular stirrups.

Moment-curvature curves in sections in compound bending are an essential tool to evaluate the behavior of a section, to measure the bearing capacity and ductility of the section under various load stages. Taking this importance into account, the main objective of this work was to develop a methodology for obtaining moment-curvature curves in beams and columns with confined concrete.

This methodology consists of several steps to be implemented:

- *Calculate the degree of confinement caused in the section by the transverse reinforcement by rectangular stirrups.*
- *Obtaining the coefficients of the equivalent rectangular diagram for the Mander, and modified Kent and Park models.*
- *The application of these results in the construction of behavior curves of sections confined to compound bending.*

In each case these procedures are accompanied by assessments of the influence of various factors on the behavior of the type of sections studied, useful conclusions in guiding the structural project.

Keywords: *Confined concrete, stress-strain relationship, moment-curvature curves, Mander, rectangular stirrups.*

1. INTRODUCCIÓN

El confinamiento en el hormigón se produce esencialmente debido a la presencia del refuerzo transversal, provocando la aparición de tensiones de compresión en la dirección transversal a la aplicación de las cargas. Este

* E-mail: jjhernandez@uclv.edu.cu

¹ Ingeniero Civil. Doctor en Ciencias Técnicas y profesor titular. Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Construcciones, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Santa Clara, Cuba.

confinamiento lo originan dos tipos diferentes de refuerzo transversal: los cercos o estribos y las espiras o hélices. En el presente trabajo se tratará el confinamiento producido por los primeros. Este confinamiento del núcleo de hormigón debido a pequeños espaciados de los cercos produce cambios importantes en las curvas tensión-deformación del hormigón al aumentar su resistencia y, sobre todo, incrementar notablemente su ductilidad. En resumen, como el confinamiento mejora la capacidad resistente, pero sobre todo incrementa la ductilidad, es un efecto muy beneficioso, especialmente en zonas sísmicas lo que justifica plenamente su estudio e implementación práctica.

La metodología para crear curvas momento-curvatura en secciones de vigas y columnas como instrumento para evaluar el comportamiento de estas secciones, objetivo de este trabajo, contiene los siguientes procedimientos que constituyen el contenido de sus epígrafes.

1. Calcular las tensiones de confinamiento provocadas en la sección por estribos rectangulares.
2. Analizar los modelos de Kent y Park modificado y de Mander, para evaluar las curvas esfuerzo deformación del hormigón confinado.
3. Obtención de los coeficientes del diagrama rectangular equivalente para dichos modelos.
4. Desarrollar las ecuaciones generales para secciones confinadas en vigas y columnas para la construcción de curvas de comportamiento, momento-curvatura, a flexión compuesta.

2. TENSIONES DE CONFINAMIENTO POR ESTRIBO RECTANGULARES

Aunque el confinamiento más efectivo lo suministra el refuerzo transversal en forma de espirales son los estribos rectangulares los más empleados en la construcción. La menor efectividad de estos se debe a que sólo pueden aplicar reacciones de confinamiento suficientemente efectivas en las esquinas y en sus cercanías debido a que

la presión del hormigón contra los lados de los estribos tiende a flexionar a éstos hacia fuera, tal cual se muestra por las líneas discontinuas en la figura 1. El confinamiento suministrado por este tipo de estribos puede mejorarse en forma significativa a través del uso de otros estribos que se solapan y con otras formas poligonales o bien con estribos suplementarios abiertos, los que resultan en varias ramas de estribos que cruzan la sección transversal. El efecto del pandeo de los estribos debe controlarse y esta es una de las causas por la cual es recomendable que las barras longitudinales verticales tengan una separación máxima o exista un mínimo de barras por cara de la columna. Cuando estas barras están bien distribuidas en la periferia de la columna y sus movimientos laterales son restringidos en forma efectiva por la armadura transversal, se materializa el confinamiento en altura (Park y Paulay, 1979; Mander *et al.*, 1988).

Entonces, el área de hormigón confinado se reduce, como se muestra en la figura 1, ya que al área comprendida entre las barras longitudinales se le resta el área de hormigón no confinado entre los estribos, dada por las parábolas indicadas en líneas punteadas en la figura 1 y que responden a la expresión (Mander *et al.*, 1988; Filaj *et al.*, 2016):

$$A_i = \sum_{i=1}^n \frac{w_i'^2}{6} \quad [1]$$

Si se le incorpora la ineffectividad añadida en el plano vertical, el área efectiva será:

$$A_e = \left(b_c d_c - \sum_{i=1}^n \frac{w_i'^2}{6} \right) \left(1 - \frac{s'}{2b_c} \right) \left(1 - \frac{s'}{2d_c} \right) \quad [2]$$

Las distancias d_c y b_c se miden entre los centros de los estribos, como se indica en la figura 1. Siempre $b_c > d_c$. Y w' es la separación de las barras longitudinales.

Entonces, el coeficiente de efectividad se calcula por:

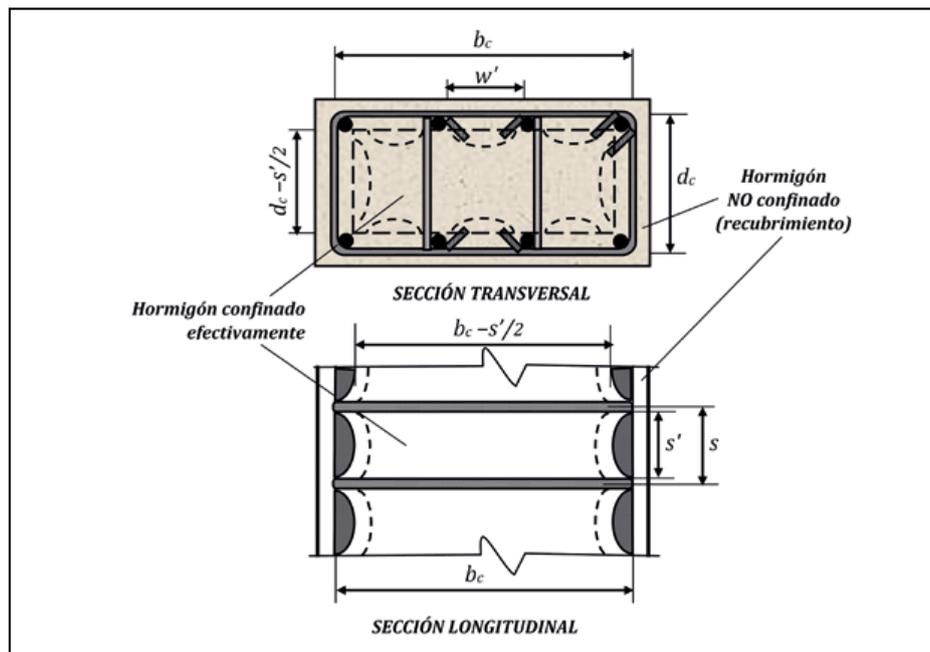


Figura 1. Confinamiento efectivo del hormigón por estribos rectangulares (Mander *et al.*, 1988).

$$k_e = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{6b_c d_c}\right) \left(1 - \frac{s'}{2b_c}\right) \left(1 - \frac{s'}{2d_c}\right)}{1 - \rho_{cc}} \quad [3]$$

Como para secciones rectangulares la cuantía es diferente en los dos ejes, la tensión del refuerzo en cada dirección es diferente y dada por:

$$f_{lx} = \frac{A_{sx}}{s d_c} f_{yt} = \rho_x f_{yt} \quad [4]$$

$$f_{ly} = \frac{A_{sy}}{s b_c} f_{yt} = \rho_y f_{yt} \quad [5]$$

Y, entonces, las tensiones efectivas en cada dirección serán:

$$f'_{lx} = k_e \rho_x f_{yt} \quad \text{tensión mayor} \quad [6]$$

$$f'_{ly} = k_e \rho_y f_{yt} \quad \text{tensión menor} \quad [7]$$

3. LEYES CONSTITUTIVAS PARA EL HORMIGÓN CONFINADO

Desde mediados del pasado siglo varios investigadores comenzaron a estudiar el comportamiento de probetas de hormigón sometidas a diferentes grados de confinamiento. Park y Paulay (1979), al evaluar este fenómeno, reseñan los modelos creados por varios autores, para interpretar las relaciones tensión-deformación para el hormigón confinado, haciendo una valoración crítica de los mismos. Más recientemente, se han continuado los estudios en la búsqueda de modelos que respondan de mejor manera al comportamiento del hormigón confinado bajo diferentes condiciones de carga. Bouafia *et al.* (2014) y Liang *et al.* (2015) analizan los desarrollados en las últimas décadas por diferentes autores, y los primeros proponen un nuevo modelo. Para hormigones de alta resistencia Sharma *et al.* (2005) estudian otros modelos.

Entre todos estos modelos se escogen para el desarrollo de este trabajo los modelos de Mander y de Kent y Park modificado.

Uno de los modelos más difundidos es la modificación desarrollada por Park *et al.* (1982), reseñada por Scott (1980), sobre el original propuesto por Kent y Park en 1971. Este último se representa en la figura 2 si se asume que $K = 1$. El modelo modificado posee una marcada afinidad con la propuesta de Hognestad (1951), si se considera $\epsilon_0 = 0,002$, e incorporando un coeficiente K que toma en consideración la contribución al confinamiento del hormigón por el refuerzo transversal, y que provoca un incremento de la resistencia máxima del hormigón, además de la deformabilidad de este. En el diagrama se pueden diferenciar tres ramas:

$$K f'_c \left[\frac{2\epsilon'_c}{K\epsilon_0} - \left(\frac{\epsilon'_c}{K\epsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{para } \epsilon'_0 \leq K\epsilon_0 = K \cdot 0,002$$

$$K f'_0 [1 - Z(\epsilon'_c - K\epsilon_0)] \quad \text{para } K\epsilon_0 < \epsilon'_c \leq \epsilon_{20,c}$$

$$0,2K f'_c \quad \text{para } \epsilon'_c > \epsilon_{20,c}$$

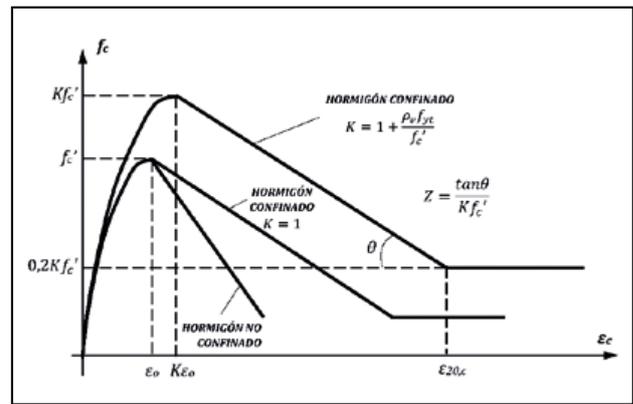


Figura 2. Curva tensión deformación para hormigón confinado (Park *et al.*, 1982; Scott, 1980).

El coeficiente K se calcula por:

$$K = 1 + \frac{\rho_s f_{yt}}{f'_c} \quad [8]$$

Donde ρ_s es la relación entre el volumen del acero de confinamiento y el volumen del núcleo de hormigón confinado. $\rho_s = A_{be} l_{st} / A_{cc} s$. Siendo l_{st} la longitud de los estribos que confinan la sección.

El coeficiente Z , que caracteriza la pendiente de la recta descendente del hormigón confinado, donde h'' es el ancho del núcleo confinado del hormigón, se obtiene por:

$$Z = \frac{0,5}{\frac{3 + 0,29 f'_c}{145 f'_c - 1000} + \frac{3}{4} \rho_v \sqrt{\frac{h''}{s}} - k\epsilon_0} \quad [9]$$

La figura 3 ilustra el modelo de comportamiento para el hormigón confinado propuesto por Mander (Mander *et al.*, 1988; Liang *et al.*, 2015; Filaj *et al.*, 2016) aplicable a secciones rectangulares y circulares. La ley contiene una primera rama parabólica que representa el efecto del confinamiento y que es reflejado en el incremento de la resistencia a compresión y la deformación del hormigón. La falla se inicia cuando colapsa el refuerzo transversal y ya no es capaz de confinar al núcleo de hormigón, originándose deformaciones mayores que las admitidas por otros modelos. Esta curva responde a la siguiente ecuación:

$$f_c = \frac{f'_{cc} x \cdot r E}{r - 1 + x^{rE}} \quad [10]$$

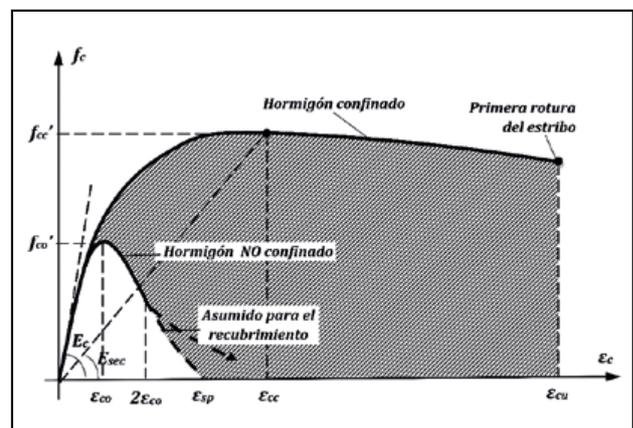


Figura 3. Curva tensión-deformación para hormigón confinado (Mander *et al.*, 1988).

Donde, con el apoyo de la figura 3:

f'_{cc} = máxima tensión a compresión del hormigón confinado

ϵ_{cc} = deformación unitaria del hormigón asociada a la tensión máxima f'_{cc}

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_{co} \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right] \quad [11]$$

Donde f'_{co} es la resistencia máxima del hormigón NO confinada y ϵ_{co} la deformación asociada con ella, como regla 0,002.

$$x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc}} \quad rE = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \quad E_c = 5000 \sqrt{f'_{co}} \\ E_{sec} = f'_{co} / \epsilon_{cc}$$

La resistencia máxima a compresión del hormigón confinado está directamente relacionada con las tensiones efectivas de confinamiento f'_l que se puedan desarrollar al alcanzar la fluencia las barras transversales. Para estribos circulares y espirales se calcula por medio de la expresión:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94f'_l}{f'_{co}}} - 2 \frac{f'_l}{f'_{co}} \right) \quad [12]$$

En el caso de confinamiento por estribos rectangulares donde las tensiones son diferentes en los dos ejes, Mander *et al.* (1988) proponen el empleo del nomograma de la figura 4 para obtener la relación f'_{cc} / f'_{co} , en función de las tensiones de confinamiento de cada eje.

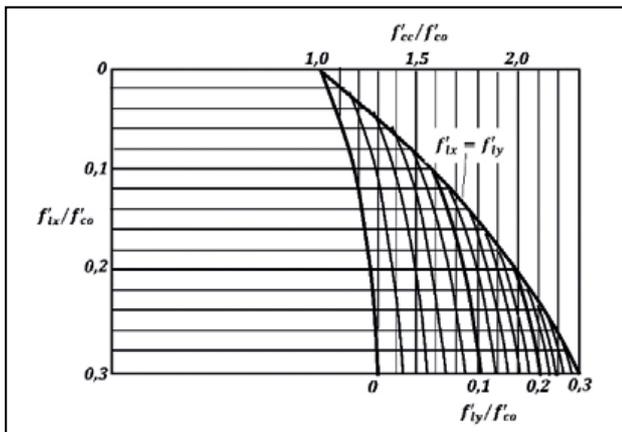


Figura 4. Nomograma para determinar de f'_{cc} para hormigón confinado por estribos rectangulares (Mander *et al.*, 1988).

Mander *et al.* (1988) han comprobado que el agotamiento de la pieza de hormigón confinado se alcanza al fracturarse las barras transversales de confinamiento, cuando estas alcanzan su límite elástico, etapa que puede estimarse al igualar las capacidades de energía de deformación del acero transversal al momento de fractura con el incremento de energía absorbido por el hormigón. El área bajo la curva de la figura 3 representa la energía de deformación en el fallo del hormigón, mostrado con rayado en el gráfico. Mander *et al.* (1988) plantean que la energía de deformación del acero transversal al momento de fractura se iguala a la diferencia entre las áreas bajo las curvas de hormigón confinado y no confinado, más la energía

proporcionada para mantener en fluencia el acero longitudinal comprimido (Mander *et al.*, 1988).

Paulay y Priestley (1992) admiten utilizar la siguiente expresión para hacer una estimación conservadora de la deformación última de compresión del hormigón confinado:

$$\epsilon_{cu} = 0,004 + \frac{1,4\rho_s f_{yt} \epsilon_{sm}}{f'_{cc}} \quad [13]$$

Donde:

ϵ_{sm} = deformación para la máxima tensión de tracción
 ρ_s =relación volumétrica del acero de confinamiento.

Para secciones rectangulares $\rho_s = \rho_x + \rho_y$.

Valores típicos ϵ_{cu} de están en el rango 0,012 a 0,05, es decir entre 4 a 16 veces los valores tradicionalmente supuestos para el hormigón sin confinar (Filaj *et al.*, 2016).

Como resumen se evalúa la influencia de diferentes factores en el confinamiento de la sección, los que ya fueron enunciados al inicio del epígrafe. Con tal propósito se desarrolla un caso de estudio para una sección base de 40 cm x 60 cm de hormigón de 25 MPa, armada con 10 barras N.º 25, se colocan estribos N.º 13 de 300 MPa espaciados a 10 cm. Las resistencias del hormigón y del acero, así como la denominación de las barras empleadas se corresponden con las normas cubanas, que se detallan en la tabla 1.

Tabla 1. Características de las barras de refuerzo producidas en Cuba (NC 7: 2016)

Nº Designación de las barras	Nº (ACI)	Diámetro (mm)	Área (cm²)
10	3	9,5	0,71
13	4	12,7	1,29
16	5	15,9	1,99
19	6	19,1	2,85
22	7	22,2	3,88
25	8	25,4	5,1
32	10	32,3	8,17
36	11	35,8	10,07

La colocación de las barras y distribución de los cercos se muestra en la figura 10.

En la figura 5 se muestran las curvas tensión deformación confeccionada por el modelo de Mander, donde se valoran los diferentes factores.

- La influencia de la resistencia del hormigón se analiza en la figura 5a. Se confirma que los hormigones de menos resistencia son los más dúctiles, mientras que los más resistentes son más sensibles a incrementar esta con el confinamiento. Sin embargo, este aspecto no se refleja de la misma manera en el aumento de la capacidad portante de la sección.
- Un factor clave en el confinamiento es el espaciamiento de los estribos. En la figura 5b se puede apreciar como la reducción de la separación de los cercos provoca un incremento de la resistencia del hormigón, pero sobre todo de la deformación de rotura, es decir de la ductilidad de las secciones, que es el propósito fundamental del confinamiento.

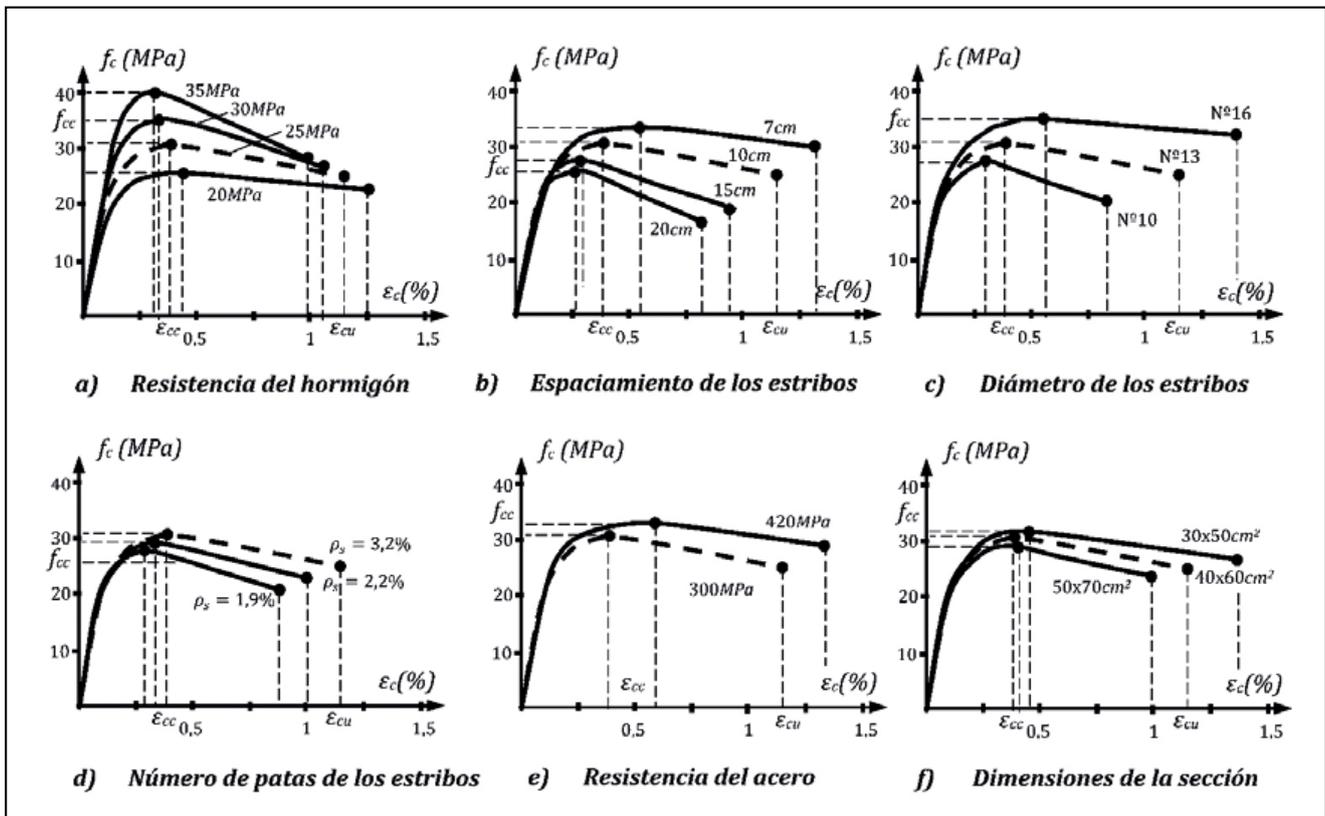


Figura 5. Hormigón confinado por estribos rectangulares. Influencia de factores.

- En la figura 5c se expone cómo el incremento del diámetro de los estribos es fundamental en el aumento del confinamiento del hormigón y en las positivas consecuencias que provoca éste en el comportamiento de la sección.
- Tres variantes de colocación de los cercos se comparan en la figura 5d: la primera curva es la que sirve de patrón en el resto de las comparaciones y se colocan doble estribos en la dimensión mayor y un gancho que una las barras situadas en el ancho menor (figura 10), esto provoca que en el lado mayor los cercos tengan 4 patas y 3 en la menor ($\rho_s = 3,2\%$); en la variante 2 se elimina el gancho en el lado menor y se coloca uno en el mayor, por lo que la sección tendrá 3 patas en el lado mayor y 2 en el menor ($\rho_s = 2,2\%$) y finalmente en la variante 3 se coloca un solo estribo y por tanto tendrá solo 2 patas en cada lado ($\rho_s = 1,9\%$). La forma de colocación de los estribos, medida en el número de patas en cada dirección, es una herramienta efectiva para incrementar el confinamiento y por tanto la ductilidad del hormigón, como se demuestra en la figura.
- Con el incremento de la tensión de fluencia del acero transversal crecen las tensiones de confinamiento y mejora el comportamiento dúctil del hormigón, como se aprecia en la figura 5e.
- Finalmente, en la figura 5f se analiza la influencia de las dimensiones de la sección. Como era de esperar la sección menor favorece un confinamiento más efectivo del acero transversal, manifestándose un mejor comportamiento del hormigón.

Este caso de estudio confirma las conclusiones generales obtenidas por otros autores al evaluar resultados

experimentales y teóricos (Sharma *et al.*, 2005; Liang *et al.*, 2015; Filaj *et al.*, 2016). Además, Guadagnuolo *et al.* (2020) dan su aportación sobre la influencia del detallado del refuerzo transversal.

4. DIAGRAMA RECTANGULAR EQUIVALENTE EN EL HORMIGÓN CONFINADO

La transformación de diferentes modelos tensión - deformación para el hormigón por otro rectangular equivalente con vistas a simplificar la solución de las ecuaciones de equilibrio en secciones sometidas a tensiones normales es una práctica común (Collins, 1978; Park y Paulay, 1979; Hernández y Hernández, 2020; Mieles y Hernández, 2015; Fakhruddin *et al.*, 2017). Esta transformación se garantiza si se cumple que la resultante del bloque comprimido y su posición sean iguales entre el modelo escogido tensión-deformación y el rectangular equivalente. El procedimiento de obtención de dicho diagrama para secciones rectangulares se expone a continuación (Collins, 1978; Hernández y Hernández, 2020; Mieles y Hernández, 2015):

$$\int_0^{\epsilon'_{ci}} f_c d\epsilon'_{cy} = \alpha_1 f_c \beta_1 \epsilon'_{ci} \quad [14]$$

Y para la posición del centroide:

$$\bar{\epsilon}_c = \frac{\int_0^{\epsilon'_{ci}} f_c \epsilon'_c d\epsilon'_{cy}}{\int_0^{\epsilon'_{ci}} f_c d\epsilon'_{cy}} = \epsilon'_{ci} \left(1 - \frac{\beta_1}{2}\right) \quad [15]$$

Entonces:

$$\beta_1 = 2 \left(1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{ci}'} f_c \varepsilon_c' d\varepsilon_{cy}'}{\varepsilon_{ci}' \int_0^{\varepsilon_{ci}'} f_c d\varepsilon_{cy}'} \right) \quad [16]$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{ci}'} f_c d\varepsilon_{cy}'}{f_c \beta_1 \varepsilon_{ci}'} \quad [17]$$

Anteriormente se detalló la forma de obtener la curva tensión deformación propuesta por Mander, que responde a una sola ecuación, como se presentó en la figura 3. Entonces, los coeficientes del diagrama rectangular equivalente (DRE) pueden plantearse como:

$$\beta_1 = 2 \left(1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_c'} \frac{x \cdot rE}{r-1+x^{rE}} \varepsilon_c' d\varepsilon_c'}{\int_0^{\varepsilon_c'} \frac{x \cdot rE}{r-1+x^{rE}} d\varepsilon_c'} \right) \quad [18]$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\varepsilon_c'} \frac{x \cdot rE}{r-1+x^{rE}} d\varepsilon_c'}{\beta_1 \varepsilon_c'} \quad [19]$$

La solución analítica de estas expresiones es compleja, por lo que no se brindan expresiones analíticas. Para contrarrestar esta dificultad, se han tabulado los coeficientes para un grupo de alternativas de diseño y se muestran en la tabla 2.

Un procedimiento semejante se desarrolla para obtener los coeficientes para el modelo de Kent y Park modificado donde se logran expresiones para los dos primeros tramos de la curva tensión deformación:

Para la primera rama $\varepsilon_c' \leq K\varepsilon_o$:

$$\beta_1 = 2 \left(1 - \frac{\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon_c'}{4K\varepsilon_o}}{1 - \frac{\varepsilon_c'}{3K\varepsilon_o}} \right) \quad [20]$$

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_c'}{\beta_1 K\varepsilon_o} \left(1 - \frac{\varepsilon_c'}{3K\varepsilon_o} \right) \quad [21]$$

Para la segunda rama $K\varepsilon_o < \varepsilon_c' \leq \varepsilon_{20,c}$:

$$\beta_1 = 2 \left(1 - \frac{\varepsilon_c'^2 \left[\frac{1}{2} - Z \left(\frac{\varepsilon_c'}{3} - K\varepsilon_o \right) \right] - \frac{(K\varepsilon_o)^2}{12} - \frac{Z(K\varepsilon_o)^3}{6}}{\varepsilon_c' \left[\varepsilon_c' \left[1 - Z \left(\frac{\varepsilon_c'}{2} - K\varepsilon_o \right) \right] - \frac{K\varepsilon_o}{3} + \frac{Z(K\varepsilon_o)^2}{2} \right]} \right) \quad [22]$$

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_c' \left[1 - Z \left(\frac{\varepsilon_c'}{2} - K\varepsilon_o \right) \right] - \frac{K\varepsilon_o}{3} - \frac{Z(K\varepsilon_o)^2}{2}}{\beta_1 \varepsilon_c'} \quad [23]$$

Tabla 2. Coeficientes de diagrama rectangular equivalente para el modelo de Mander ()

K_0	25MPa																			
	20MPa				30MPa				35MPa											
	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.4	1.6	1.8	2					
ϵ'_c	α_1	β_1																		
0.2	0.771	0.75	0.682	0.741	0.618	0.735	0.568	0.73	0.527	0.724	0.75	0.739	0.732	0.591	0.726	0.541	0.72	0.499	0.717	
0.3	0.89	0.789	0.812	0.774	0.751	0.764	0.702	0.76	0.659	0.749	0.879	0.778	0.763	0.73	0.754	0.678	0.75	0.634	0.74	
0.4	0.944	0.821	0.886	0.801	0.834	0.788	0.788	0.78	0.749	0.77	0.939	0.811	0.875	0.818	0.778	0.77	0.77	0.728	0.761	
0.5	0.97	0.849	0.929	0.824	0.886	0.809	0.847	0.80	0.811	0.788	0.96	0.84	0.922	0.875	0.798	0.833	0.79	0.794	0.778	
0.6	0.971	0.872	0.95	0.843	0.921	0.826	0.887	0.81	0.856	0.804	0.968	0.864	0.95	0.913	0.817	0.877	0.80	0.842	0.794	
0.7	0.967	0.892	0.967	0.86	0.943	0.842	0.916	0.83	0.888	0.818	0.963	0.886	0.964	0.938	0.832	0.908	0.82	0.878	0.808	
0.8	0.958	0.909	0.974	0.875	0.959	0.855	0.936	0.84	0.913	0.83	0.952	0.905	0.972	0.955	0.847	0.931	0.83	0.905	0.821	
0.9	0.947	0.924	0.976	0.888	0.968	0.867	0.951	0.85	0.931	0.841	0.939	0.922	0.974	0.966	0.859	0.947	0.84	0.925	0.832	
1	0.935	0.938	0.976	0.899	0.974	0.878	0.962	0.86	0.945	0.851	0.924	0.936	0.973	0.972	0.87	0.958	0.86	0.94	0.842	
1.2	0.908	0.961	0.969	0.919	0.979	0.896	0.974	0.881	0.964	0.868	0.893	0.962	0.965	0.977	0.89	0.972	0.873	0.961	0.86	
1.4	0.882	0.98	0.959	0.935	0.978	0.912	0.98	0.895	0.974	0.883	0.862	0.983	0.953	0.976	0.906	0.978	0.889	0.972	0.876	
1.6	0.857	1	0.947	0.949	0.974	0.924	0.981	0.908	0.98	0.895	0.833	1.001	0.938	0.971	0.92	0.979	0.902	0.978	0.889	
1.8	0.834	1.019	0.934	0.961	0.968	0.936	0.98	0.919	0.982	0.906	0.807	1.016	0.924	0.96	0.932	0.977	0.914	0.98	0.9	
K_0	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.4	1.6	1.8	2	1.2	1.4	1.6	1.8	2
ϵ'_c	α_1	β_1																		
0.2	0.731	0.73	0.635	0.724	0.569	0.719	0.518	0.72	0.476	0.711	0.714	0.723	0.616	0.718	0.714	0.498	0.71	0.457	0.706	
0.3	0.869	0.768	0.78	0.755	0.712	0.746	0.658	0.74	0.613	0.733	0.86	0.76	0.766	0.747	0.739	0.64	0.73	0.595	0.727	
0.4	0.934	0.802	0.865	0.782	0.805	0.769	0.754	0.76	0.71	0.753	0.93	0.794	0.857	0.774	0.762	0.739	0.75	0.694	0.746	
0.5	0.96	0.832	0.916	0.805	0.866	0.79	0.82	0.78	0.78	0.77	0.957	0.825	0.911	0.798	0.857	0.809	0.77	0.767	0.763	
0.6	0.965	0.858	0.95	0.826	0.907	0.808	0.867	0.80	0.831	0.786	0.962	0.852	0.94	0.819	0.901	0.859	0.79	0.82	0.779	
0.7	0.958	0.881	0.962	0.844	0.934	0.825	0.901	0.81	0.869	0.8	0.954	0.877	0.96	0.838	0.93	0.895	0.80	0.861	0.793	
0.8	0.946	0.901	0.97	0.86	0.952	0.839	0.925	0.82	0.898	0.813	0.939	0.898	0.968	0.855	0.949	0.921	0.82	0.891	0.806	
0.9	0.93	0.919	0.972	0.875	0.963	0.852	0.943	0.84	0.919	0.825	0.922	0.918	0.97	0.87	0.961	0.939	0.83	0.914	0.818	
1	0.913	0.936	0.97	0.888	0.97	0.864	0.955	0.85	0.936	0.835	0.902	0.936	0.968	0.884	0.969	0.953	0.84	0.932	0.829	
1.2	0.877	0.964	0.961	0.911	0.975	0.885	0.97	0.867	0.958	0.854	0.862	0.966	0.957	0.908	0.974	0.88	0.862	0.955	0.848	
1.4	0.843	0.987	0.947	0.93	0.973	0.902	0.977	0.883	0.97	0.869	0.824	0.992	0.941	0.928	0.971	0.898	0.879	0.969	0.864	
1.6	0.811	1.007	0.931	0.946	0.967	0.917	0.977	0.898	0.977	0.883	0.788	1.013	0.923	0.946	0.964	0.914	0.976	0.975	0.878	
1.8	0.781	1.024	0.914	0.961	0.959	0.93	0.975	0.91	0.979	0.895	0.756	1.032	0.904	0.961	0.955	0.928	0.907	0.978	0.891	

5. CURVAS MOMENTO-CURVATURA EN EL HORMIGÓN CONFINADO

Las curvas momento-curvatura de una sección es un procedimiento muy utilizado para interpretar el comportamiento de una sección a flexión compuesta (Collins, 1978; Park y Paulay, 1979; Hernández y Hernández, 2020; Mielés y Hernández, 2015; Fakhruddin *et al.*, 2017). Para tomar en cuenta el efecto del confinamiento del hormigón se recomienda utilizar el DRE y los coeficientes calculados en el epígrafe anterior. Para este tipo de secciones debe diferenciarse al trabajo del hormigón confinado dentro de los estribos del que se coloca fuera, es decir del recubrimiento que no está confinado. Park y Paulay (1979) señalan que, aunque la zona comprimida del hormigón confinado es menor que la distancia entre los estribos, puede considerarse como tal, por el efecto que produce el hormigón traccionado situado por debajo de la línea neutra. Estos autores estiman que el recubrimiento falla para deformaciones mayores de 0,004, produciéndose su agrietamiento y caída, llamado “descascaramiento” o “desconchado”. La importancia de este efecto es resaltada por Sharma *et al.* (2005) al estudiar columnas con hormigones de alta resistencia, demostrando como pueden ocurrir caídas de la capacidad resistente de la sección.

Entonces, para tomar en cuenta el aporte del hormigón comprimido se diferencian dos etapas:

- Para deformaciones bajas, $\epsilon_c' < 0,004$, admiten simplificarmente que todo la zona comprimida aporta como si estuviera confinada (Park y Paulay, 1979). Este caso se presenta en la figura 6 y

las ecuaciones de equilibrio para una viga pueden plantearse como:

$$\begin{aligned} \sum F = 0 \\ C_c + C_s = T \\ \alpha_1 f'_{cc} \beta_1 c b + A_s' f_s' = A_s f_s \end{aligned} \quad [24]$$

$\sum M = 0$ (respecto al acero traccionado)

$$\begin{aligned} M_n = C_c \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + C_s (d - d') \\ M_n = \alpha_1 f'_{cc} \beta_1 c b \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + A_s' f_s' (d - d') \end{aligned} \quad [25]$$

Los coeficientes α_1 y β_1 son los correspondientes al hormigón confinado para la deformación del hormigón estudiada. Y las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\varphi = \frac{\epsilon_c'}{c} = \frac{\epsilon_s'}{c - d'} = \frac{\epsilon_s}{d - c} \quad [26]$$

- Como se indicó para deformaciones del hormigón mayores de 0,004 se admite que el recubrimiento deja de aportar y, por tanto, la capacidad portante está basada principalmente en el hormigón contenido dentro de los estribos, cuyo ancho se calcula restando al ancho los valores del recubrimiento, como se muestra en la figura 7. Las ecuaciones de equilibrio serán entonces:

$$\begin{aligned} \sum F = 0 \\ C_{c1} + C_{c2} + C_s = T \\ \alpha_1 f'_{cc} (b - 2r) \beta_1 (c - r) + \alpha_2 f'_{cc} \cdot 2r \cdot \beta_2 c' + A_s' f_s' = A_s f_s \end{aligned} \quad [27]$$

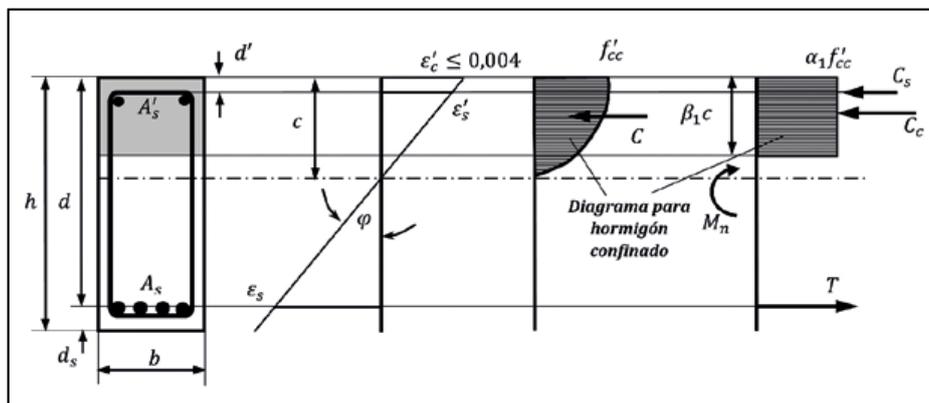


Figura 6. Diagrama de tensiones y fuerzas. Para $\epsilon_c' < 0,004$.

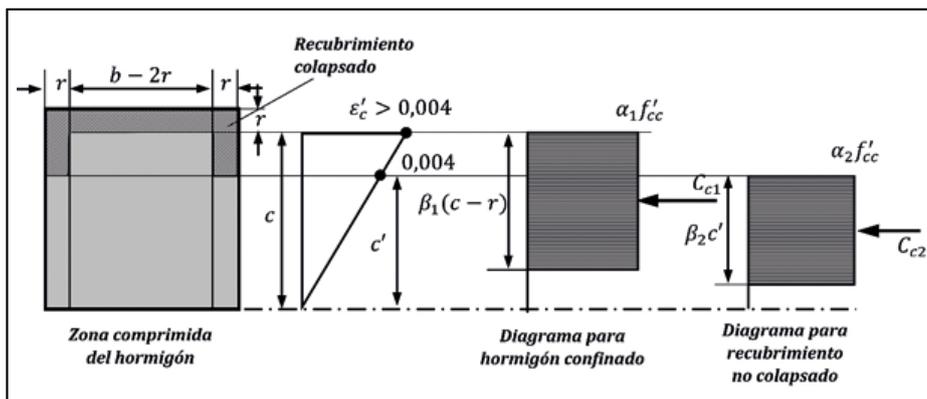


Figura 7. Bloque comprimido del hormigón. Para $\epsilon_c' \geq 0,004$.

Resaltando que la deformación máxima del hormigón se refiere al borde superior del área confinada, la ecuación de compatibilidad es:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_c'}{c-r} = \frac{\varepsilon_s'}{c-d'} = \frac{\varepsilon_s}{d-c} = \frac{0,004}{c'}$$

$$c' = \frac{0,004}{\varepsilon_c'}(c-r) \quad [28]$$

$\sum M = 0$ (respecto al acero traccionado)

$$M_n = C_{c1} \left(d - r - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + C_{c1} \left(d - c + c' + \frac{\beta_2 c'}{2} \right) + C_s (d - d')$$

$$M_n = \alpha_1 f'_{cc} (b - 2r) \beta_1 (c - r) \left[d - r - \frac{\beta_1 (c - r)}{2} \right]$$

$$+ \alpha_2 f'_{cc} \cdot 2r \cdot \beta_2 c' \left[d - c + c' - \frac{\beta_2 c'}{2} \right] + A_s' f_s' (d - d') \quad [29]$$

Los coeficientes α_1 y β_1 son los correspondientes al hormigón confinado para la deformación del hormigón estudiada, al nivel superior de la zona confinada, α_2 y β_2 y son los calculados para una deformación de 0,004 considerando las expresiones del hormigón no confinado, como puede apreciarse en la figura 7.

En el caso de una columna, la curva momento-curvatura se calcula para la combinación de cargas más desfavorable, para la carga correspondiente a esta. Entonces, las ecuaciones de equilibrio, considerando que el refuerzo se distribuirá perimetralmente, serán para el 1er caso:

$$\sum F = 0$$

$$P_n = C_c + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si}$$

$$P_n = \alpha_1 f'_{cc} \beta_1 c b + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si} \quad [30]$$

$\sum F = 0$ (respecto al centroide de la sección de hormigón)

$$M_n = C_c \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si} z_i$$

$$M_n = \alpha_1 f'_{cc} \beta_1 c b \left(d - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si} z_i \quad [31]$$

Donde:

A_{si} = área del refuerzo situado en el nivel i

f_{si} = tensión del refuerzo situado en el nivel i

z_i = distancia al centroide de la sección de hormigón del refuerzo en el nivel i

Y para cuando $\varepsilon'_c \geq 0,004$:

$$\sum F = 0$$

$$P_n = C_{c1} + C_{c2} + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si}$$

$$P_n = \alpha_1 f'_{cc} (b - 2r) \beta_1 (c - r) + \alpha_2 f'_{cc} \cdot 2r \cdot \beta_2 c' + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si} \quad [32]$$

$\sum M = 0$ (respecto al centroide de la sección de hormigón)

$$M_n = C_{c1} \left(\frac{h}{2} - r - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + C_{c2}$$

$$\left(\frac{h}{2} - c + c' + \frac{\beta_2 c'}{2} \right) + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si} z_i$$

$$M_n = \alpha_1 f'_{cc} (b - 2r) \beta_1 (c - r) \left[\frac{h}{2} - \frac{\beta_1 (c - r)}{2} \right] +$$

$$+ \alpha_2 f'_{cc} \cdot 2r \cdot \beta_2 c' \left[\frac{h}{2} - c + c' + \frac{\beta_2 c'}{2} \right] +$$

$$+ \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si} z_i \quad [33]$$

A continuación, se desarrollarán estos procedimientos para vigas y columnas utilizando los modelos de Mander y de Kent y Park modificado.

5.1. Curvas de momento-curvatura para vigas por los modelos de Mander y de Kent y Park modificado

Para la obtención de curvas de comportamiento de secciones confinadas de vigas se crearon hojas de cálculo en MathCAD para los modelos de Mander y de Kent y Park modificado. A continuación, se demuestra el empleo de la herramienta con el caso siguiente:

Una viga prefabricada de sección de 30 cm x 50 cm y fabricada con hormigón de 25 MPa está armada en la zona de tracción con 6 barras N.º 25 y G 40, cuya área es de 30,6 cm², situada en dos camadas o capas con recubrimiento mecánico de 8,56 cm; el refuerzo comprimido son 2 barras N.º 16, con área de 3,98 cm², y recubrimiento mecánico de 5,57 cm, como se muestra en la figura 8. El refuerzo transversal son estribos simples N.º 13, de $f_{yt} = 300$ MPa, espaciados de 10 cm y con recubrimientos de 3,5 cm a todos los bordes.

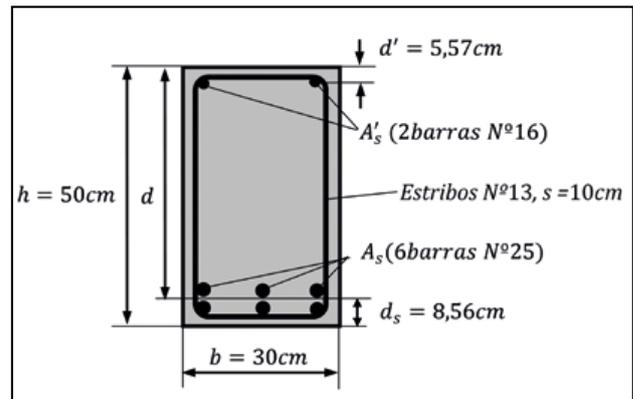


Figura 8. Sección transversal de la viga.

Como resumen de este caso de estudio para el comportamiento de vigas considerando el efecto del confinamiento del hormigón se construyeron las curvas de la figura 9 y de su estudio se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- En vigas donde resulta obligado diseñar secciones controladas por la tracción y que por tanto poseen una elevada ductilidad, que como regla satisface los requerimientos de las edificaciones más comunes, no se hace imprescindible tomar en cuenta el efecto del confinamiento de los estribos. Sin embargo, puede apreciarse en la figura 9 cómo la curvatura en la rotura crece significativamente, hasta 4 veces.
- El confinamiento del hormigón no produce un aumento del momento resistente de la sección. Para deformaciones altas, cuando el recubrimiento falla y se desconcha, se produce una ligera caída de este. Por tanto, se ratifica que la colocación de refuerzo

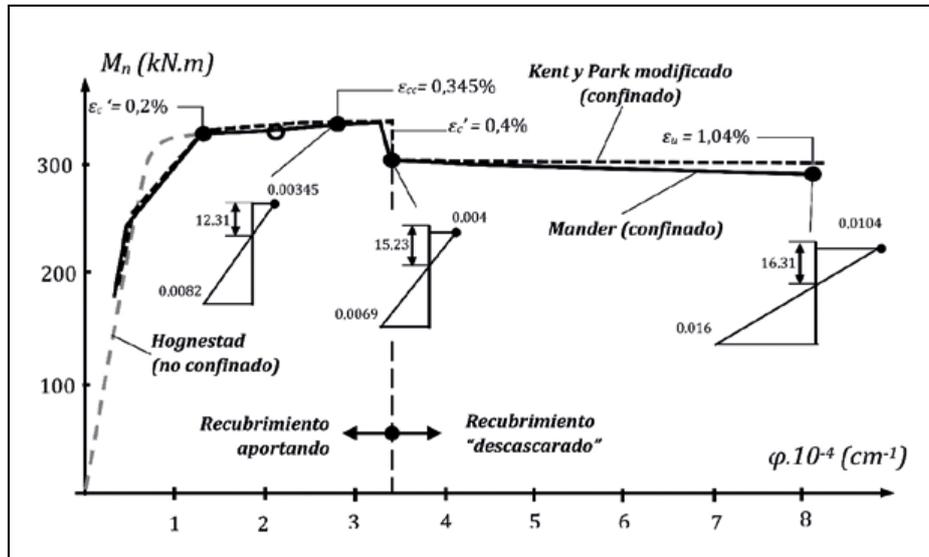


Figura 9. Curva momento-curvatura en viga.

transversal para confinar el hormigón tiene como propósito aumentar la ductilidad de la sección.

- La diferencia entre las curvas de los modelos analizados es poco significativa, aportan valores similares de curvatura y momento flector en la rotura y en la transición cuando el recubrimiento deja de aportar. La diferencia más notable ocurre alrededor de la definición del punto de máxima resistencia en la curva tensión deformación, que para Kent y Park modificado se presenta a deformaciones menores.

5.2. Curvas momento-curvatura para columnas por los modelos de Mander y de Kent y Park modificado

De la misma forma que para vigas, para la obtención de curvas de comportamiento de secciones confinadas en columnas se crearon hojas de cálculo en MathCAD para los modelos de Mander y de Kent y Park modificado, cuyo empleo se ejemplifica con el caso siguiente:

Una columna prefabricada de sección de 40 cm x 60 cm y fabricada con hormigón de 25 MPa está armada con 10 barras N.º 25 y G 40, distribuida perimetralmente, como se muestra en la figura 10, con recubrimiento mecánico de 6,04 cm. El refuerzo transversal son estribos N.º 13, de $f_{yt} = 300$ MPa, espaciados 10 cm y con recubrimientos de 3,5 cm a todos los bordes. Se colocan dobles estribos en el lado mayor y en el menor se coloca uno de una sola pata uniendo las barras intermedias, como se muestra en la figura 10. Se conoce que la

combinación de cargas más desfavorable tiene un carga axial de cálculo $P_u = 1950 kN$ que provoca una sección controlada por la compresión y la carga nominal sería $P_n = 3000 kN$, utilizando el procedimiento recomendado por el ACI 318 para determinar la seguridad (ACI- 318 2019) (NC 207-2019).

El procedimiento que seguir, para cada valor de deformación, es el siguiente. En la figura 11 se indican las tensiones y fuerzas que se involucran en el caso, donde parte del recubrimiento no aporta.

- Fijar un valor de c .
 - Calcular las deformaciones de cada refuerzo.
 - Calcular las tensiones de cada acero.
 - Obtener el aporte a compresión del hormigón.
 - Comprobar que $P_n = C_c + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si}$. Si no cumple, incrementar el valor de c hasta que se alcance el equilibrio.
 - Para el valor de c definitivo obtener las deformaciones y tensiones de cada acero.
 - Calcular el momento flector por
- $$M_n = C_c \left(\frac{h}{2} - \frac{\beta_1 c}{2} \right) + \sum_{i=0}^n A_{si} f_{si} z_i$$
- Calcular la curvatura.

Los resultados para las deformaciones evaluadas se indican en la curva momento-curvatura que se muestran en la figura 12.

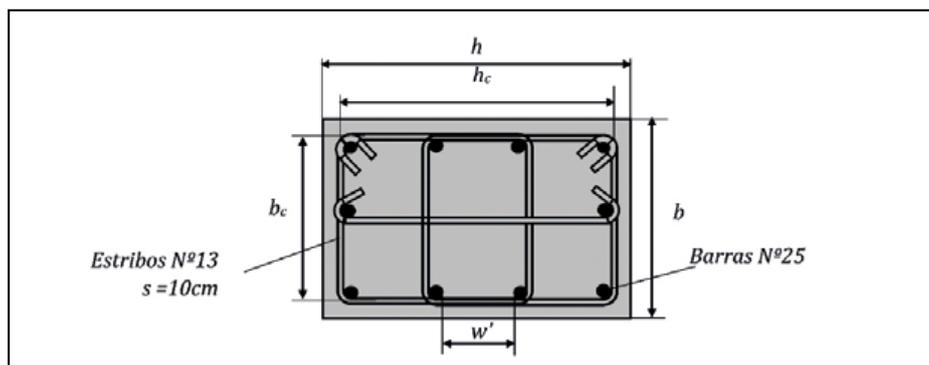


Figura 10. Sección transversal de la columna.

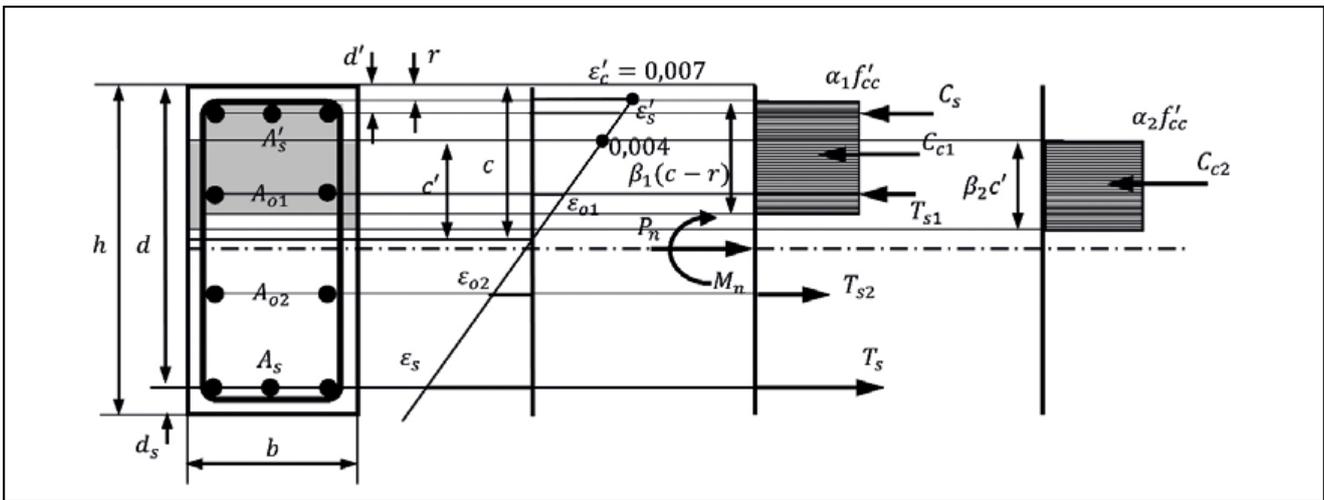


Figura 11. Diagrama de deformaciones, tensiones y fuerzas en columnas confinadas.

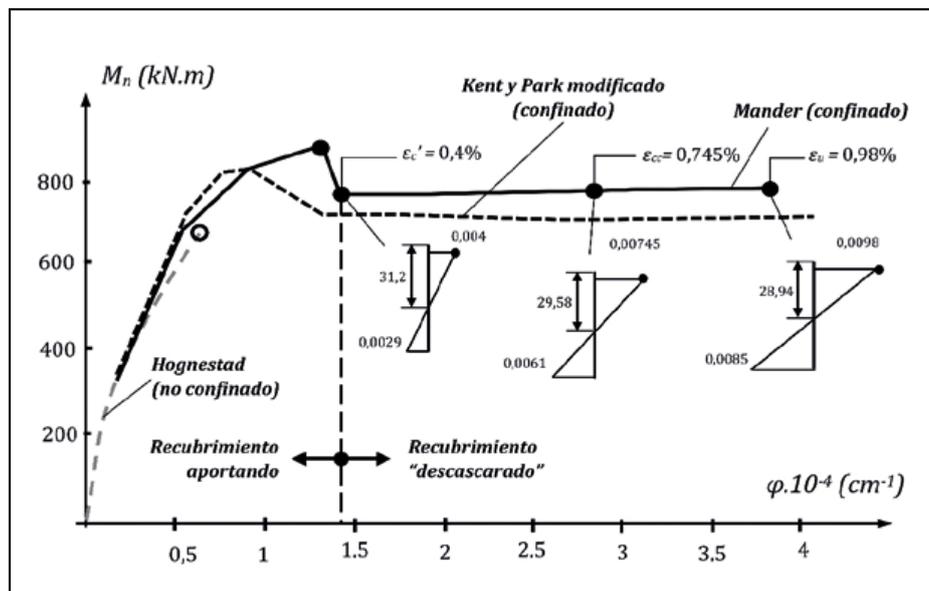


Figura 12. Curva momento-curvatura en columnas ($P_n = 3000kN$).

Como resumen del caso de estudio se pueden plantear algunas conclusiones sobre el comportamiento de columnas considerando el efecto del confinamiento del hormigón:

- En columnas controladas por la compresión se hace obligado diseñar secciones con un importante grado de confinamiento por los estribos. En la figura 12 puede apreciarse cómo la sección no confinada tiene un fallo frágil, pues éste ocurre sin que el refuerzo más traccionado haya alcanzado la fluencia. Obsérvese cómo se produce un incremento significativo de la curvatura en la rotura cuando se aplica un alto grado de confinamiento de la sección.
- El confinamiento del hormigón produce un aumento del momento resistente en las secciones controladas por la compresión, ya que hay un mejor aprovechamiento del aporte del hormigón y este incrementa su resistencia con el constreñimiento producido por los estribos. Al igual que en vigas, para deformaciones altas, cuando el recubrimiento falla y se desconcha, se produce una caída de la capacidad

portante. Por tanto, la colocación de refuerzo transversal para confinar el hormigón en columnas provoca doble beneficio: aumentar la ductilidad de la sección, principal resultado, y además se crece en el momento resistente.

- En la figura 12 se añade la curva de comportamiento de la sección utilizando el modelo de Kent y Park modificado, para el que $\rho_s = 2,52\%$, $K = 1,3$, $f'_{cc} = 32,56\text{MPa}$, $\epsilon_{cc} = 0,0026$, $\epsilon_{cu} = 0,0118$. La diferencia entre las curvas de los modelos analizados es más significativa que en vigas, aunque aportan similares valores de curvatura en la rotura y en la transición cuando el recubrimiento deja de aportar, los momentos resistentes son menores en el modelo de Park a partir de deformaciones del hormigón de 0,3 %. La causa probable de esta diferencia radica en la estimación del confinamiento para calcular la máxima resistencia del hormigón en la curva tensión deformación.

Comparando secciones sometidas a cargas axiales diferentes, se construye un gráfico adicional (figura 13), para significar la importancia del confinamiento en secciones

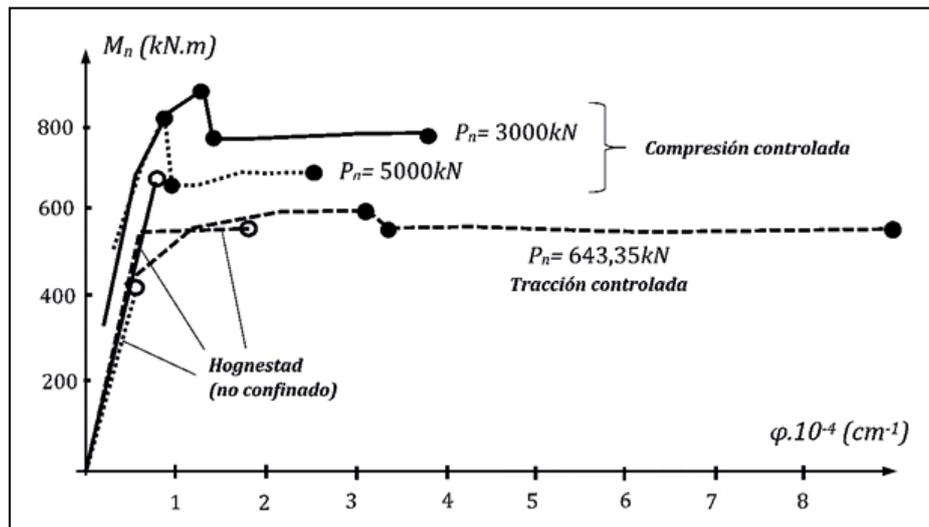


Figura 13. Curva momento-curvatura en columnas para diferentes P_n .

controladas por la compresión. A la sección con $P_n=3000kN$, ya estudiada se añaden otras dos.

- Sección controlada por la tracción

$$P_u = 579kN \quad P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{579}{0,9} = 643,35kN$$

- Sección controlada por la compresión

$$P_u = 3250kN \quad P_n = \frac{P_u}{\phi} = \frac{3250}{0,65} = 5000kN$$

De dicha comparación pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- La ductilidad de las secciones confinadas va disminuyendo en la medida que la carga axial actuante se incrementa. Es muy superior para la carga menor, donde la sección está controlada por la tracción y tiene un comportamiento muy semejante a una viga, note como la sección no confinada tiene un fallo dúctil, por lo que en este caso el confinamiento no resulta tan imprescindible. Se ratifica la importancia del confinamiento en secciones en compresión controlada ya que se transforman de secciones con fallos frágiles en secciones dúctiles.
- La capacidad portante de la sección se incrementa más en las secciones confinadas en la medida que la carga es mayor. Para la sección controlada por la tracción no hay prácticamente crecimiento, pues se comporta como una viga. Sin embargo, para $P_n=5000kN$ la diferencia entre las cargas en la rotura entre la sección no confinada y la confinada es cercana al doble.
- De la misma manera, al producirse el fallo del recubrimiento para deformaciones del hormigón mayores de 0,004, la caída del momento resistente se hace más notable en la medida que la sección esté sometida a cargas axiales mayores.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se han desarrollado herramientas útiles y novedosas para obtener curvas de comportamiento para secciones a flexión compuesta confinadas por refuerzo

transversal formado por estribos rectangulares. Estas nuevas herramientas pueden resumirse en:

- Cálculo de coeficientes para diagramas rectangulares equivalente para los modelos de Mander y de Kent y Park modificado.
- Procedimiento para obtener curvas momento-curvatura en secciones de vigas y columnas tomando en cuenta el desconchado del recubrimiento para deformaciones altas del hormigón.

Ambos procedimientos han sido montados en hojas de cálculo en MathCAD de muy fácil empleo.

Finalmente se desarrollan casos de estudio en vigas y columnas que permiten realizar un grupo de recomendaciones sobre la utilización de los estribos rectangulares de confinamiento y sobre el comportamiento de secciones a flexión combinada constreñidas por refuerzo transversal.

7. REFERENCIAS

- American Concrete Institute (2019). *Building Code Requirements for Reinforced Concrete*, ACI 318-19. Detroit: ACI.
- Bouafia, Y., Iddir, A., Kachi, M.S., y Dumontet, H. (2014). Stress-strain relationship for the confined concrete. *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI). 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V). 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI)*. E. Oñate, J. Oliver y A. Huerta (eds.). Barcelona, 20-25 julio 2014. Vols. II-IV, pp. 1593-1603.
- Collins, M. (1978). *Comportamiento del Hormigón*. La Habana: Impresiones Ligeras, ISPJAE.
- Fakhruddin, M., Barbude, P., Bhagat, K., y Muley, P.V. (2017). Moment curvature relationship for structural elements of RC building using Matlab. *International Journal of Recent Advances in Engineering & Technology (IJRAET)*, 5(2).
- Filaj, E., Seranaj, A., y Leka, E. (2016). Confined concrete behavior influencing factors. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 3(7).
- Guadagnuolo, M., Donadio, A., Tafuro, A., y Faella, G. (2020). Experimental behavior of concrete columns confined by transverse reinforcement with different details. *The Open Construction & Building Technology Journal*, 14(1): pp. 250-265.

Hernández, J.J., y Hernández, J.A. (2020). *Hormigón Estructural. Diseño por Estados Límites*. Tomo I. La Habana: Editorial Félix Varela.

Hognestad, E. (1951). Study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. University of Illinois Engineering Experiment Station, *Bulletin Series*, N. ° 399.

Liang, X., Beck, R., y Sritharan, S. (2015). *Understanding the Confined Concrete Behavior on the Response of Hollow Bridge Columns*. A Final Report to the California Department of Transportation. Ames (IA): Department of Civil, Construction and Environmental Engineering. Iowa State University.

Mander, J.B., Priestley, M.J.N., y Park, R. (1988). Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 114(8): pp. 1804-1826.

Mieles, Y., y Hernández, J.A. (2015). Comportamiento de secciones de hormigón sometidas a flexión reforzadas con barras de acero o PRF. *Primer Taller Nacional de Seguridad de las Estructuras, Guardalavaca, Holguín, 2015*.

Nilson, A.H., Darwin, D., y Dolan, C.W. (2004). *Design of Concrete Structures* (13th ed.) New York: McGraw Hill.

Oficina Nacional de Normalización (2016). NC 7: 2016. Barras de acero para refuerzo de hormigón. Requisitos. La Habana: NC.

Oficina Nacional de Normalización (2019). NC 207: 2019. Requisitos generales para el diseño y construcción de edificaciones y obras civiles de hormigón estructural. La Habana: NC.

Park, R., y Paulay, T. (1979). *Estructuras de concreto reforzado*. Ciudad de México: Editorial Limusa.

Park, R., Priestley, M.J.N., y Gill, W.D. (1982). Ductility of square-confined concrete columns. *Journal of the Structural Division*, ASCE, 108(4): pp. 929-950.

Paulay, T., y Priestley, M.J.N. (1992). *Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*. New York: John Wiley & Sons.

Scott, B.D. (1980). *Stress-Strain Relationships for Confined Concrete: Rectangular Sections*. Christchurch (New Zealand): University of Canterbury.

Sharma, U.K., Bhargava, P., y Kaushik, S.K. (2005). Behavior of confined high strength concrete columns under axial compression. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 3(2): pp. 267-281.