

Una ecuación de la velocidad media del flujo en régimen no uniforme, su relación con el fenómeno de dispersión como función del tiempo y su aplicación a los estudios de calidad de agua

ALFREDO CONSTAIN ARAGÓN (*) y RODRIGO LEMOS RUIZ (**)

RESUMEN Es muy bien conocida la ecuación básica de la hidráulica descubierta por el francés Antoine de Chezy en 1769, la cual relaciona de forma cuadrática la velocidad media del flujo con la pendiente de la línea de energía y el radio hidráulico, en régimen uniforme. Esta ecuación ha sido el eje central del desarrollo de la hidrometría como ciencia que enfrenta los enormes desafíos de penetrar en el conocimiento de los cauces cada vez más contaminados de la tierra. En virtud de esto, su propia estructura y la relación con otras relaciones matemáticas conexas han sido exhaustivamente examinadas pese a tener la limitación de valer solo para velocidad constante.

A partir de consideraciones físico-químicas y no dinámicas como se hizo para obtener la relación de Chezy es posible establecer una segunda ecuación para la velocidad media del flujo- en un régimen no uniforme- que corresponda al movimiento promedio resultante de un soluto vertido en la corriente. Esta ecuación ira a relacionar de forma precisa diversos aspectos de la hidráulica y el transporte de masa, vistos como una sola entidad, permitiendo una herramienta vital para un estudio profundo de las contaminaciones hídricas. Para llegar a esta ecuación se revisan los fundamentos de la teoría de transporte de masa en flujos, proponiéndose una naturaleza dependiente del tiempo para el coeficiente que usualmente se usa como constante en la descripción de los fenómenos de dispersión, pudiéndose interpretar apropiadamente ciertas inconsistencias detectadas desde tiempo atrás en esta teoría. Se estudia detalladamente los resultados de aplicar esta nueva aproximación a un pequeño cauce y a un río mayor en Colombia.

AN EQUATION FOR MEAN VELOCITY OF FLOW IN NON UNIFORM REGIME, ITS RELATIONSHIP WITH THE DISPERSION PHENOMENON AS TIME FUNCTION AND ITS APPLICATION TO STUDY OF WATER QUALITY

ABSTRACT It is very well known the basic equation of hydraulics discovered by Antoine de Chezy in 1769, which relates in a quadratic form the mean velocity of flow with the slope of energy line and the hydraulic radius, in a uniform regime. This equation has been the central axis of development of hydrometrics as science that faces the huge challenges of penetrating the knowledge of earth's streams every time more contaminated. In virtue of that, its mathematical structure and the relationship with other related formulas have been carefully examined, despite the limitation due to constancy of velocity.

Starting from chemical considerations rather than dynamic ones as was used to obtain Chezy's relationship it is possible to establish a second equation for mean velocity of fluid - in a non uniform regime- that corresponds to averaged movement of a solute poured to stream. This equation will go to relate in an accurate way several aspects of hydraulics and mass transport, sight as a single thing, allowing a vital tool for a depth study of water contaminations. To arrive this equation it was reviewed the foundations of mass transport theory in flows, stating a time dependent nature for coefficient currently used in describing dispersion phenomena, allowing to interpret properly certain inconsistencies detected long time ago in this theory. It is presented the detailed results of application of this new approach to a small stream and a larger river in Colombia.

Palabras clave: Hidráulica fluvial, Transporte de masa, Estudios de calidad de agua.

Keywords: Fluvial hydraulics, Mass transport, Quality waters studies.

(*) Ingeniero, Amazonas Technologies, Cali, Colombia. alfredo.constain@gmail.com

(**) Profesor. Facultad de Ingeniería Civil, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia. ralemos@unicauca.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los temas contemporáneos que mas preocupación conlleva es la degradación del recurso acuático a nivel mundial, tanto así que la conferencia inaugural de la ONU sobre Medio Ambiente de 1972 en Estocolmo dedicó un punto especial al problema de la contaminación de nuestro más preciado recurso. Concurrente con esta temática política, los esfuerzos para completar el entendimiento científico de las bases físico-químicas del fenómeno han sido ingentes también.

Tanto la hidráulica como el transporte de masa en los cauces naturales son temas fundamentales para la correcta comprensión del fenómeno de la contaminación hídrica y su manejo apropiado. El estado del arte sin embargo mantiene ambos temas estrictamente separados en tanto que para la hidráulica se utiliza básicamente la ecuación de Chezy y para el transporte de masa se parte de la ecuación diferencial de Taylor, tal como se analizara en este Artículo.

La ecuación clásica de Chezy define la velocidad media del flujo en régimen uniforme en función del Radio hidráulico, R , y de la pendiente de la línea de energía, S . El científico francés Chezy la propuso en 1769 suponiendo que la fuerza resistente al movimiento del agua se iguala con la fuerza motriz que deviene de la componente gravitacional en la dirección del flujo [1]. En la Figura 1 se muestra un elemento de fluido sujeto a esta dinámica. La fuerza resistente la supuso Chezy actuando sobre la interfaz agua-lecho y proporcional al cuadrado de la velocidad, por unidad de área de interfaz. El llamado "Coeficiente de Chezy" que aparece dándole proporcionalidad a la ecuación mencionada involucra un factor adimensional de pérdida por fricción, f , definido previamente por Darcy-Weissbach, según ecuación (2). [2] Figura 1.

Integrando para toda el área de lecho del flujo se tiene longitudinalmente, con C definido como Coeficiente de Chezy:

$$U = C\sqrt{RS} \tag{1}$$

Y también, con g como aceleración de la gravedad:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \tag{2}$$

Esta relación de base empírica ha sido ligada a través del tiempo con otras como la ecuación (empírica también) de Manning que entre muchas otras involucra la geomorfología del cauce con la dinámica del flujo.

$$n \approx \frac{R^{\frac{1}{6}}}{C} \tag{3}$$



FIGURA 1. Acción actuante y resistente en el lecho.

Aquí el numero "n" se refiere al grado de rugosidad del cauce en función de diferentes aspectos tales como el tipo de material del lecho, la interferencia de la vegetación, la irregularidad del curso del agua, entre otros.

Dada la importancia de poder entrelazar los dos campos (hidráulica y transporte de masa) se plantea en este artículo la discusión de otra ecuación para la velocidad media del fluido pero en función de las características de dispersión del flujo. [3][4][5].

$$U = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \tag{4}$$

En esta ecuación $1/\Phi$ juega el rol de C mientras E y $1/\tau$ juegan los roles de R y S . E es el coeficiente longitudinal de dispersión en el flujo y τ es un tiempo característico del proceso de transporte. Como se puede ver tiene la misma estructura cuadrática que la de Chezy, lo cual no es una simple coincidencia pues implica que los mismos mecanismos que permiten definir a (1) juegan también para involucrar fenómenos de transporte en (4).

2. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE VELOCIDAD EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS DE TRANSPORTE

Mientras que la ecuación (1) se define con conceptos estrictamente mecánicos, involucrando movimientos macroscópicos de las partículas del fluido, la ecuación (4) que involucra la participación de solutos en el flujo debe incluir conceptos químicos básicos, de manera insoslayable. A diferencia de la relación de Chezy las interacciones a examinar en este caso son de naturaleza microscópica. Figura 2.

Entonces, deben considerarse dos acciones contrapuestas: una la formación del soluto como entidad sujeta de interacciones y otra de destrucción de esa organización.

El primer efecto se relaciona con la energía química potencial con que cuenta un soluto que evoluciona en el cauce y el segundo efecto su transformación por acciones irreversibles presentes en el flujo. Una forma práctica aproximada de plantear el primer efecto es definir una energía potencial inicial (de formación del soluto), ΔU . En un sistema isotérmico con procesos completamente irreversibles el balance de energía es tal que no es posible realizar ningún trabajo útil, medido por la llamada "energía libre", ΔF . Se completa el balance energético con el calor expulsado hacia los alrededores, medido por la entropía multiplicada por la temperatura, $T\Delta S$, como efecto de los mecanismos destructores (segundo efecto). [6].



FIGURA 2. Desperdigamiento de partículas como resultado de dos efectos.

Por lo tanto, para un soluto evolucionando en la turbulencia de un flujo el balance de energía se puede establecer como:

$$\Delta F = \Delta U - T\Delta S = 0 \rightarrow \Delta U = T\Delta S \quad (5)$$

Igualando estas energías a trabajos correspondientes (uno de formación y otro de disipación) se tiene:

$$\Delta U = A_f \quad T\Delta S = A_d \quad (6)$$

Considerando que los dos trabajos se desarrollan en desplazamientos idénticos, se plantea el siguiente equilibrio de fuerzas, una asociada al trabajo de formación y otra asociada al proceso de destrucción:

$$0 = f_f - f_d \quad (7)$$

Como se quiere describir lo que ocurre no en esquemas Newtonianos con imagen corpórea macroscópica sino con el comportamiento de grandes sistemas moleculares es necesario adoptar una visión un tanto diferente a la aplicada en la ecuación de Chezy para llegar a una definición operativa de la velocidad media del flujo.

Para caracterizar la fuerza formadora, f_f es necesario asociarla con un parámetro macroscópico que aparece cuando se establece la influencia de un soluto evolucionando en un volumen a través del tiempo: La presión osmótica. Para caracterizar la fuerza disipadora, f_d esta se define como proporcional al cuadrado de la velocidad del fluido (caso turbulento).

La presión osmótica se caracteriza a partir de la llamada ley fenomenológica de Fick, en la que juega un papel importante el gradiente de concentración longitudinal. Por lo tanto, un elemento de masa puesta en juego por esta presión se puede establecer unidimensionalmente como:

$$\Delta M = -E \times \frac{\Delta c}{\Delta X} \times \Delta S \times t \quad (8)$$

Aquí M es la masa de soluto, E es el Coeficiente longitudinal Fickiano, S es el área transversal del flujo (definida como $\Delta Z * \Delta Y$), c es la concentración del soluto en el elemento de volumen considerado y t es el tiempo. Ahora, tiene dimensiones de fuerza (en el sentido de Langevin) sobre el elemento de masa tiene la siguiente expresión, derivada de la anterior, y en valor absoluto:

$$f_f = \Delta M \times \frac{X}{t^2} = \frac{E \times \frac{\Delta c}{\Delta X} \times \Delta V}{t} \quad (9)$$

Aquí ΔV es el elemento de volumen, que es $\Delta S * X$.

La fuerza disipativa sobre dicho elemento de masa es proporcional al cuadrado de la velocidad en la misma involucrando un factor de pérdida, k , por lo tanto:

$$f_d = k \times u^2 \quad (10)$$

Entonces de acuerdo al balance descrito en la ecuación (7) e integrando para todo el volumen de interés en el flujo se tiene:

$$k \times U^2 = \frac{E \times \frac{\Delta C}{\Delta X} \times V}{t} \quad (11)$$

Aquí tanto U como C son promedios en el espacio. Siguiendo:

$$U^2 = \left(\frac{1}{k} \times \frac{\Delta C}{\Delta X} \times V \right) \times \left(\frac{E}{t} \right) \quad (12)$$

Sacando raíz:

$$U = \sqrt{\frac{1}{k} \times \frac{\Delta C}{\Delta X} \times V} \times \sqrt{\frac{E}{t}} \quad (13)$$

Manipulando esta ecuación algebraicamente, si se define que el tiempo característico de la difusión del soluto y el tiempo general están afectados por un coeficiente constante, $\beta \approx 0.215$, se tiene:

$$\tau = \beta t \quad (14)$$

Esta relación deviene del hecho de que el extendimiento azaroso del grupo de partículas de soluto en un flujo tiene una escala temporal propia, diferente del tiempo general que mide un observador externo. El parámetro β se calcula asintóticamente mediante la distribución de Poisson planteando la probabilidad de detectar llegando a un volumen dado cero partículas, una partículas, dos partículas, ..., $n \rightarrow \infty$ partículas [7].

Se tiene por lo tanto:

$$U = \sqrt{\frac{\beta}{2k} \times \frac{\Delta C}{\Delta X} \times V} \times \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \quad (15)$$

Si llamamos $1/\phi$ al primer factor del miembro derecho de la ecuación, queda:

$$U = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \quad (16)$$

La estructura cuadrática de las dos ecuaciones de velocidad media aparece gracias al mismo efecto de la turbulencia, pues se parte del hecho de que en el fluido las pérdidas por turbulencia son proporcionales a la velocidad al cuadrado. La ecuación de Chezy sin embargo no involucra directamente el tiempo en su formulación, mientras que la relación (16) si lo hace. Esta diferencia esencial entre las dos definiciones de velocidad corresponde al hecho de que cada una de ellas describe un nivel diferente de la realidad física: La ecuación de Chezy atestigua el efecto de pérdida de energía mecánica por fricción superficial, referida a un modelo de "plano inclinado", mientras que la otra ecuación explica la incidencia de una velocidad macroscópica sobre el mayor desarrollo de un esparcimiento de soluto en el flujo asociado.

Otra diferencia entre ambas expresiones que es importante subrayar es la restricción de que haya flujo en régimen uniforme para la primera, como condición previa para establecer el equilibrio dinámico requerido, puesto que las fuerzas involucradas están referidas a aspectos geométricos del esquema y esta geometría se mantiene solo para este tipo de régimen. Para la segunda ecuación esta restricción no es válida dada la naturaleza química de las fuerzas propuestas. Es claro que para esta ecuación de velocidad media entre mayor sea la heterogeneidad del movimiento del flujo, mejor será el proceso de mezcla y por lo tanto con mejor precisión se realizara la definición. Un régimen no uniforme de velocidad contribuye a este segundo escenario y por lo tanto la segunda ecuación es válida para un movimiento no uniforme también.

3. LA NUEVA ECUACIÓN DE VELOCIDAD MEDIA COMO UNA EXPRESIÓN DE LA NATURALEZA BROWNIANA DE LA DISPERSIÓN

Aunque la ecuación clásica de Chezy desarrolla una concepción enteramente mecánica del proceso de formación del movimiento macroscópico de un fluido, por principio no se puede excluir la misma descripción a partir de procesos físico-químicos como por ejemplo el de la dispersión de un soluto en el flujo. Si existe una relación entre velocidad media de un flujo y las pérdidas de energía asociadas a ese movimiento, entonces es razonable pensar que también existe una función que relaciona dicha velocidad media y la velocidad con la que se extiende aleatoriamente un soluto en el seno de un flujo hete-

rogéneo, V_{dif} . Se define entonces tal función mono-dimensional como Φ :

$$\phi = \frac{V_{dif}}{Ux} \quad (17)$$

La velocidad de desperdigamiento del soluto tiene una definición directa como la razón entre valores característicos del desplazamiento promedio, Δ y el tiempo característico correspondiente, τ .

$$V_{dif} = \frac{\Delta}{\tau} \quad (18)$$

Si se acepta una naturaleza Browniana para este desperdigamiento de las partículas del soluto algunas consideraciones puede hacerse: Primera, que Δ y τ se pueden calcular en los puntos de inflexión de la curva Gaussiana correspondiente. Segunda, que la ecuación anterior se puede desarrollar de acuerdo con la forma de Einstein-Smoluchowsky:

$$V_{dif} = \frac{\Delta}{\tau} = \frac{\sqrt{2E\tau}}{\tau} = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \quad (19)$$

La ecuación (17) se puede reacomodar como sigue:

$$U = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \quad (20)$$

Que es la misma ecuación definida anteriormente mediante un análisis de la evolución del intercambio de energía en el proceso de transporte de soluto.

El movimiento Browniano mencionado anteriormente es la forma más simple del llamado movimiento "Random Walk" que en su forma unidimensional implica que para cada partícula del conjunto ella tiene una posibilidad escogencia de ir a izquierda o derecha con igualdad de chance, es decir con probabilidad de 0.5 para cada una de las dos decisiones posibles (esquema binario de Bernoulli). Entonces, aunque a nivel individual cada partícula es "libre" de decidir si va en un sentido u otro, el movimiento colectivo se manifiesta en una expansión promedio proporcional al cuadrado del tiempo (debido a que en la parte central hay más partículas que en la periferia). Figura 3.

Esta deducción podría en principio parecer limitada ya que este tipo de modelos Random Walk → Browniano se asocia ge-

neralmente al movimiento térmico, *independiente* de las partículas de un gran ensamble en equilibrio. Sin embargo, trabajos recientes en la teoría del Caos han demostrado que incluso los movimientos *dependientes* de las partículas inmersas en campos de fuerza potencial (y en desequilibrio) devienen en grupos que ganan en desorden mediante mecanismos similares al Random Walk, y que por lo tanto este tipo de descripción de la transformación aleatoria del movimiento molecular es *contrario sensu*, general y omnipresente. Este resultado sorprendente salió del análisis detallado sobre las "correlaciones dinámicas" en los llamados "Grandes sistemas de Poincaré" que son los conjuntos enormes de moléculas de los cuerpos reales para los cuales L. Boltzmann había descrito su evolución natural en términos de creación de entropía. Ahora se sabe que ese aumento se logra gracias a la destrucción de las trayectorias individuales de las partículas (que devienen caóticas) siendo descrita esta dinámica solamente por (¡Quién lo creyera!) mecanismos estadísticos del tipo "Random Walk" [8][9].

4. FENÓMENOS EN DOS DIMENSIONES DESCRITAS POR UNA ECUACIÓN MONODIMENSIONAL

No obstante corresponder a una estructura matemática esencialmente correcta, la ecuación diferencial básica que rige el balance de masa conservativo en los flujos naturales, Ecuación (21) desarrollada a mediados del siglo XX por G.I. Taylor [10] tiene una solución, la llamada relación de Fick, Ecuación (22) cuya forma usualmente no corresponde a los datos experimentales, como ha sido extensamente señalado por diversos autores a través de los años [11][12][13].

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (21)$$

$$C(t) = \frac{M}{S\sqrt{4\pi Et}} e^{-\frac{(x-Ut)^2}{4Et}} \quad (22)$$

La diferencia fundamental entre modelo y experimento consiste en que ni la "altura" (concentración pico) de la curva ni el grado de asimetría de la forma de la curva coinciden de manera satisfactoria. Esta anomalía para la cual no ha sido propuesta una explicación única que sea a la vez simple de

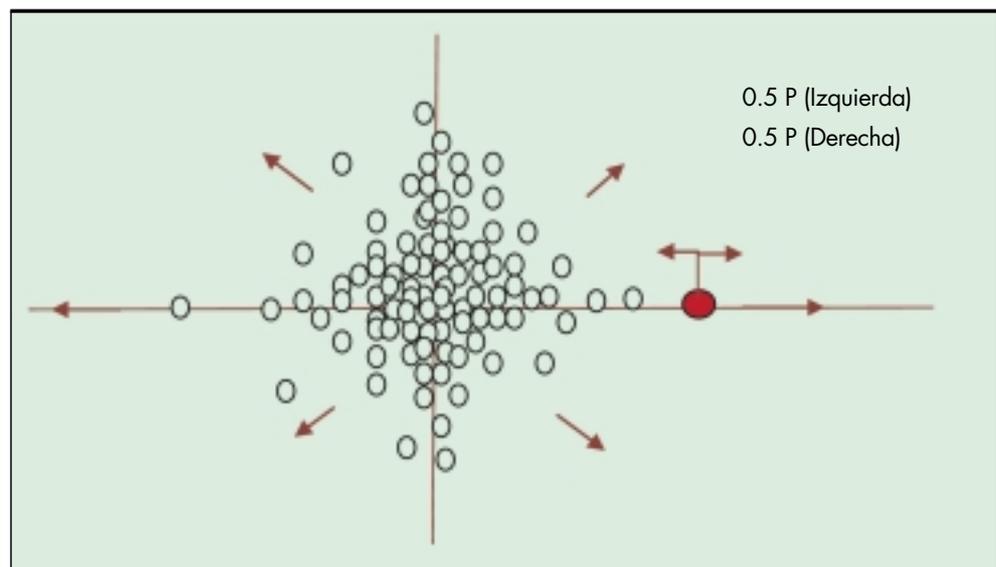


FIGURA 3. Movimiento Random Walk o totalmente aleatorio.

aplicar y con la precisión adecuada, ha sido obviada bien por simple definición de que la aplicación de las ecuaciones (21) y (22) no es posible en un tiempo inicial (llamado periodo "Convectivo") o por la aplicación de complejos modelos matemáticos. Estas dos "soluciones" extremas por su puesto no son de ningún modo satisfactorias pues falsean el entendimiento cabal del proceso y por lo tanto limitan la capacidad explicativa y predictiva de la teoría [14][15].

Una causa muy probable para este desacople entre teoría y experimento puede ser el hecho de que el fenómeno de extendimiento aleatorio de las partículas de soluto en un flujo natural sea evidentemente un proceso que ocurre en dos dimensiones mientras que la ecuación diferencial (y su solución) que intenta describirlo se define en una sola coordenada (longitudinal). El mecanismo general de dispersión en dos dimensiones se explica a partir del esquema idealizado de las Figuras 4 y 5.

En este primer esquema simplificado se tiene una masa de soluto que se dispersa transversalmente al ser inyectado en un punto del eje apareciendo entonces un movimiento microscópico de naturaleza aleatoria (descritos por las pequeñas flechas carmesí) que macroscópicamente se caracteriza como un desplazamiento masivo tipo Random Walk. Lo primero para entender esta dinámica doble es definir la velocidad media de un flujo natural, U como el resultante de un campo diverso de velocidades por unidad de área distribuido en toda la sección del flujo, $v(S,X)$, desde el límite a hasta el límite b para el área y una segunda integración para X (desde $x1$ a $x2$).

$$U = \int_{x1}^{x2} \int_a^b v(S)dSdX \quad (23)$$

Entonces, el valor Promedio de la velocidad del flujo en realidad es la resultante de la integración propia de múltiples vectores con diferente dirección y modulo. Este campo de velo-

cidad en cada punto es entonces correlacionado con la existencia de la velocidad promedio general. Una vez que una masa de trazador ha sido vertida en el centro de un tubo idealizado de flujo, Figura 4, toma lugar una difusión a través del eje transversal (radial, Y desde cero hasta y_0). Esta difusión es de naturaleza Fickiana, es decir proporcional al gradiente de concentración sobre ese eje. En este eje la distribución de partículas individuales es aleatoria de acuerdo con una dinámica Random Walk. La concentración en el eje transversal es entonces una función Gaussiana decadente, $C(y)$. En seguida es necesario tomar en cuenta el efecto del movimiento macroscópico longitudinal marcado fundamentalmente por un campo distribuido de velocidades en ese eje que tienen su máximo sobre el eje central del tubo idealizado y su menor valor en las cercanías de la pared externa (en y_0) Figura 5.

Entonces, aunque en cada punto del campo de velocidad hay un vector definido, en cada instante cada uno de esos puntos puede ser o no ocupado por una partícula de soluto ya que la posición de cada una de estas partículas es una función aleatoria que deviene así por la naturaleza propia del desplazamiento Random Walk.

El resultado es una distribución aleatoria también de las velocidades de las diversas partículas (pequeñas flechas verdes). La naturaleza de esta nueva distribución es por supuesto del tipo Random Walk (Gaussiana) si esta se define en términos de los promedios de los parámetros de interés y sobre el supuesto de independencia de sucesos, puesto que el bien conocido "Teorema central del límite" de la estadística matemática[16] establece que en un esquema de muestreo a partir de poblaciones que sean incluso diferentes de la Gaussiana, tienden a ser de esta naturaleza cuando el número de muestras tiende a infinito (lo que es el caso en poblaciones moleculares como la que se involucran en los fluidos) .

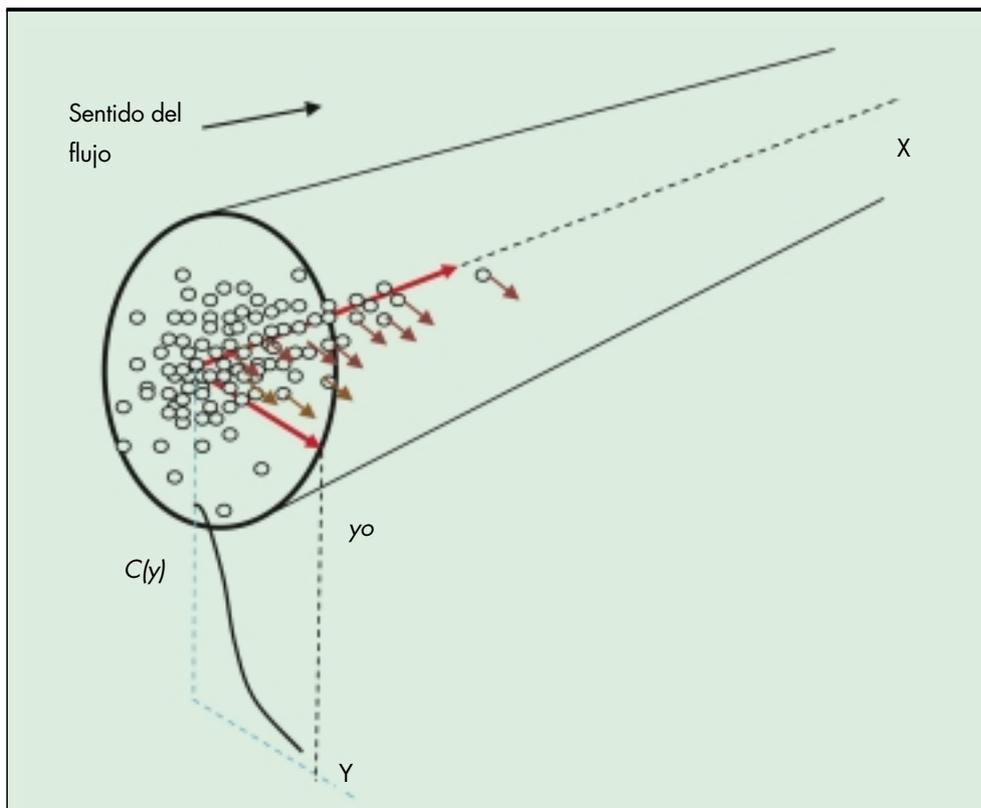


FIGURA 4. Extendimiento aleatorio del soluto en un flujo en sentido transversal.

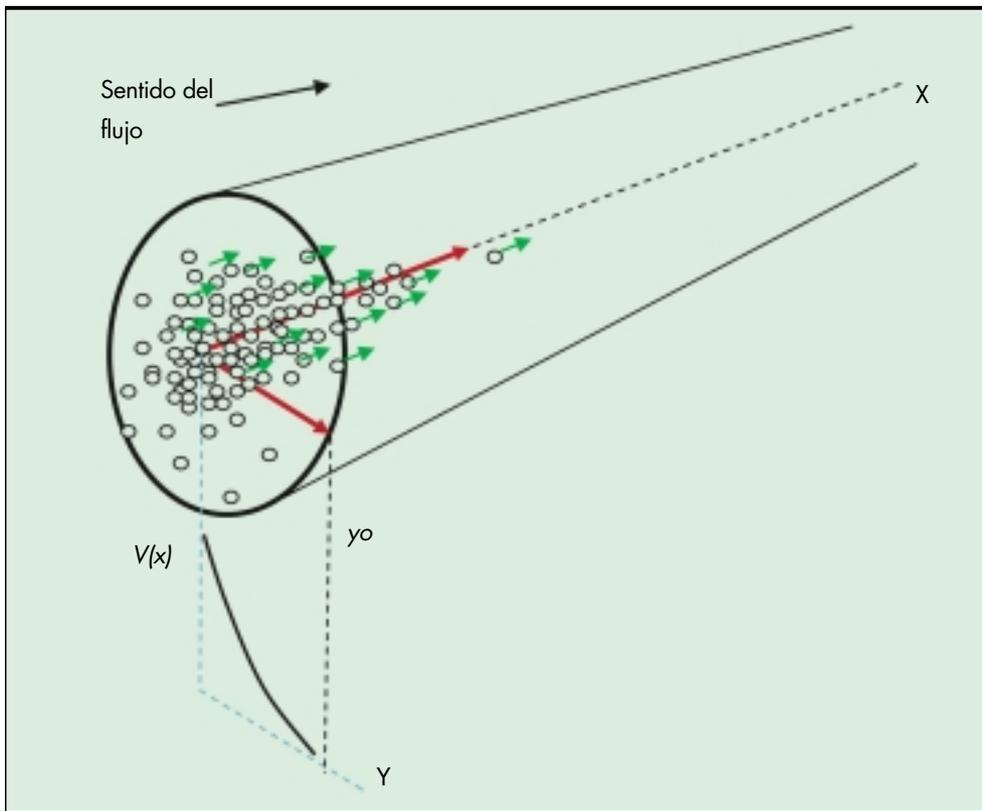


FIGURA 5. Efecto del movimiento longitudinal gracias al campo de velocidades.

Entonces, significativamente se irá a producir una separación aleatoria de cada par de partículas que se consideren sobre el campo de velocidad, lo que macroscópicamente se observara como un ensanchamiento del grupo de partículas miradas en el eje longitudinal. La pluma de soluto toma su característica forma de “bolsa alargada” que se va rompiendo en la medida en que progresa el movimiento del flujo.

Este es el efecto de “Dispersión” que se observa en los cauces naturales. Corrientemente este efecto se explica por

la diseminación de las partículas del soluto gracias al efecto cortante del fluido (*shear effect*) lo cual es esencialmente cierto, como ya se ha demostrado. Lo importante de esta dinámica así planteada es que la dispersión es fundamentalmente entendida como un fenómeno *en dos dimensiones*, pues no puede entenderse sin la participación de la difusión transversal que va colocando azarosamente las partículas de soluto en el campo longitudinal de velocidades. Figura 6.

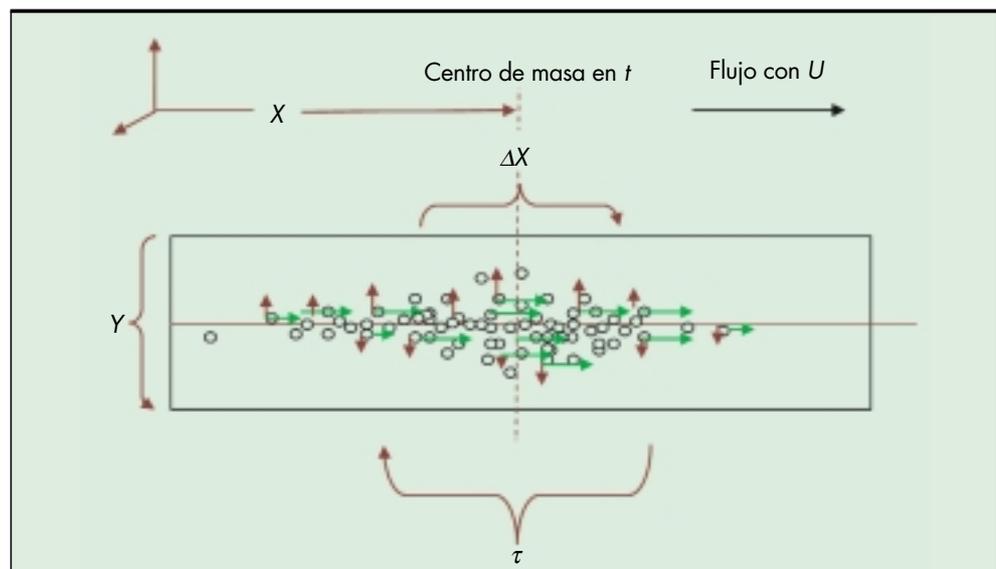


FIGURA 6. Efecto dispersivo combinado de difusión lateral y velocidad longitudinal.

Sobre esta conclusión es entonces obvio que la aplicación directa de una ecuación diferencial mono-dimensional en X , como es la de Taylor (y de su solución analítica que es la de Fick) en principio no se acoplara a los resultados experimentales que ocurren en dos dimensiones.

5. MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL, LA NATURALEZA TEMPORAL DEL COEFICIENTE LONGITUDINAL DE DISPERSIÓN Y EL EFECTO POSTERIOR DE LA TURBULENCIA

Descartando la solución trivial al problema de describir una dinámica bidimensional consistente en usar una solución explícita bidimensional, se explorará en este apartado una salida alternativa usando el concepto de dependencia temporal para el Coeficiente E para la ecuación mono-dimensional.

Entonces, con base en el esquema simplificado de la Figura 6 es factible establecer en principio la dependencia temporal simple del Coeficiente Longitudinal de dispersión para que se pueda configurar el efecto de combinación de movimientos. Se parte del efecto básico de la velocidad promedio del flujo en generar un desplazamiento macroscópico en el eje X visto desde la orilla del mismo.

$$X = U \times t \tag{24}$$

En seguida el efecto dispersivo que como se dijo es Gaussiano puede ser escrito en términos de un desplazamiento longitudinal característico usando la relación básica de Einstein-Smoluchowsky [17]:

$$\Delta X^2 = 2 E \Delta \tau \tag{25}$$

Aunque no aparece explícitamente, esta dinámica aleatoria aparece necesariamente como consecuencia de un movimiento difusivo *lateral*. Por lo tanto se toman en cuenta los dos ejes X y Y . Diferenciando la ecuación (24) y haciendo $\tau = \beta t$ para relacionar esta ecuación con el fenómeno dispersivo, queda para el movimiento advectivo:

$$\Delta X = U \times \frac{\Delta \tau}{\beta} \tag{26}$$

Esta expresión al cuadrado queda:

$$\Delta X^2 = U^2 \times \left(\frac{\Delta \tau}{\beta}\right)^2 \tag{27}$$

Igualando la relación (25) y la (27):

$$2E\Delta\tau = U^2 \left(\frac{\Delta\tau}{\beta}\right)^2 \tag{28}$$

Por lo tanto:

$$E = \left(\frac{1}{2\beta}\right) \times U^2 \times \Delta t \tag{29}$$

Esta expresión significa que la dispersión como resultado Random Walk de la difusión, que depende a su vez del campo de velocidad longitudinal implica que el Coeficiente Longitudinal de dispersión debe ser una función del tiempo.

Sin embargo surge una inquietud: ¿Qué ocurre cuando cesa el efecto difusivo del soluto en el eje transversal? O sea cuando ocurre el bien conocido efecto de “mezcla completa” en el que el soluto cubre casi uniformemente toda la sección transversal del flujo. En este caso el Coeficiente Longitudinal de dispersión no puede ser constante en razón de que la naturaleza totalmente irreversible del proceso de Dispersion-Difusion exige que el sistema este siempre transmitiendo calor hacia los alrededores y esto implica un factor que introduce

un cambio permanente en las distribuciones estadísticas consideradas. Este hecho se refleja como que hay una función del tiempo, $k(t)$, que debe agregarse adicionalmente a la ecuación (28).

$$E = \left(\frac{k(t)}{2\beta}\right) \times U^2 \times \Delta t \tag{30}$$

Por esta razón, este coeficiente nunca puede ser una constante para que pueda corresponder a un modelo acorde con las restricciones reales de los procesos físicos considerados.

Hay entonces dos fuentes principales de dependencia temporal en la definición del Coeficiente Longitudinal de dispersión: Una que prevalece en el periodo inicial (antes de lograrse la “Mezcla completa” del soluto en la sección transversal del flujo) que es lineal. Otra que sobrevive después de este punto de quiebre y que corresponde a los efectos de la irreversibilidad del proceso y que por lo tanto nunca desaparece. Este segundo efecto no es necesariamente lineal. Despejando el coeficiente E de la ecuación de velocidad media en función del fenómeno de transporte de masa en flujos naturales queda una expresión totalmente concordante con lo desarrollado en este apartado:

$$E(t) = \frac{\phi(t)^2 U^2 \beta t}{2} \tag{31}$$

La mencionada función $\Phi(t)$ corresponde al grado de asimetría de la curva de soluto medida desde la orilla y su medición se hace de manera directa sobre esta curva. Esta función se calcula en la práctica sobre los puntos notables de la función Gaussiana.

6. REDEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE FICK Y CONSECUENCIAS DE QUE EN ESTA ECUACIÓN DE TRANSPORTE ESTE INOLUCRADA LA HIDRÁULICA DENTRO DEL ESQUEMA ALTERNATIVO PLANTEADO

Si se parte de la ecuación anterior (31) y se reemplaza en la ecuación clásica de Fick (22) se llega a una nueva relación para la concentración del soluto en función del tiempo. Aquí el sumando C_0 es la concentración salina de fondo del cauce considerado. [18]:

$$C(t) = \frac{M}{Q \times \phi \times t \times \sqrt{2\pi\beta}} e^{-\frac{(X-Ut)^2}{2\beta t^2/2t^2}} + C_0 \tag{32}$$

Esta ecuación que resulta de definir al Coeficiente Longitudinal de dispersión como función del tiempo, y por lo tanto acoplado a la realidad bidimensional del proceso de transporte difusion-dispersión, representa de forma muy precisa las curvas experimentales de trazador, a diferencia de la ecuación clásica, como ya se ha señalado. Esto se muestra en la Figura 7 en la que se ve la coincidencia casi exacta entre modelo teórico (rojo suave) y curva experimental (azul irregular).

Pero además de esta importante consecuencia, esta ecuación modificada tiene algo que la de Fick original no tiene: involucra además un nuevo dato hidráulico cual es el caudal. Este dato se calcula entonces poniendo el exponente neperiano a un argumento cero, cuando vale la concentración pico, C_p .

$$Q = \frac{M}{C_p \times \phi \times t \times \sqrt{2\pi\beta}} \tag{33}$$

Esta definición del caudal debe coincidir con la ecuación clásica basada en la conservación de la masa para solutos conservativos.

caudal toma una naturaleza de gran exactitud pues cubre todo el volumen de flujo correspondiente.

Por último en este punto: Nótese que si $1/\Phi(t)$ cumple el papel de C , la Constante de Chezy, cuando se comparan ambas definiciones es evidente que tanto la una como la otra son proporcionales inversas a la raíz cuadrada de su factor de pérdida correspondiente, k y f , según ecuaciones (2) y (15) mostrando por lo tanto una gran analogía, como era de esperarse. El coeficiente k a diferencial del coeficiente f , no es adimensional.

8. UNA INTERPRETACIÓN CINEMÁTICO-TEMPORAL AL COMPORTAMIENTO REAL DE LAS CURVAS DE SOLUTO EN FLUJOS NATURALES. CÁLCULO APROXIMADO DE LA CONCENTRACIÓN PICO DE SOLUTO $C_p(t)$ Y SU FUNCIÓN $\Phi(t)$

Un parámetro muy importante por sus implicaciones en el comportamiento ambiental del fenómeno de transporte del soluto es la concentración pico del mismo. Se puede definir clásicamente a partir de la ecuación (22) así:

$$C_p(t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi E t}} = \frac{M}{A\sqrt{4\pi E}} \times \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (36)$$

Es claro que en este enfoque la concentración pico depende inversamente de la raíz cuadrada del tiempo. En su ya clásico reporte sobre la Dispersión Longitudinal de solutos en cauces naturales el experto del USGS de los Estados Unidos H.E. Jobson [21] analiza de manera estadística diversas consideraciones sobre este concepto transporte de masa, señalando la siguiente relación experimental más general, propuesta inicialmente por H.B. Fischer

$$C_{up}(t) \propto t^{-\lambda} \quad (37)$$

Jobson señala que para tiempos de dispersión muy cortos el parámetro λ es aproximado a 1.5 mientras que para tiempos muy largos este es $\lambda \rightarrow 0.5$, acercándose a la definición Fickiana de referencia. Enfatiza sin embargo que un valor típico es de $\lambda \approx 0.7$ y que por esta razón el modelo Fickiano (con exactamente $\lambda=0.5$) no puede representar apropiadamente la dispersión longitudinal en los cauces naturales. Justifica esta

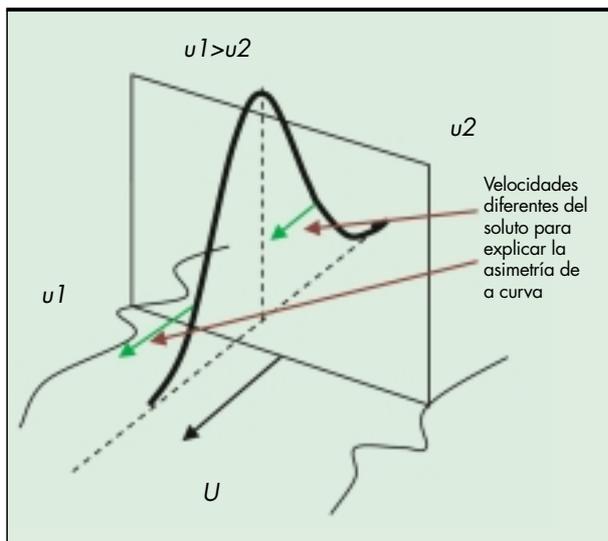


FIGURA 9. Asimetría de la curva de trazador como algo real.

desviación del modelo teórico en el comportamiento de la concentración pico por la presencia de rápidos, meandros, piscinas y otros entes interferentes que aparentemente incrementan el proceso de mezcla en el eje longitudinal.

La esencia de esta explicación corriente es que la asimetría de la curva de trazador es objetivamente el resultado de un proceso físico que modifica la distribución de las partículas de soluto, por ejemplo como lo explican detalladamente Fischer, Spreafico & van Mazikf Se parte entonces de que adelante y atrás del plano móvil asociado a la sección transversal del trazador moviéndose con la velocidad media U , existe una asimetría real de las velocidades del trazador. Figura 9. El origen de este desbalance de velocidades es ampliamente debatido en la literatura técnica correspondiente, sin un éxito concluyente. Otros autores como Chapra y Lees inspirados en este concepto expresan que la asimetría de las plumas de soluto son debidas a las llamadas "zonas muertas" y proponen un esquema de conservación que es normalmente ajustado por una metodología probabilística del tipo "Monte Carlo" [22].

Sin embargo, la asimetría de estas curvas puede explicarse totalmente sin tener que considerar estos mecanismos ficticios, ya que este efecto propiamente dicho está implícito en la aplicación de la transformación de Galileo al argumento exponencial de la ecuación de Fick (22). Esta transformación implica rigurosamente una composición de velocidades como se muestra en la Figura 10 y que conducen inequívocamente a una asimetría de la curva de soluto vista desde la orilla. En efecto, un observador en este sistema de referencia vera una velocidad advectiva U sumarse con una velocidad difusiva $+V_{dif}$ (correspondiente al flanco frontal) y luego restarse con la misma $-V_{dif}$ (correspondiente al flanco posterior).

Por otro lado un observador moviéndose sobre el pico de la curva con velocidad U , no realizara esta misma composición ya que para él la velocidad no existe y por lo tanto vera las dos velocidades de difusión de los dos flancos sin deformación. Este observador vera una curva simétrica, lo que indica que

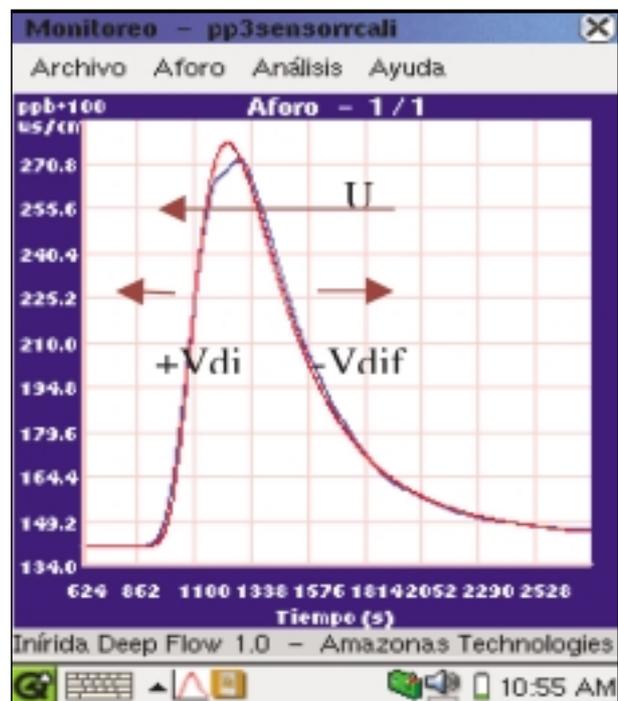


FIGURA 10. Composición de Galileo de U , $+V_{dif}$ y $-V_{dif}$.

considerar la asimetría de las curvas de soluto no puede tener un carácter absoluto. De aquí que la idea de un “centroide de concentración” como un hecho de la realidad, aparte del análisis cinemático no tiene sentido. En este Artículo no se considera la descripción del transporte de masa en los flujos naturales ligada a un tal desplazamiento del centro de masa.

Ahora bien, es importante entender que ya la ecuación clásica de Fick mediante la transformación de Galileo incluye la asimetría de la curva de soluto conservativo y por lo tanto el problema señalado por el profesor Jobson no puede ser sobre la *ocurrencia* de este fenómeno, sino por el contrario las proporciones erradas de las curvas teóricas, lo cual no puede ser causado sino por un defecto funcional en la definición clásica. Esto tiene que ver con el hecho ya tratado de que el coeficiente Longitudinal de dispersión, $E(t)$, debe ser necesariamente una función del tiempo para que pueda acoplar al mismo tiempo movimientos transversales también. Si ello no ocurre (con coeficientes E constantes) se tendrán diferencias significativas entre modelo teórico y curvas experimentales.

Paso seguido es interesante establecer metodologías prácticas para poder predecir en avance tanto las concentraciones pico (máximas) de solutos, $C_p(t)$, como las funciones $\Phi(t)$ asociadas. El primer método es de gran importancia para los estudios de calidad de aguas toda vez que permite establecer de modo teórico el posible impacto de contaminaciones en tal o cual entorno fluido. El segundo método tiene gran repercusión para la medición de caudal y para el establecimiento de zonas críticas de contaminación en cauces naturales.

8.1. MÉTODOS DE CÁLCULO DE $C_p(t)$ Y $\Phi(t)$:

A partir de la ecuación modificada de Fick se expresa el valor para la concentración pico, según la ecuación (33):

$$C_p = \frac{M}{Q \phi t \sqrt{2\pi\beta}} \tag{38}$$

Reubicando a Φ :

$$C_p \phi = \frac{M}{Q t \sqrt{2\pi\beta}} \tag{39}$$

Multiplicando el numerador y denominador por α un factor de utilidad para aplicar las dos definiciones por aparte:

$$C_p \phi = \frac{M \alpha}{Q \alpha t \sqrt{2\pi\beta}} \tag{40}$$

Operando algebraicamente el tiempo:

$$C_p \phi = \frac{M \alpha}{Q \alpha t^{(3)} \sqrt{2\pi\beta}} \tag{41}$$

Entonces:

$$C_p \phi = \frac{M \alpha t^{-3}}{Q \alpha t^{(3)} \sqrt{2\pi\beta}} \tag{42}$$

Separando:

$$C_p \phi = \frac{M}{Q \alpha t^{(3)} \sqrt{2\pi\beta}} \times \alpha t^{-3} \tag{43}$$

Definiendo por aparte:

$$\phi = \frac{M}{Q \alpha 1.16} \times \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \tag{44}$$

Y:

$$C_p(t) = \alpha t^{-3} = \alpha t^{-0.66666666} \approx \alpha t^{-0.7} \tag{45}$$

Tal como señalo Jobson para el valor típico del exponente λ . Por otro lado es importante hacer notar que para la definición clásica de $C_p(t)$ según Fick, Ecuación (22), con el tiempo

al exponente $\lambda= 0.5$ en el denominador no existe ningún conjunto de valores que cumplan con lo requerido para que la fórmula coincida con el dato experimental.

El coeficiente α se obtiene examinando cada caso experimental. Para ello se calcula primero la función temporal específica para el caso i y luego se mide la concentración pico correspondiente de la curva de trazador y se utiliza la siguiente ecuación:

$$\alpha_i \approx \frac{C_p(t_i)}{(t_i)^{0.5}} \tag{46}$$

Un valor más preciso es el valor promedio para este parámetro tomado en todas las n curvas del experimento:

$$\langle \alpha_i \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_i \frac{C_p(t_i)}{(t_i)^{0.5}} \tag{47}$$

Por otro lado, del análisis de las ecuaciones (44) y (45) se puede verificar que el error relativo de la función $\Phi(t)$ es mayor que el correspondiente a la función $C_p(t)$ ya que el número de variables para la primera función es mayor que el de la segunda. En términos generales, será más precisa la medición y modelación de la Concentración pico que la de la función cinemática Φ . Una descripción completa de la evolución de plumas de contaminantes en los flujos naturales debe incluir la descripción de estas dos funciones.

9. APLICACIÓN PRÁCTICA DE TRAZADORES A LOS ESTUDIOS DE CALIDAD DE AGUAS COMO UNA ALTERNATIVA ÓPTIMA

Se ha establecido concluyentemente que el comportamiento de un polutante soluble es muy bien imitado por la evolución de ciertos solutos especiales llamados “trazadores”. Por lo tanto, la forma directa de realizar estudios conjuntos de hidráulica y transporte de masa es utilizando sustancias inertes que tengan un gran parecido físico con las partículas del fluido (en este caso agua). No menos importante desde un punto de vista de la “completud” de los estudios actuales de calidad de agua es que este tipo de mediciones basadas en trazadores llevan inherentemente la más grande cantidad de información posible, puesto que se captan fenómenos que involucran los complejos fenómenos físico-químicos que ocurren en el seno del fluido en turbulencia.

Estas sustancias trazadoras y deben tener una propiedad física que permita detectarlos fácilmente en el flujo mediante un sensor apropiado (conductividad, fluorescencia o radioactividad) y existen dos formas usuales de aplicación: Vertimiento súbito o “Slug” por su nombre en Inglés y vertimiento continuo. En este Artículo las formulas están aplicadas al tipo de vertimiento súbito.

Los trazadores tienen diferentes características para diferentes aplicaciones, tal como se muestra en la Tabla 1.

Enseguida se muestra el procedimiento de vertimiento del trazador, su desperdigamiento por el flujo, la medición en un punto aguas abajo y el despliegue de la información de la curva correspondiente en la pantalla del instrumento. Todo esto en tiempo real. Figura 11.

Esta metodología será aplicada a un par de cauces diferentes con el ánimo de establecer la validez de las diferentes ecuaciones presentadas en el Artículo. En cuanto al equipo utilizado una gran ventaja para el desarrollo de la medición presentada es que se cuenta con el instrumento especial denominado IDF que es un software especializado con una presentación por pantalla que permite un manejo interactivo con el operador. Una vista básica del equipo se muestra en la Figura 12.

Tipo de trazador	Características	Aplicaciones
1.- Iónico	Fácil consecución	Se utiliza en pequeños cauces no contaminados
	Fácil manejo	
	Menor detectabilidad	
	Sujeto a ruido e interferencia	
	Muy bajo impacto ambiental	
	Instrumentación simple	
	Calibración simple	
2.- Fluorescente	Consecución no inmediata	Se utiliza en cauces mayores o en cauces muy contaminados.
	Manejo más especializado	
	Mucho mayor detectabilidad	
	Sujeto a ruido e interferencia	Ideal para lagos y lagunas o en plantas de tratamiento
	Muy bajo impacto ambiental usado en cantidades usuales	
	Instrumentación más compleja	
	Calibración simple	
3.- Radioactivo	Consecución difícil	Se utiliza en cauces de difícil manejo por su contaminación extrema.
	Manejo con precauciones	
	La máxima detectabilidad	
	Sujeto a muy bajo ruido e interferencia	
	Muy bajo impacto ambiental usado en cantidades usuales	
	Instrumentación simple	
	Calibración simple	
4.- Otros efectos	Depende del tipo de efecto seleccionado. Algunos utilizan efectos térmicos o efectos ópticos, entre otros.	Se usa cuando los otros efectos corrientes tienen inconvenientes de aplicación

TABLA 1. Diferentes características y aplicaciones de los trazadores.

Este equipo consta de un sensor de conductividad ya que el trazador utilizado es cloruro de sodio refinado, de una interfaz que transforma las señales análogas desde el sensor en señales digitales apropiadas para ser manejadas por un computador de mano (PDA) que tiene un software especial para un manejo interactivo con el usuario. El instrumento IDF permite en general, utilizar simultáneamente trazadores iónicos y fluorescentes.

10. APLICACIÓN EXPERIMENTAL DEL MODELO TEMPORAL PARA EL COEFICIENTE LONGITUDINAL DE DISPERSIÓN Y CÁLCULO DE LA VELOCIDAD MEDIA DEL FLUJO CON LA ECUACIÓN CONEXA: MEDICIONES EN EL CANAL "GUAYMARAL" Y RÍO "CALI" EN COLOMBIA

10.1. MEDICIONES EN UN PEQUEÑO CANAL EN TIERRA: "GUAYMARAL"

Se aplicaran primero las formulas y conceptos desarrollados en este Artículo a un pequeño cauce artificial excavado en tie-

rra denominado "Guaymaral", ubicado en las afueras de la ciudad de Bogotá, Colombia.

Este es un cauce de fácil acceso, con agua relativamente transparente. En este caso se hicieron tres vertimientos a 15, 20 y 35 metros del instrumento de medición IDF, utilizando una masa de 139.4 gramos de sal común. Este aforo fue realizado el día 17 de marzo de 2011. Figura 13.

Se muestran primero la pantalla obtenida de los tres vertimientos de trazador iónicos mediante la herramienta fluvial IDF. La pantalla muestra la señal en unidades de conductividad ($\mu S-C$) que se operan luego en unidades de concentración (Mgr/l). También existe una escala superpuesta para utilizar simultáneamente trazador fluorescente (Rodamina WT) que se mide en microgramos por litro ($ppbs$, que en este caso no se utilizó y por lo tanto esta escala no se aplica). Las marcas rojas corresponden al instante en que se realizaron los tres vertimientos. La primera curva se realizó a 25 metros, la segunda a 50 metros mientras que la última se realizó a 15 metros. Figura 14.

En la Figura 15 se muestra en Excel los datos específicos que suministra el equipo para su tratamiento y revisión. Es-

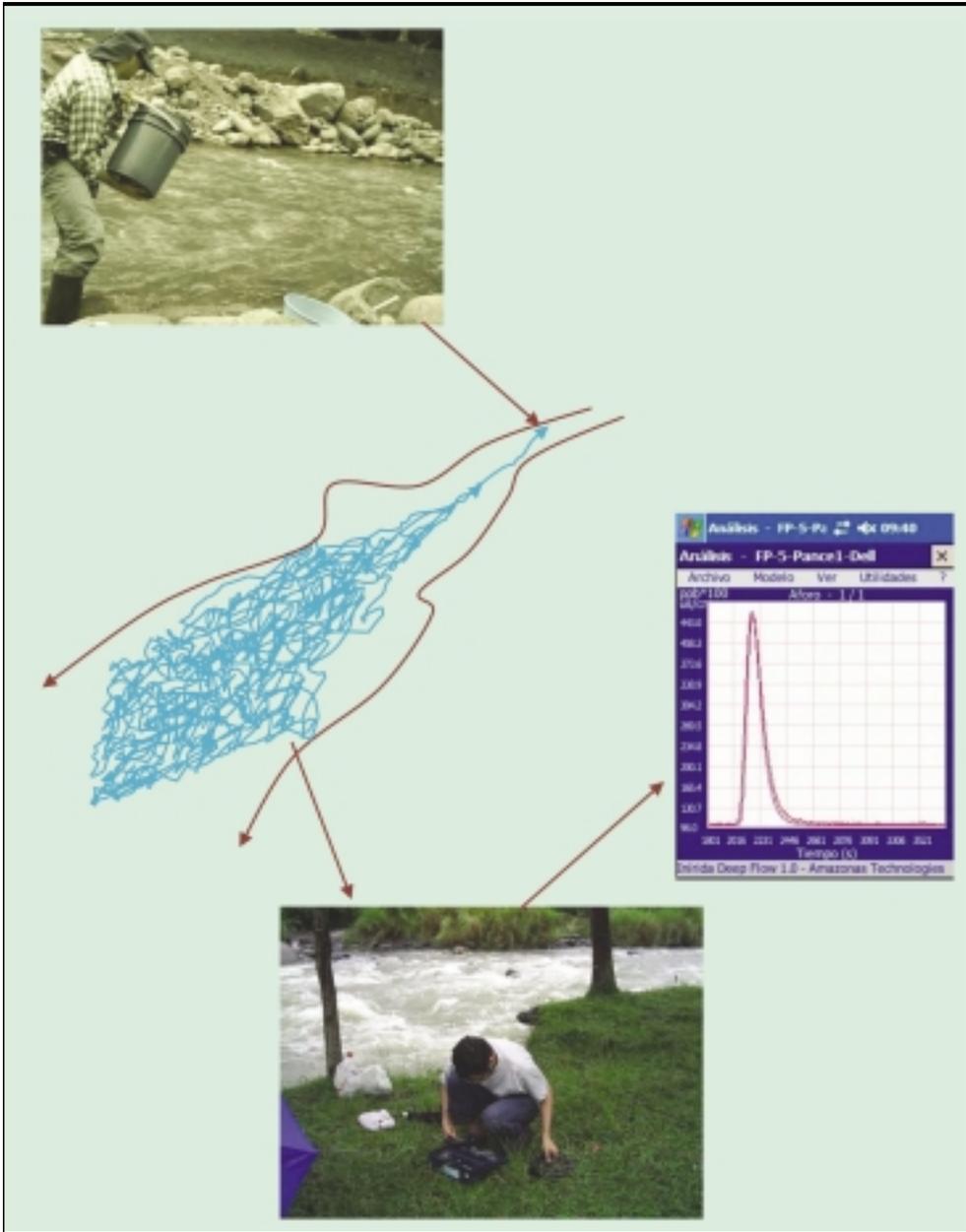


FIGURA 11. Trabajo con trazadores: Vertimiento, medición y despliegue de la información.



FIGURA 12. Equipo IDF utilizado para las mediciones. A) Sensor de conductividad. B) Interface. C) PDA.



FIGURA 13. Aspectos del cauce "Guaymaral" y proceso de medición con IDF.

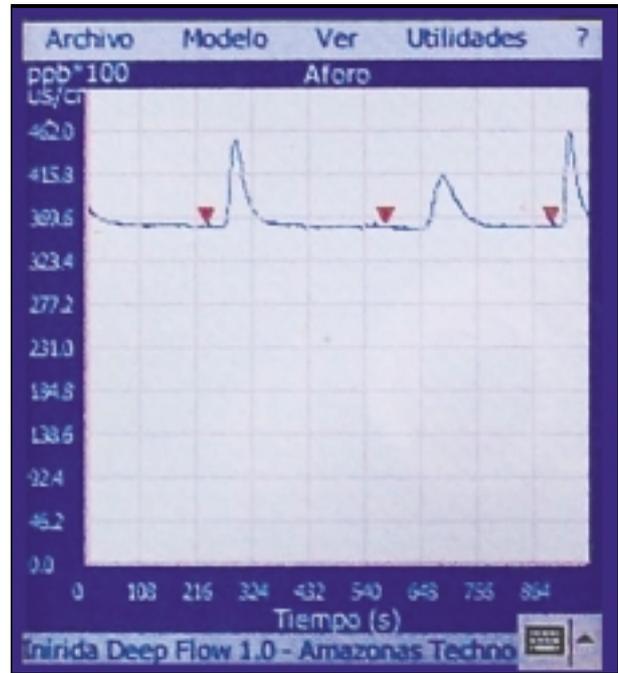


FIGURA 14. Pantalla del IDF con los tres vertimientos.

tos datos se guardan inicialmente en la memoria de la PDA y se bajan posteriormente para su examen eventual en la oficina.

En la Tabla 2 se consignan los datos correspondientes a los tres vertimientos de acuerdo con la información suministrada por la herramienta fluvial IDF para su análisis posterior. Todas las mediciones se hicieron con un Ancho $W= 1.0 m$, y una concentración base en el cauce de $Co= 175.5 Mgr/l$ teniendo en cuenta una relación aproximada de 2.08 entre concentración y conductividad a $20^{\circ}C$ aproximadamente (cálculo utilizando los datos de la electroquímica).

El caudal se mide por los dos procedimientos diferentes programados en el software del IDF: Un primer procedimiento clásico, Q_a , utilizando la ley de conservación de la masa (suponiendo el proceso de transporte conservativo) y calculando el área bajo la curva para cada experimento. Un segundo procedimiento, Q , que utiliza la ecuación (33) del método propuesto en este artículo.

10.2. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Inicialmente se presentan los datos, verificaciones y curvas para cada uno de los tres experimentos. Posteriormente se hace un análisis en conjunto utilizando los valores promedios de la Tabla 2.

10.3. DATOS INDIVIDUALES

1. Verificación de los datos para la nueva ecuación de velocidad:

$$U_{15} = \frac{1}{\phi_{15}} \sqrt{\frac{2E_{15}}{\tau_{15}}} = 0.440 m/s \approx \frac{1}{0.60} \sqrt{\frac{2 \times 0.256}{7.33}}$$

$$U_{25} = \frac{1}{\phi_{25}} \sqrt{\frac{2E_{25}}{\tau_{25}}} = 0.458 m/s \approx \frac{1}{0.48} \sqrt{\frac{2 \times 0.276}{11.7}}$$

$$U_{50} = \frac{1}{\phi_{50}} \sqrt{\frac{2E_{50}}{\tau_{50}}} = 0.455 m/s \approx \frac{1}{0.40} \sqrt{\frac{2 \times 0.395}{23.6}}$$

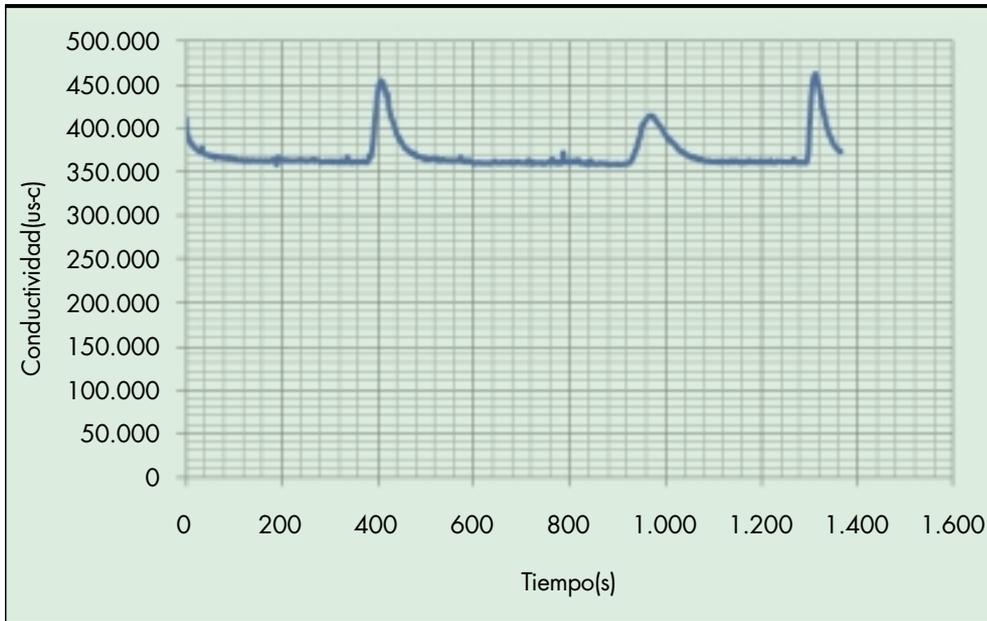


FIGURA 15. Datos en Excel para Cauce Guaymaral.

Se tiene un dispersión porcentual de velocidad del 4% (entre el mayor y menor valor de 0.458 m/s y 0.440 m/s) lo cual implica un ligero régimen variado para este cauce en particular.

2. Verificación de congruencia de los datos de caudal por métodos diferentes:

$$\begin{aligned}
 Q_{15} &= 118.2 \text{ l/s} & Q_{a15} &= 118.5 \text{ l/s} \\
 Q_{25} &= 102.4 \text{ l/s} & Q_{a25} &= 94.4 \text{ l/s} \\
 Q_{50} &= 100.1 \text{ l/s} & Q_{a50} &= 98.2 \text{ l/s}
 \end{aligned}$$

En ninguno de estos tres casos el error porcentual supera 2%, siendo entonces una congruencia muy precisa. Los datos de caudal para 15 metros y 25 metros son un tanto incrementados por cuanto a estas distancias el trazador no ha cubierto completamente la sección transversal, lo cual ocurre aproximadamente para la última distancia de 50 metros.

3. Verificación del valor de las concentraciones pico del trazador a través del trecho.

Para este análisis se utiliza la ecuación (45) empleando un valor de α promedio de 623,5 Mgr/l/s. tomado de los cálculos correspondientes para la Tabla 2 de datos del IDF. Se muestra la graficación teórica y los datos experimentales tanto en

función del tiempo como de la distancia. Los datos experimentales se muestran como cuadrados discretos mientras que el modelo teórico para este parámetro se muestra como una línea continua. Figura 16.

4. Verificación del valor de la función Φ :

Se utiliza la ecuación (44) con un valor promedio de $\alpha \approx 623,5$ Mgr/l/s. Los datos experimentales se muestran como cuadrados discretos mientras que el modelo teórico para este parámetro se muestra como una línea continua. Figura 17.

5. Verificación de $E(t)$

Se puede representar $E(t)$ como $E(X)$ que es más significativo para los efectos del experimento. Si se tiene una velocidad dada $U=0.451$ m/s en promedio se puede establecer la distancia X correspondiente a cada tiempo, y por lo tanto definiendo a E en función de la distancia, tal como se hace en la Figura 18. En línea punteada se muestra el valor medio para el experimento. Como es evidente, este Coeficiente no es una constante para que pueda modelarse correctamente los eventos de transporte en dos dimensiones.

6. Modelación de cada vertimiento

Se incluyen las modelaciones teóricas de los datos experimentales para los tres vertimientos realizados en la jornada de

Cauce	X Longitud (M)	τ Tiempo característico (s)	M Masa (Gr)	Φ	Ux Vel. media (M/s)	Qa Caudal (L/s)	Q Caudal (L/s)	Cp Conc. Pico (Mgr/l)	E Coef. Long. de disp. (M ² /s)
Quebrada Guaymaral 1	15	7.33	139.4	0.60	0.440	118.5	118.2	50,5	0.256
Quebrada Guaymaral 2	25	11.7	139.4	0.48	0.458	94.4	102.4	46,4	0.276
Quebrada Guaymaral 3	50	23.6	139.4	0.40	0.455	98.2	100.1	29,3	0.395
Promedio	-	-	139.4	-	0.451	103.7	106.9	-	
Promedio general	-	-	139,4	-	0,451	105,3		-	0.309

TABLA 2. Resultados de las tres mediciones con el instrumento IDF.

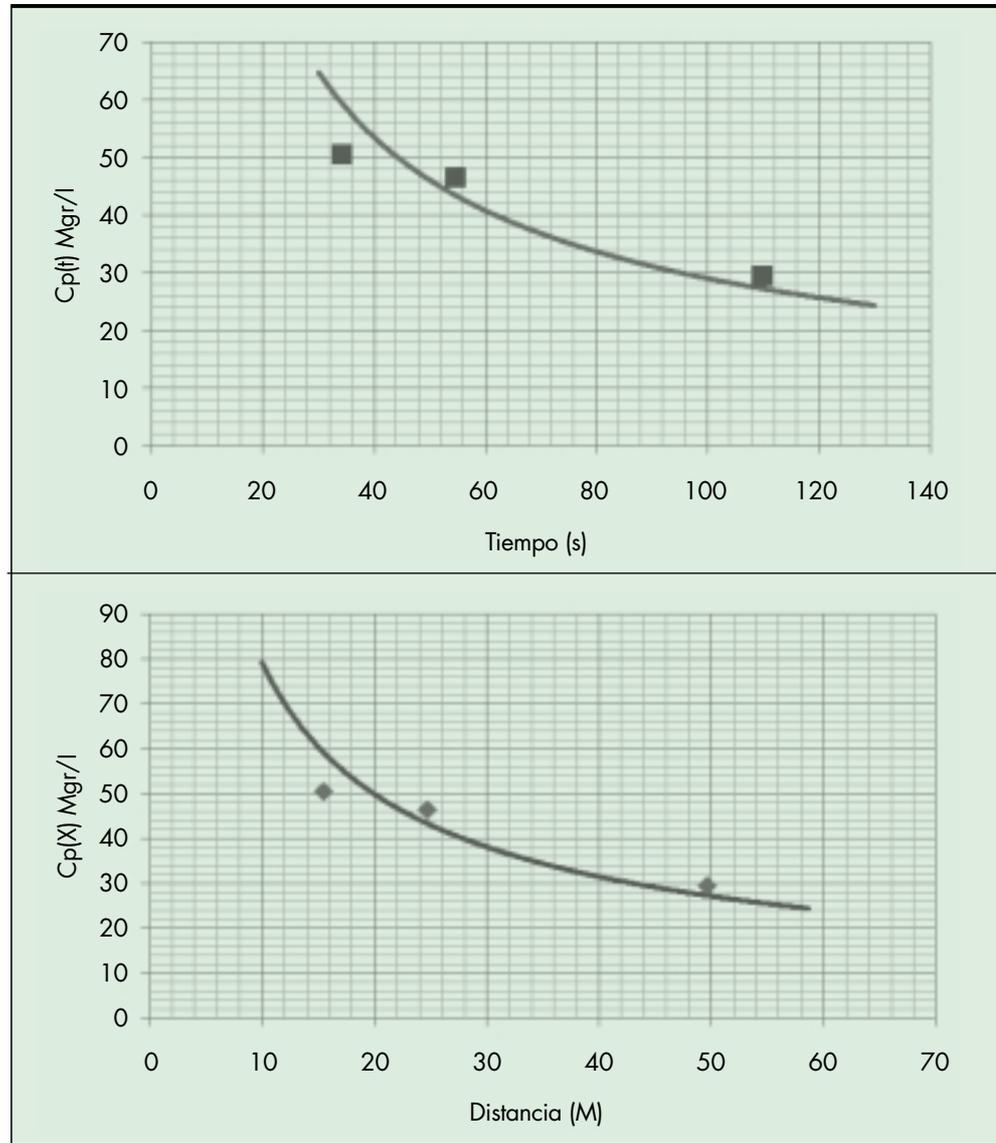


FIGURA 16. Resultados experimentales y curvas teóricas para C_p .

campo documentada, utilizando la formula (32) sobre puesta a los datos experimentales tomados por el equipo IDF. Las curvas reales son las líneas más claras quebradas mientras que los modelos matemáticos son las líneas más oscuras suaves.

6.1. Vertimiento a X=15 m. Figura 19.

Se corrigió el caudal al valor promedio $Q=105,3$ l/s y se puso una distancia de $X=16.5$ m con una corrección de 1.5 metros.

6.2. Vertimiento a X=25 m. Figura 20.

Se corrigió el caudal al valor promedio $Q=105,3$ l/s y se puso una distancia de $X=26$ m con una corrección de 1 metro.

6.3. Vertimiento a X=50 m. Figura 21.

Se corrigió el caudal al valor promedio $Q=105,3$ l/s y se puso una distancia de $X=52$ m con una corrección de 2 metros.

10.4. DATOS PROMEDIO GENERALES

1. Calculo del Área hidráulica:

Como se tienen los datos simultáneos con trazadores del caudal y la velocidad:

$$A = \frac{Q}{U} = \frac{0.233 \text{ m}^3 / \text{s}}{0.451 \text{ m/s}} = 0.233 \text{ m}^2$$

2. Calculo de la profundidad media:

Es factible pues se tienen los datos del ancho promedio y del área hidráulica:

$$h = \frac{A}{W} = \frac{0.233 \text{ m}^2}{1.0 \text{ m}} = 0.233 \text{ m}$$

3. Calculo del Radio hidráulico:

Se emplea la formula usual para este parámetro:

$$R \approx \frac{A}{2h+W} = \frac{0.233 \text{ m}^2}{(2 \times 0.233 \text{ m} + 1.0 \text{ m})} = \frac{0.233 \text{ m}^2}{1.466 \text{ m}} = 0.159 \text{ m}$$

4. Calculo del Coeficiente de resistencia de Chezy:

A partir de la ecuación aproximada de Manning se halla el Coeficiente de Chezy, sabiendo que este estimador puede estar cerca a 0.040 de acuerdo con las características del cauce (Ver fotografías de la Figura 10.)

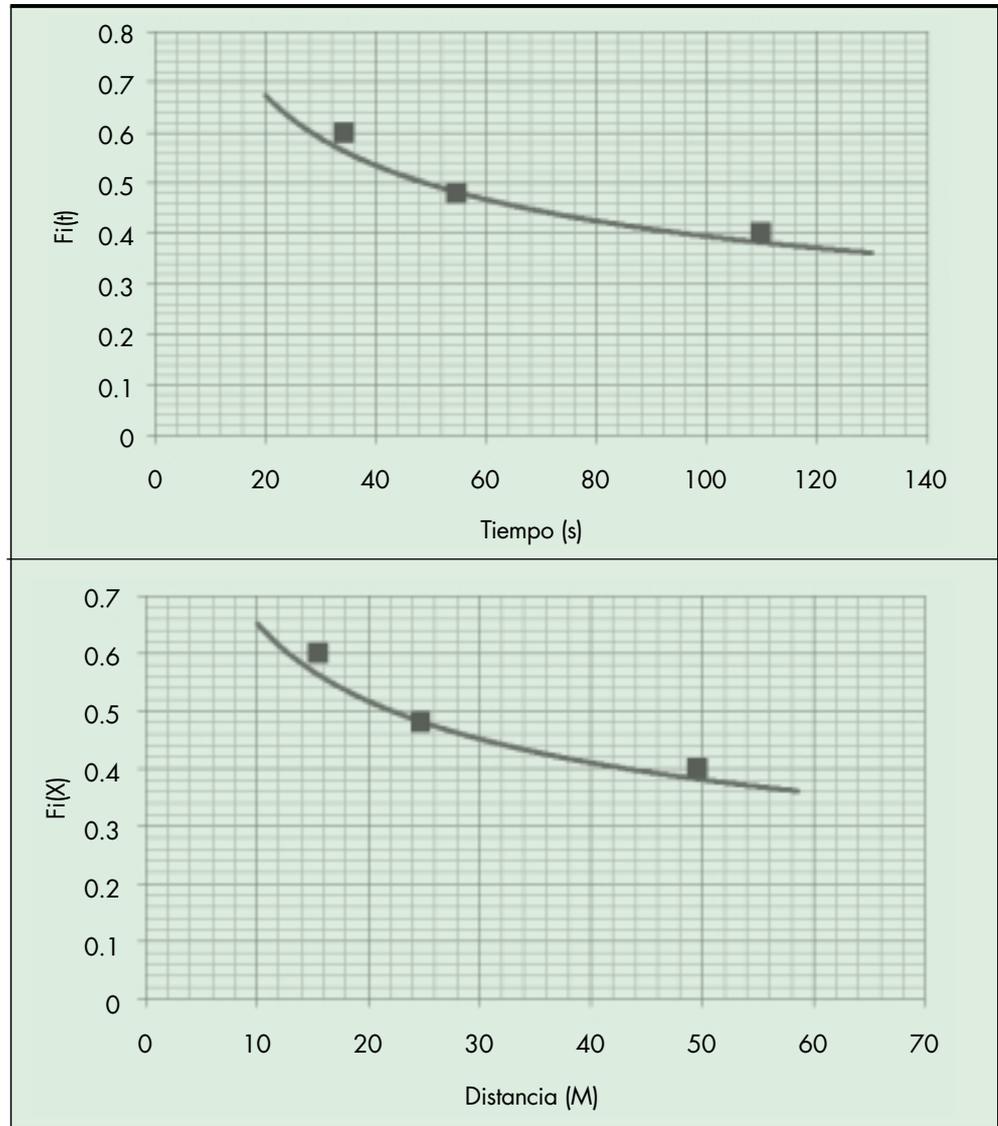


FIGURA 17. Resultados teóricos y experimentales para la función Φ .

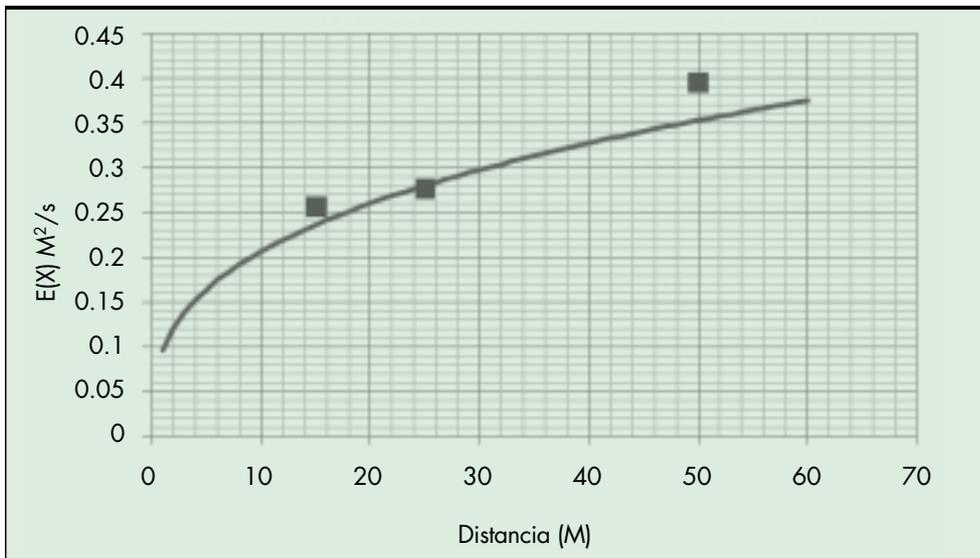


FIGURA 18. Variación teórica y experimental de E con la distancia.

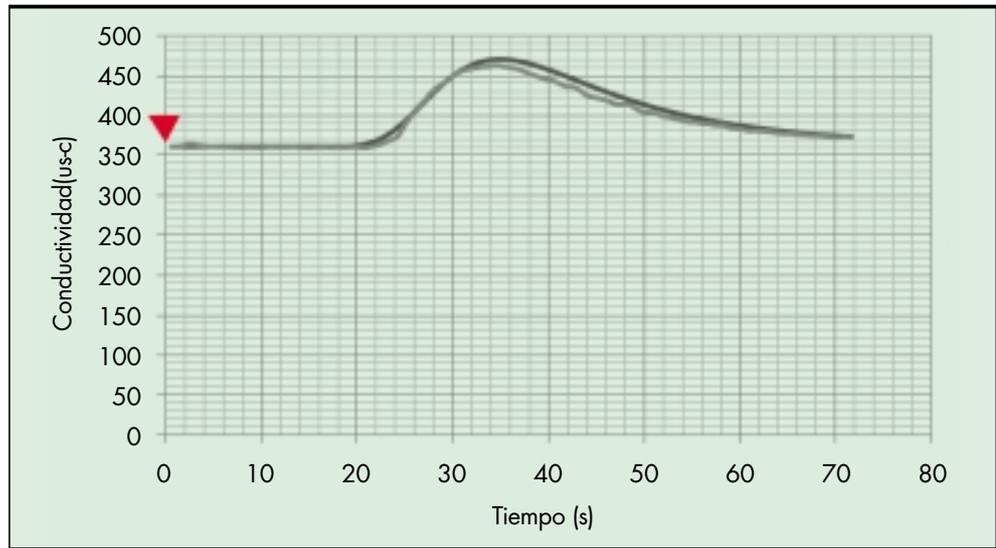


FIGURA 19. Modelación y curva experimental del Vertimiento a 15 metros.

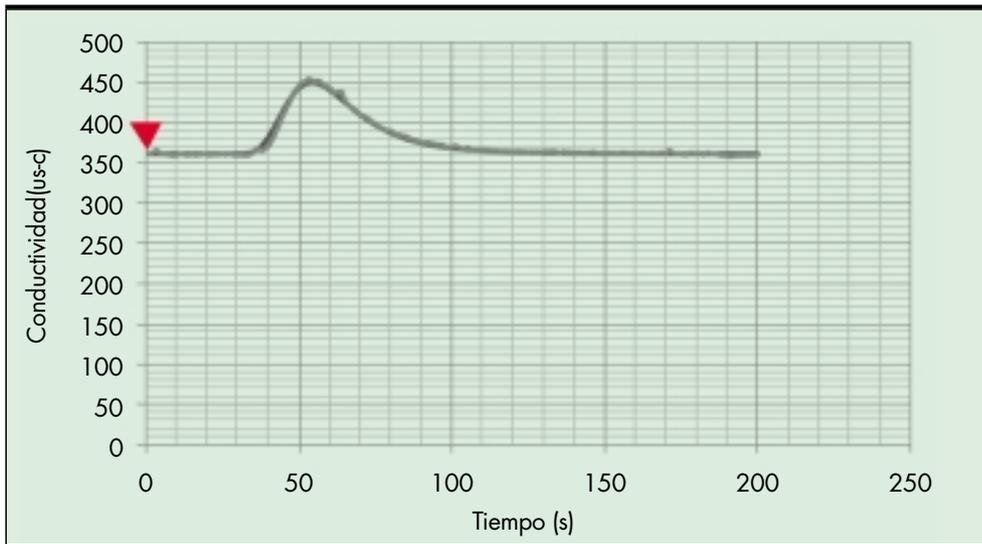


FIGURA 20. Modelación y curva experimental del Vertimiento a 25 metros.

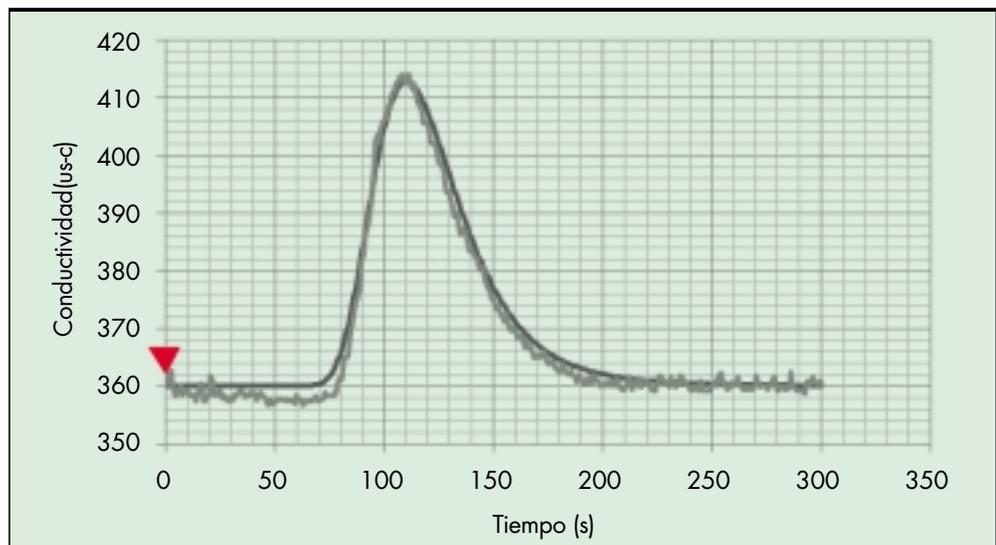


FIGURA 21. Modelación y curva experimental del Vertimiento a 50 metros.

$$C \approx \frac{R^{\frac{1}{6}}}{n} = \frac{(0.159)^{0.1666}}{0.040} = \frac{0.736}{0.040} = 18.4 \text{ m}^{1/2} / \text{s}$$

5. Cálculo de la pendiente:

Se utiliza la ecuación de Chezy, asumiendo flujo uniforme (variación de U no mayor al 4%)

$$S \approx \frac{U^2}{RC^2} = \frac{(0.451)^2}{0.159 \times 18.4^2} = 0.0038$$

6. Cálculo del Coeficiente Transversal de difusión:

Asumiendo que la llamada condición de "mezcla completa" del trazador en la sección transversal ocurre aproximadamente para $X=50$ Metros, se tiene la fórmula aproximada de Ruthven [23].

$$\varepsilon_y \approx \frac{0.305 \times U \times W^2}{X_{mc}} = \frac{0.305 \times 0.451 \times 1}{50} = 0.00275 \text{ m}^2 / \text{s}$$

De acuerdo con lo expresado en la Figura 8, se puede establecer que cuando el valor de la función $\Phi(X) < 0.38$ se cumple la "longitud de mezcla completa", para este caso aproximadamente está cercano a los 50 m.

7. Cálculo del Coeficiente f de Darcy-Weissbach

Utilizando la ecuación (3) queda en Sistema Internacional:

$$f = \frac{8g}{C^2} = \frac{8 \times 9.81}{18.4^2} = 0.232$$

8. Cálculo del Coeficiente k de pérdida

Utilizando la ecuación (34) se tiene y despejando k se tiene para la condición $\Phi=0.40$ a 50 metros de distancia del vertimiento de trazador:

$$k = \frac{\beta \times V \times \left(\frac{\Delta C}{\Delta X}\right) \times \phi^2}{2}$$

El cálculo pertinente para V es:

$$V \approx Q \times \tau = 105.3 \text{ l/s} \times 23.6 \text{ s} = 2485.1 \text{ l}$$

Y para el gradiente longitudinal de concentración se utiliza el concepto de pendiente calculada en $X=50$ m de la curva correspondiente. Figura 22.

$$\frac{\Delta C}{\Delta X} \approx \frac{10Mgr/l}{31M} = 0.323Mgr/l/m$$

Por lo tanto, en Sistema Internacional:

$$k = \frac{0.215 \times 2485.1 \times 0.322 \times 0.40^2}{2} = 1.38 \times 10^{-5} \text{ kg/m}$$

10.5. MEDICIONES EN UN CAUCE MAYOR: "RIO CALI"

La segunda aplicación se hace sobre un cauce mucho mayor, el Río Cali en la ciudad colombiana del mismo nombre, con el fin de mostrar como el método funciona independientemente de las características de los cauces seleccionados. Este es un cauce turbulento de alta pendiente con cerca de 20 metros de ancho con un caudal estimado de 3 m³/s y una velocidad media cercana a los 0.6 m/s. La rugosidad es grande toda vez que hay grandes distribuciones de piedras pequeñas y grandes y se tiene un cambio en la dirección del cauce. Estas mediciones se realizaron el 20 de enero de 2008. Se muestran aspectos de la preparación de la mezcla de Rodamina WT usando pipetas especiales en las que se calibra masa a volumen. Dada la relativa gran distancia entre el punto de vertimiento y el punto de medición (donde se ubica el instrumento IDF) la coordinación de operación del equipo se hace por radio. El sensor fluorescente se fija mediante una varilla metálica para garantizar la estabilidad de su función. Figura 23.

En este caso y dadas las condiciones del cauce se utiliza únicamente trazador fluorescente (Rodamina WT) para el cual el equipo IDF también puede operar utilizando el sensor apropiado. Mientras que un criterio práctico aproximado para el trazador iónico sal común es de un kilo por cada metro cúbico por kilómetro, para el trazador fluorescente Rodamina WT es de un gramo por cada metro cúbico por kilómetro.

En este caso se hicieron siete (7) vertimientos a 613 metros de distancia del equipo de medición, vertiendo 4 y 6 gramos de RWT. Las curvas tomadas directamente por el software tienen un alto nivel de ruido de alta frecuencia (espigas estrechas) debida a múltiples factores entre los que se encuentran la distribución de sólidos suspendidos en el flujo y el resplandor directo del sol. Sin embargo, el equipo IDF tiene programado una rutina de filtro especial que elimina este tipo de ruido, tal como se muestra en la Figura 24.

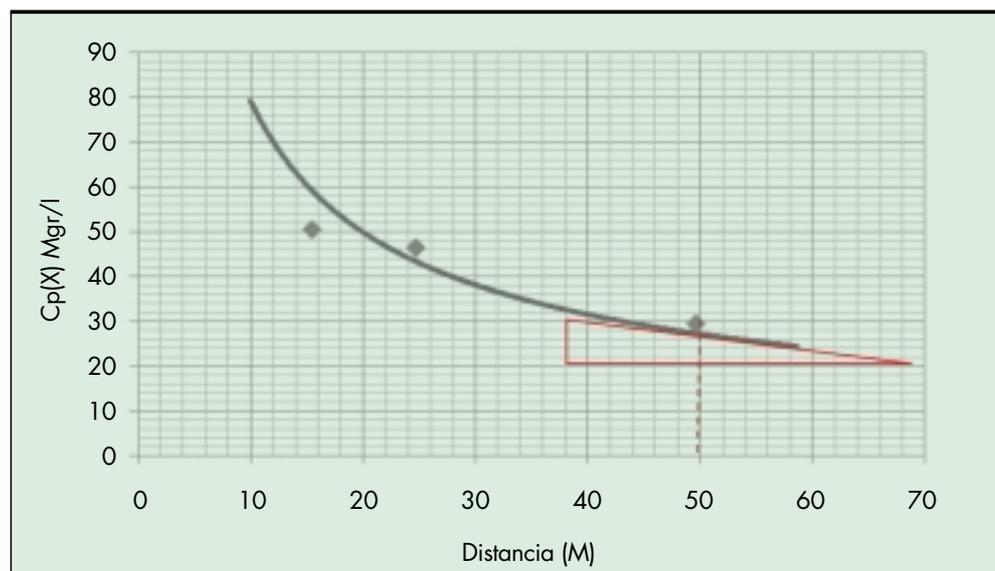


FIGURA 22. Cálculo del gradiente de concentración a $X=50$ m.

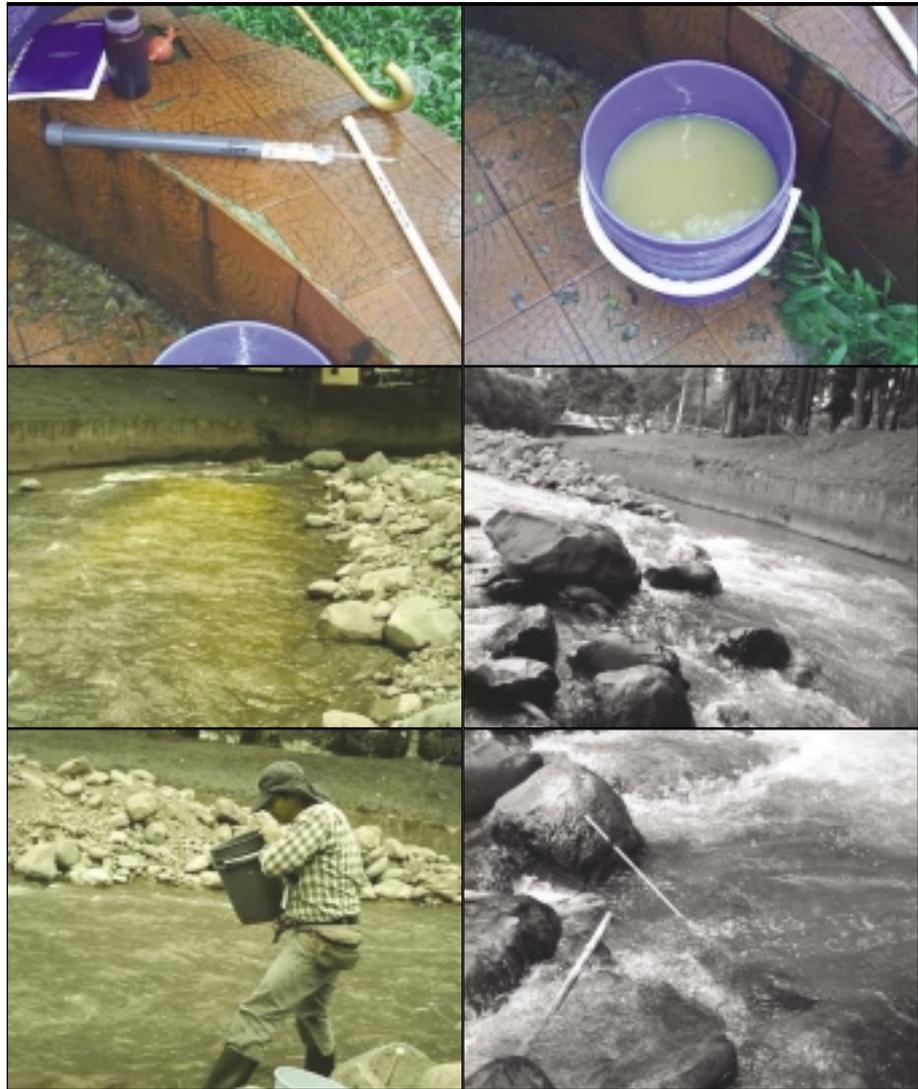


FIGURA 23. Aspectos del Rio Cali y operación de vertimiento y medición.

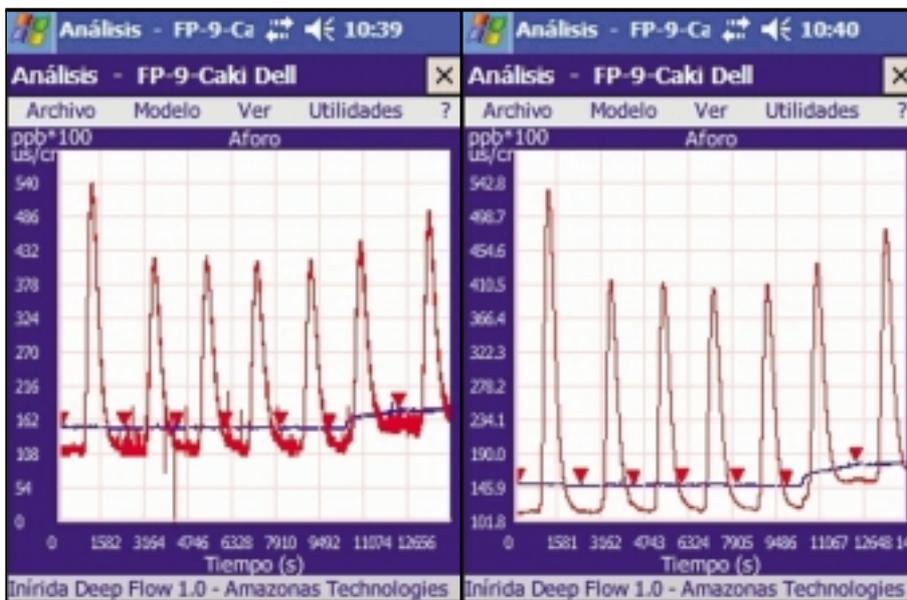


FIGURA 24. Las siete curvas de trazador antes y después del filtro.

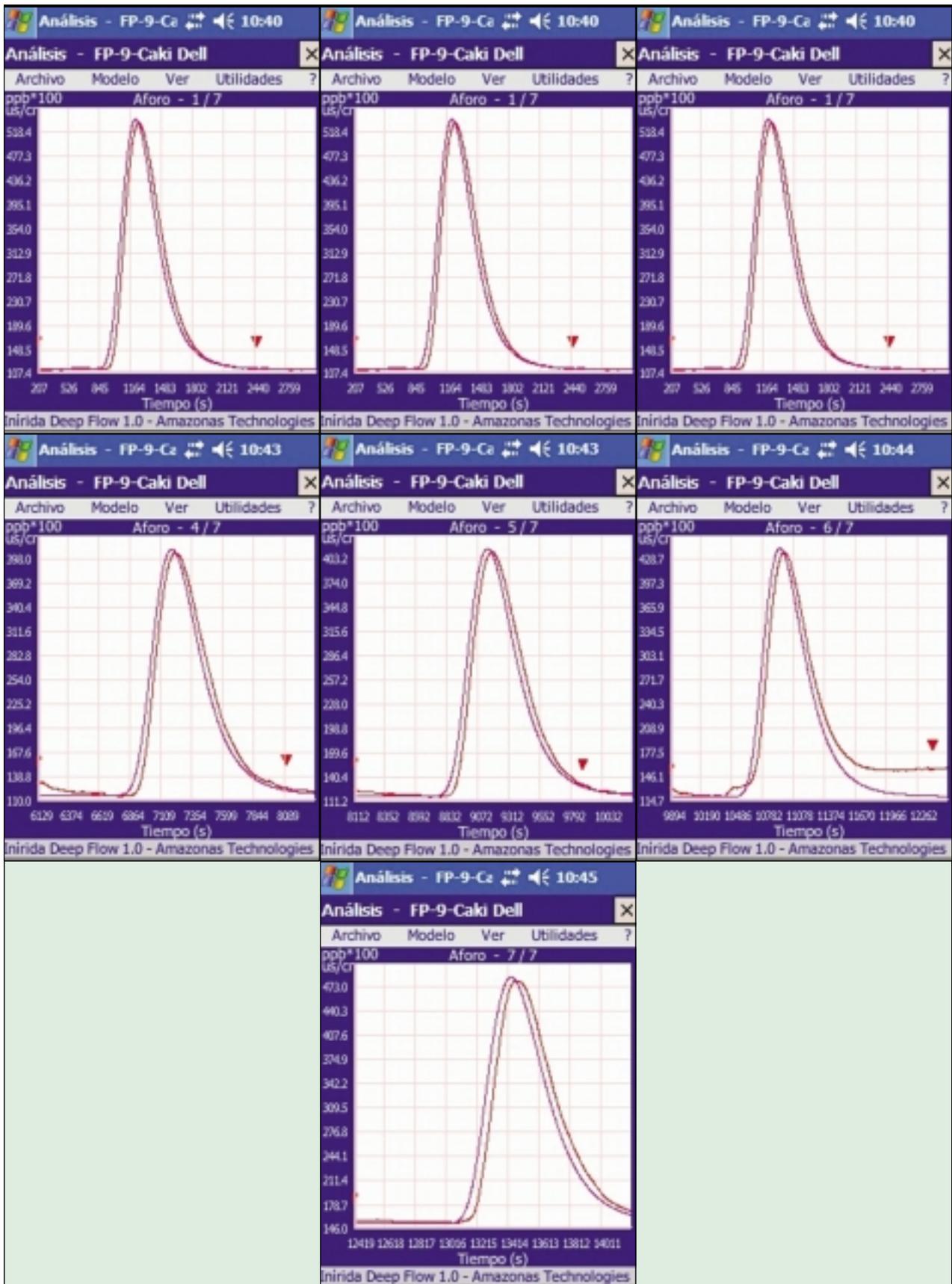


FIGURA 25. Las siete modelaciones sobrepuestas con las curvas experimentales.

Cauce	Tiempo t S	Distancia X M	Masa, M G	Velocidad Media, U_x M/s	Φ	Caudal Q M ³ /s	C_p , Concentración pico Ppb x 100	E_x , Coeficiente dispersión Longitudinal M ² /s
1.- Río Cali-Rodamina WT	1040.7	613	6	0.589	0.37	3.22	432	5.28
2.- Río Cali-Rodamina WT	1035.5	613	4	0.592	0.37	3.00	308	5.28
3.- Río Cali-Rodamina WT	1062.4	613	4	0.577	0.36	3.02	306	4.97
4.- Río Cali-Rodamina WT	1098.6	613	4	0.558	0.37	2.92	298	5.06
5.- Río Cali-Rodamina WT	1066.1	613	4	0.575	0.37	2.99	301	5.14
6.- Río Cali-Rodamina WT	1086.8	613	4	0.564	0.39	2.53	324	5.76
7.- Río Cali-Rodamina WT	1046.1	613	4	0.586	0.38	2.65	329	5.76
Promedio	1062.3	613	-	0.577	0.373	2.90	-	5.32

TABLA 3. Datos representativos para el Río Cali.

En este caso las modelaciones teóricas de cada curva se hacen directamente por el software del IDF (curvas moradas suaves) aunque también se hubiera podido trabajar en EXCEL como el cauce “Guaymaral” anterior. En seguida se muestran las pantallas con dichas modelaciones sobrepuestas a los datos experimentales (curvas rojas quebradas). En general, salvo un pequeño error sistemático en la estimación precisa de la distancia (que se detecta por el desfase de los picos) las curvas teóricas y las experimentales tienen un gran acercamiento, tanto en la “altura” de la concentración pico, C_p como en el grado de asimetría de las curvas. Como ya se ha explicado las modelaciones se hacen a partir de la nueva ecuación (32), o sea la de Fick modificada mediante la inclusión de un coeficiente longitudinal de dispersión función del tiempo, $E(t)$. Los “gatillos” flechas rojas indican el instante de vertimiento. Las figuras muestran su propio gatillo justo al inicio y los gatillos subsecuentes. Hay que notar que a diferencia del anterior cauce donde se tomaron curvas a tres distancias diferentes, en este segundo ejemplo todas las curvas fueron tomadas a la misma distancia, lo que limita el número de tendencias que se pueden conocer, por otro lado en este caso es factible realizar un análisis de repetibilidad de los datos. Figura 25.

Con base en la información obtenida con el instrumento IDF (en tiempo real) es posible establecer el cuadro de datos para este cauce. Las pantallas del sistema están en $ppb \times 100$, entonces el valor verdadero de la concentración de RWT debe ser dividida por 100. La conductividad en el IDF se da directamente en $\mu S/cm$. Los datos de Qa (caudal calculado por área bajo la curva no se obtuvieron en estos aforos) sin embargo, la gran concordancia de las curvas teóricas y experimentales y teniendo en cuenta que la función $\Phi(X=613 M) \approx 0.38$ que implica “mezcla completa” del trazador llevan a concluir que los datos de caudal, Q tomados por la ecuación (33) son bastante confiables. Esta apreciación será verificada luego por la congruencia general de los datos obtenidos. Tabla 3.

10.6. ANÁLISIS DE LOS DATOS DE CAMPO

Se realiza primero un análisis de repetibilidad de los datos teniendo en cuenta que los 7 datos se tomaron sobre condiciones equivalentes. Después se verifican los datos hidráulicos generales.

10.7. ANÁLISIS DE REPETIBILIDAD DE LOS DATOS

Se presentan los análisis de precisión para diferentes parámetros que son susceptibles de este análisis por su homogeneidad:

1. Repetibilidad de Coeficiente longitudinal de dispersión, E_x :

Promedio	Desviación estándar (error absoluto)	Error relativo	Error porcentual
5.32 m ² /s	0.319 m ² /s	0.060	6.0%

2. Repetibilidad de la velocidad media, U :

Promedio	Desviación estándar (error absoluto)	Error relativo	Error porcentual
0.577 m/s	0.0128 m/s	0.022	2.2%

3. Repetibilidad del caudal, Q :

Promedio	Desviación estándar (error absoluto)	Error relativo	Error porcentual
2.90 m ³ /s	0.236 m ³ /s	0.081	8.1%

4. Repetibilidad de la función $\Phi(X=613 M)$:

Promedio	Desviación estándar (error absoluto)	Error relativo	Error porcentual
0.373	0.0095	0.0225	2.55%

De los cuadros anteriores se observa que los errores porcentuales están en un rango de 2.2% a 8.1% que se pueden considerar apropiados en un campo como el de la hidráulica que tiene errores promedio entre 3% y 10%.

10.8. ANÁLISIS DE LOS DATOS GENERALES DEL CAUCE

1. Área hidráulica promedio:

Como se tienen los datos simultáneos con trazadores del caudal y la velocidad:

$$A \approx \frac{Q}{U} = \frac{2.9}{0.58} = 5.0 \text{ m}^2$$

2. Profundidad media:

Es factible pues se tienen los datos del ancho promedio y del área hidráulica:

$$h \approx \frac{A}{W} = \frac{5.0}{20} = 0.25 \text{ m}$$

3. Radio hidráulico promedio:

Se emplea la fórmula usual para este parámetro:

$$R \approx \frac{A}{2 \times h + W} = \frac{5.0}{0.5 + 20} = 0.244 \text{ m}$$

4. Pendiente a partir de Chezy-Manning:

Se establece un número de Manning, $n=0.070$ dadas las condiciones de rugosidad observadas en el cauce (ver fotografías de la Figura 23). Por lo tanto:

$$S \approx \frac{n^2 U^2}{R^{\frac{4}{3}}} = \frac{(0.070)^2 (0.58)^2}{(0.244)^{1.333}} \approx 0.01$$

5. Cálculo del Coeficiente de resistencia de Chezy:

A partir de la ecuación aproximada de Manning se halla el Coeficiente de Chezy:

$$C \approx \frac{R^{\frac{1}{6}}}{n} = \frac{(0.244)^{0.1666}}{0.070} = \frac{0.79}{0.040} = 11.3 \text{ m}^{1/2} / \text{s}$$

6. Cálculo del Coeficiente Transversal de difusión:

Assumiendo que la llamada condición de "mezcla completa" del trazador en la sección transversal ocurre aproximadamente para $X=613$ Metros, se tiene la fórmula aproximada de Ruthven [23].

$$\varepsilon_y \approx \frac{0.305 \times U \times W^2}{X_{mc}} = \frac{0.305 \times 0.577 \times 20^2}{613} = 0.113 \text{ m}^2 / \text{s}$$

7. Cálculo del Coeficiente f de Darcy-Weissbach:

Utilizando la ecuación (3) queda en Sistema Internacional.

$$f = \frac{8g}{C^2} = \frac{8 \times 9.81}{11.3^2} = 0.615$$

8. Cálculo del Coeficiente k de pérdida:

No se tienen los datos numéricos del gradiente longitudinal de concentración puesto que las curvas fueron tomadas en el mismo sitio.

11. CONCLUSIONES

1. Se muestra como dentro de la teoría de la dispersión de solutos en un flujo natural se puede representar las variaciones espaciales en dos ejes por una variación temporal de la dispersión, en un eje.
2. Se muestra cómo se puede establecer un puente significativo entre el campo de la hidráulica y el transporte de masa mediante una ecuación para la velocidad media en régimen no uniforme. Esto permite un tratamiento muy preciso directo y compacto de los eventos de dispersión en flujos naturales.
3. Se muestra como utilizando estos conceptos es posible determinar un completo cuadro de parámetros congruentes entre sí para experimentos reales.
4. Las modelaciones teóricas concuerdan bastante bien con los datos experimentales indicando la justeza de las ecuaciones propuestas, tanto en un cauce pequeño como en uno mayor, con diferente grado de rugosidad y pendiente.
5. El comportamiento especial de la función $\Phi(t)$ permite determinar cuando el volumen del trazador llena completamente el flujo. En este caso el caudal medido por el método de trazadores toma un valor preciso y además se puede establecer a qué distancia el soluto llena completamente el área de la sección transversal. Datos estos muy importantes para los estudios de Calidad del Agua.
6. Los datos tomados en diferentes distancias permiten conocer curvas de los parámetros. Los datos tomados en una sola distancia permiten tomar repetibilidad (precisión) de las curvas.
7. Esta técnica ampliada de estudio de trazadores vale para etapas tempranas de la evolución de la pluma en la que coexisten la difusión transversal y la dispersión longitudinal. Por estas razones su aplicación al estudio de las contaminaciones hídricas puede ser muy ventajosa frente a las metodologías actuales, muy restringidas por ser estacionarias.

12. RECONOCIMIENTOS

Los autores manifiestan su reconocimiento a la empresa Amazonas Technologies S.A del parque tecnológico de software de Colombia por el suministro de la instrumentación con la cual fue posible hacer las salidas de campo correspondientes. A la agencia estatal Fomipyme que entre 2008 y 2009 financió un programa intensivo de ajuste de la tecnología IDF. Así mismo su reconocimiento a los Ingenieros Guillermo Moreno y Laura Nieto del Consorcio Borde Norte, con quienes se realizaron los aforos para el Acueducto de Bogotá en 2011.

13. BIBLIOGRAFÍA

- [1] VEN T CHOW.; *Hidráulica de canales abiertos*. Mc Graw-Hill. New York. 1995.
- [2] YUAN S.W. *Foundation of fluid mechanics*. Prentice Hall International, London. 1967.
- [3] CONSTAIN A.; LEMOS R.; CARVAJAL A., "Tecnología IMHE: Nuevos desarrollos en la hidráulica". *Revista Ingeniería Civil, CEDEX, Vol 129, 2003*.
- [4] CONSTAIN A., AGREDO O., "A Non uniform flow velocity of mean equation applied to natural streams", RIVER FLOW, Louvaine la neuve, 2002.
- [5] CONSTAIN. A., CARVAJAL J., CARVAJAL A; "Frenkel's viscosity equation recalculated through macroscopic dispersion parameters". FLUCOME. Moscow, 2009.
- [6] PRIGOGINE I.; KONDEPUDI D.; *Modern Thermodynamics*. Wiley, New York, 1998.
- [7] VON MISES R., *Probability, Statistics and Truth*, 2nd rev. English ed., New York, Dover, 1981.
- [8] JM BOCKRIS y A.K. REDDY.; *Electroquímica moderna Vol 1*. REVERTE, Barcelona, 1980.
- [9] PRIGOGINE I., *El fin de las certidumbres*. Editorial Taurus, Bogotá, 1997.
- [10] TAYLOR G.I.; "The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe". *Proceedings of the Royal society of London*, 233, 1954.
- [11] JOBSON H.; "Predictions of travel times and longitudinal dispersion in rivers and streams" USGS, 1996. En internet.
- [12] USGS; "Measurement of discharge using tracers". *Book 3. Chapter A16*. En internet.
- [13] HOLLEY E.R.; "Unified view of diffusion and dispersion". *Journal of Hydraulics Division*, Proceedings of the ASCE. March, 1969.
- [14] FISCHER J.B. "Longitudinal dispersion in laboratory and natural channels", PhD Thesis, CALTECH, 1966.
- [15] FISCHER J.B.; "Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow", *Reviews of fluid mechanics*, 1973.
- [16] MANDEL J.; *The statistical analysis of experimental data*. Dover, New York, 1964.
- [17] EINSTEIN A.; *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Dover Publications, New York, 1956.
- [18] CONSTAIN A., CARVAJAL J., CARVAJAL A.; "Accurate measurement of discharge using Rhodamine WT". 33th International Congress IAHR, Vancouver, 2009.
- [19] CONSTAIN A. a; "Svedberg's number playing a major role in diffusion processes". TRACER 6. Oslo, 2011.
- [20] CONSTAIN A. b; "A thermodynamic view of tracer plume evolution: Complete mixing condition evaluation". TRACER 6. Oslo, 2011.
- [21] JOBSON H.; *op cit*.
- [22] CONSTAIN A. c; "Two coordinate mass transport in streams: Longitudinal Dispersion Coefficient as time function version". TRACER 6. Oslo, 2011.
- [23] CONSTAIN A. a. *op.cit*.