

# Modelación estocástica en problemas de ingeniería geotécnica. Aplicación al diseño geotécnico de cimentaciones superficiales en suelos friccionales

ARMANDO JESÚS MARTÍNEZ RODRÍGUEZ (\*) y GILBERTO QUEVEDO SOTOLONGO (\*\*)

**RESUMEN** Se presenta la modelación de problemas de ingeniería geotécnica, a través del diseño de una metodología que pretende insertar un nuevo enfoque en la solución de cualquier problema ingenieril, en este caso sobre bases probabilísticas. Se trata de la simulación estocástica empleando el método de Monte Carlo. El citado proceso parte de la definición del problema, caracteriza estadísticamente las variables aleatorias incidentes y analiza la dependencia o no entre las mismas. Posteriormente se aplica un mecanismo de generación aleatoria para aquellas variables que fueron consideradas aleatorias, se comprueba la citada aleatoriedad y se repite este proceso hasta lograr una muestra estadísticamente representativa. Este proceso se ha llevado a cabo en un problema clásico de cálculo de capacidad de carga de una cimentación corrida apoyada en un suelo puramente friccional.

Por último se llega a obtener, luego de definir el procedimiento de obtención del ancho de la cimentación, resultados adecuados en la determinación de la probabilidad de falla de la estructura. De esta manera queda definido un nuevo enfoque a favor del diseño de estructuras de acuerdo a criterios de seguridad, en el cual se obtiene una seguridad de diseño numéricamente igual a la seguridad requerida.

## STOCHASTIC MODELLING IN GEOTECHNICAL ENGINEERING PROBLEMS. APPLICATION TO GEOTECHNICAL DESIGN IN FRICTIONAL SOILS

**ABSTRACT** *Modeling of geotechnical engineering problems is carry out, through the design of a methodology, which inserts a new approach in the solution of any engineering problem, in this case, taking probabilistic basis such as the stochastic simulation, using Monte Carlo's Method. This process starting by defining the problem and the statistical characterization of all incident variables, it is analyzes the dependence between them, besides.*

*Later, it is applied a mechanism of random generation for those variables that were considered under this approach, it is also proven its randomness and the process will be repeated until achieving a statistically representative sample. This methodology has been performed in a classic problem of load - bearing capacity of a strip footing, in purely frictional soils.*

*Finally, after defining the procedure of obtaining the width of footing b, it is obtained appropriate results in the determined structure probability failure. By this way, it is being defined a new approach for designing structures according to safety procedures; it is mean that the obtained design safety must be equal to the required safety.*

**Palabras clave:** Modelación estocástica, Simulación, Variable aleatoria, Muestreo de variables, Generación aleatoria, Capacidad de carga, Probabilidad de falla.

**Keywords:** Stochastic modeling, Simulation, Random variable, Variable sampling, Random generation, Bearing capacity, Failure probability.

(\*) Dr. Sc. Ing. Empresa de Diseño y Servicios de Ingeniería. MINAL. Villa Clara. Carretera central, # 212, entre Danielito y Jesús Menéndez. Reparto Virginia. Santa Clara. Villa Clara. Cuba. C.P. 54 100. E-mail: armandojesus72@yahoo.es

(\*\*) Dr. Sc. Ing. Universidad Central de Las Villas. Centro de Investigación y Desarrollo de las Estructuras y los Materiales (CIDEM). Santa Clara, Villa Clara, Cuba. Carretera a Camajuán Km. 5 1/2 Santa Clara, Villa Clara, Cuba. C.P. 54830. E-mail: quevedo@uclv.edu.cu

## 1. INTRODUCCIÓN

El auge acelerado de los recursos y las técnicas computacionales ha permitido procesar gran cantidad de datos en breves períodos de tiempo. Esta situación ha venido ocurriendo conjuntamente con una disminución de los recursos económicos con que se cuentan para abordar estos problemas. A partir de aquí, los investigadores se han visto obligados a ofrecer garantías cuantitativas que sirvan para evaluar el riesgo de la estructura a través de un índice de fiabilidad, tanto para los componentes de la obra así como para el modelo empleado.

La solución a este problema se basa en el uso de métodos de simulación. Los citados métodos se fundamentan en la hipótesis de que las variables empleadas por los modelos son independientes y consideradas como aleatorias. El método de simulación más usado es el denominado método de Monte Carlo, terminología empleada a cualquier técnica que use números aleatorios. Este método tiene gran aplicación, sobre todo en la simulación de muchos fenómenos a través de la generación aleatoria de las variables que inciden el mismo.

En el presente trabajo se implementa, a través de un ejemplo, un procedimiento eficiente que permite realizar la modelación estocástica ó aleatoria de cualquier problema de ingeniería geotécnica. Se parte de la caracterización estadística de las variables que inciden en el estudio y se obtiene, mediante la simulación, la respuesta de las mismas. Esta respuesta (valor medio, desviación estándar y coeficiente de variación) será utilizada para efectuar un posterior diseño analítico de la estructura.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

### PRINCIPIOS DE LA MODELACIÓN ESTOCÁSTICA

La modelación estocástica de cualquier problema ingenieril depende de dos factores: el riesgo y la incertidumbre, ambos se describen mediante distribuciones de probabilidad. Para desarrollar la citada modelación es imprescindible la elección al azar de las variables que inciden en el problema. A partir de esta elección se puede reflejar, mediante estos parámetros (el riesgo y la incertidumbre), el carácter estocástico de cualquier sistema analizado (Phoon, 2006).

El riesgo es un efecto aleatorio propio del sistema bajo análisis y se puede reducir alterando el sistema. La incertidumbre es el nivel de ignorancia acerca de los parámetros que caracterizan el sistema a modelar. Esta se puede reducir con mediciones adicionales, mayor estudio o consulta a expertos. A los resultados obtenidos de la combinación de ambos se le denomina *Variabilidad total del sistema*, o sea, el efecto conjunto de ambos parámetros (Phoon, 2006).

De manera general, y considerando la opinión de algunos autores que han abordado este tema, como Ripley (1987) y Centeno (2002), se ha definido un procedimiento para llevar a cabo la modelación estocástica convencional.

### METODOLOGÍA PARA REALIZAR UNA MODELACIÓN ESTOCÁSTICA CONVENCIONAL EN PROBLEMAS DE INGENIERÍA

Debido a que el futuro de los códigos de diseño estará determinado por una estrategia que requiere la utilización de modelos probabilísticos, se presenta en esta investigación una propuesta de metodología para llevar a cabo la modelación estocástica. La citada metodología constituye el cambio de una mentalidad determinista a una probabilística. Las herramientas de modelación empleadas son muy sencillas y fáciles de implementar en la práctica.

La metodología presentada se basa en los siguientes aspectos:

1. Definición del modelo ingenieril a estudiar. (Planteamiento del problema)
2. Definición de las variables consideradas como deterministas y aleatorias en el proceso de modelación y diseño.
3. Caracterización estocástica de las variables de entrada.
4. Aplicación de un mecanismo de generación de números aleatorios en función del tipo de distribución definida para cada variable estocástica.
5. Determinación de histogramas y estadígrafos fundamentales para la data resultante de la generación.
6. Comprobación de la aleatoriedad de los datos resultantes.
7. Determinación estocástica de la variable resultante y obtención de la probabilidad de falla.

La metodología propuesta se ha evaluado en uno de los modelos estudiados en la ingeniería geotécnica. El propósito de la aplicación de esta metodología es demostrar su factibilidad, por lo que se ha escogido un caso sencillo de cálculo de capacidad de carga en una cimentación corrida, apoyada sobre un suelo puramente friccional.

### APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA AL DISEÑO DE UNA CIMENTACIÓN CORRIDA APOYADA SOBRE UN SUELO PURAMENTE FRICCIONAL

#### 1. Definición del modelo ingenieril a estudiar (Planteamiento del problema)

El problema de estudio es el cálculo de la capacidad de carga de una cimentación corrida. Esta estructura está sometida a la acción de carga vertical y se encuentra apoyada sobre un suelo friccional. Figura 1.

En esta Figura se plantea que:

- N: Carga vertical resultante a nivel de cimentación.
- d: Profundidad de cimentación, considerada para este caso de estudio igual a cero, ya que el cimiento se encuentra apoyado sobre el terreno.
- B: Lado menor del cimiento.
- L: Lado mayor del cimiento.
- $\gamma_s$ : Peso específico del suelo por debajo del nivel de cimentación.
- C: Cohesión del suelo.
- $\phi$ : Ángulo de fricción interna del suelo.
- qbr: Presión bruta de rotura resistente a la estabilidad de la base de la cimentación.

Por otra parte, el problema de estudio, desde el punto de vista de diseño, se fundamenta en obtener el valor de la capacidad de carga de la citada cimentación. En este trabajo se plantea que para garantizar el cumplimiento del criterio de capacidad de carga de la base de la cimentación se debe cumplir la siguiente condición:

$$N^* \leq Q_{bt}^* \quad (1)$$

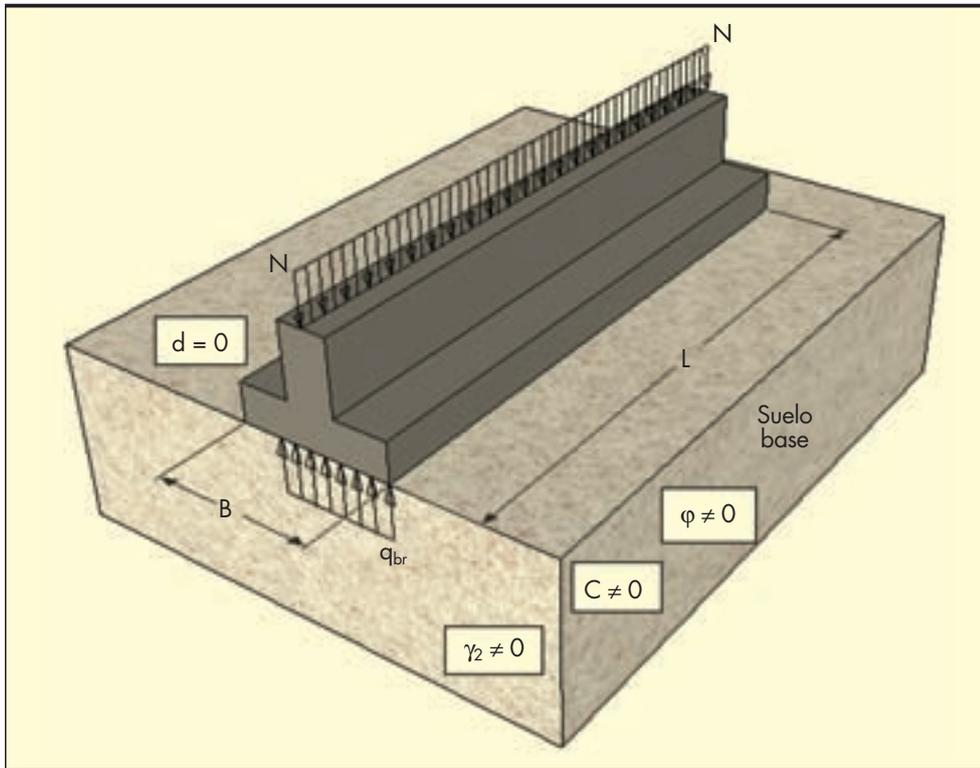
Donde:

$Q_{bt}^*$ : Carga bruta de trabajo resistente a la estabilidad de la base de la cimentación, con su valor de cálculo.

$N^*$ : Carga vertical resultante, con su valor de cálculo, a nivel de cimentación.

Por otra parte, el valor de la  $Q_{bt}^*$  para cimientos rectangulares se determina a partir de:

$$Q_{bt}^* = B \cdot L \cdot \left( \frac{q_{br}^* - q^*}{\gamma_s} + q^* \right) \quad (2)$$



**FIGURA 1.** Problema de estudio: Cimiento corrido, sometido a carga vertical centrada, apoyado sobre un suelo puramente friccional. Variables que inciden en el diseño.

Donde:

$q_{br}^*$ : Presión bruta de rotura resistente a la estabilidad de la base de la cimentación, con su valor de cálculo. Esta variable se determina a partir de las expresiones definidas por Brinch Hansen (Brinch Hansen, 1961) que plantean:

⇒ Para Suelos  $\phi$  y C- $\phi$ :

$$q_{br}^* = 0.5 \gamma_2^* B' N_\gamma s_\gamma i_\gamma d_\gamma g_\gamma + c^* N_c s_c i_c d_c g_c + q^* N_q s_q i_q d_q g_q \quad (3)$$

Donde:

$\gamma_2^*$ : Peso específico de cálculo por debajo del nivel de cimentación (hasta una profundidad 1.5 B').

L': Lado efectivo en la dirección del lado mayor del cimiento (L).

B': Lado efectivo en la dirección del lado menor del cimiento (B).

$N_\gamma, N_c, N_q$ : Factores de la capacidad de carga, que están en función de  $\phi^*$ .

$s_\gamma, s_q, s_c$ : Factores de corrección debido al efecto de la forma del cimiento (Suelos friccionales).

$i_\gamma, i_c, i_q$ : Factores de inclinación de la carga actuante (Suelos friccionales).

$d_\gamma, d_c, d_q$ : Factores que valoran el efecto de la profundidad de la cimentación.

Parámetro	Observaciones
⇒ $\phi = 0$ ⇒ $C = 0$ ⇒ $d = 0$ ⇒ $e = 0; \delta = 0 \Rightarrow B' = B; i_\gamma = i_c = i_q = 1.0$ ⇒ $\phi = 0 \Rightarrow g_\gamma = g_c = g_q = 1.0$ ⇒ $D = 0 \Rightarrow d_\gamma = d_c = d_q = 0$	Suelo Friccional  Carga vertical centrada

**TABLA 1.** Consideraciones para el cálculo de la capacidad de carga para suelos puramente friccionales.

Para el caso analizado se han establecido una serie de consideraciones e hipótesis simplificativas, las cuales se pueden ver en la Tabla 1.

De acuerdo a lo formulado en la tabla 1, la expresión de capacidad de carga se simplifica a:

$$q_{br} = \frac{\gamma_2 B'}{2} \cdot N_\gamma \quad (4)$$

Donde:

$N_\gamma = f(\phi)$  y B' es el lado menor entre L' y B'.

## II. Definición las variables consideradas como deterministas y aleatorias en el proceso de modelación y diseño

Un paso imprescindible para desarrollar la modelación estocástica consiste en declarar cuales de las variables que inciden en el diseño se tomarán como deterministas y cuales como aleatorias o estocásticas. En este trabajo se han considerado como estocásticas: el ángulo de fricción interna  $\phi$ , el peso específico del suelo  $\gamma$ , la carga permanente vertical actuante, la carga temporal vertical y la carga vertical de viento.

La variable ancho de la cimentación B, es la única de todas las variables que inciden en el problema que se considera como un parámetro determinista.

## III. Caracterización estocástica de las variables de entrada

Teniendo en cuenta nuevamente lo planteado en el paso dos de la metodología propuesta, concerniente a que las variables tratadas como estocásticas serán: el ángulo de fricción interna, el peso específico del suelo, la carga permanente vertical actuante, la carga temporal vertical y la carga vertical de viento, se plantea entonces que los valores medios y los coeficientes de variación analizados, de las citadas variables, fueron tomados de estudios anteriores (Quevedo, 2002).

Variable	Valores medio	Coef. variación
Ángulo de fricción interna del suelo ( $\phi$ ), para $\phi \leq 30^\circ$	25° 27.5° 30°	0.03 0.08 0.10
Ángulo de fricción interna del suelo ( $\phi$ ), para $\phi > 30^\circ$	32.5° 35° 37.5°	0.03 0.05 0.08
Peso específico ( $\gamma$ )	18 kN/m <sup>3</sup>	0.05
Carga muerta (Ncm)	100 kN/m	0.10
Carga Viva (Ncv)	50 kN/m	0.25
Carga debido a acción del viento (Nw)	20 kN/m	0.31

**TABLA 2.** Propiedades estocásticas de las variables de entrada.

Estas propiedades estocásticas estudiadas de las variables de entrada se resumen en la Tabla 2.

Conviene aclarar que para todas las variables se ha asumido, partiendo de estudios anteriores resumidos en Quevedo (2002), que el tipo de distribución al que se ajustan las mismas es a una distribución normal. Esta hipótesis se comprueba en el paso VII de esta metodología.

En la metodología propuesta, y de acuerdo con el diseño del experimento ideado para esta investigación, se plantea que con las citadas propiedades estocásticas de las variables de entrada, se procede a desarrollar una búsqueda total. Esto significa que, en un proceso de diseño geotécnico por el primer estado límite, se conformaron todas las posibles combinaciones existentes entre variables y coeficientes de variaciones, siendo todas estas combinaciones evaluadas en la presente investigación.

**IV. Aplicación de un mecanismo de generación de números aleatorios en función del tipo de distribución definida para cada variable estocástica**

En todo proceso de modelación estocástica se requiere la presencia de un mecanismo generador de números aleatorios, ya precisamente este es el fundamento de tales métodos. En el caso estudiado, fue necesario, para implementar tal mecanismo generador, crear una base computacional que facilitara, no solo la generación de números aleatorios para cada variable, sino también la ejecución del resto del procedimiento de modelación y diseño para todas las combinaciones establecidas entre variables y coeficientes de variación. Para ello, se acude al uso de sistemas de ayuda al ingeniero, específicamente en este trabajo se hace empleo del software Mathcad, versión 14.0.0.163, con el cual se pueden crear programas de trabajo de forma rápida y eficiente. En el citado software se ha implementado un mecanismo de generación de números

aleatorios para variables con distribución normal. En este caso, a través de la función “rnorm”, tal y como se puede ver en la Figura 2, la cual depende del tamaño de la muestra, la media y desviación típica de cada variable analizada.

Con la citada función “rnorm” se le da solución a la generación aleatoria de las variables de entrada que inciden el diseño, pero además se puede continuar desarrollando el diseño, luego de la citada generación, para un tamaño de muestra definido previamente. Este valor del tamaño de muestra ó comúnmente llamado también –tamaño de corrida– será el valor que garantice la convergencia de los parámetros estadísticos estudiados para cada variable, por tanto su obtención depende de un proceso de análisis, el cual se detalla en el siguiente aspecto del trabajo.

**DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO MÍNIMO DE CORRIDAS PARA EFECTUAR LA GENERACIÓN ALEATORIA**

El tamaño de corrida, denotado como “n”, es el valor que garantiza que a partir de él exista una convergencia en los resultados de los estadígrafos principales de las variables generadas aleatoriamente.

De aquí que, luego de realizar múltiples generaciones para diferentes tamaños de corridas, se obtuvo, para cada valor de ángulo de fricción interna del suelo, el tamaño mínimo de la corrida que garantiza la convergencia de su correspondiente estadígrafo (Valor medio, desviación estándar y coeficiente de variación). Véanse los resultados en la Tabla 3. Adicionalmente, en la Figura 3, se muestra un ejemplo de convergencia del valor medio para el ángulo de fricción interna del suelo. En esta se puede apreciar que el valor mínimo del número de corridas que garantiza que no exista variación numérica en los resultados del valor medio de  $\phi$  es equivalente a 600 corridas, y precisamente esta es la base de la obtención de este parámetro, imprescindible para efectuar una acertada modelación estocástica.

Tipo de suelo	Variable	Estadígrafo	No. de Corridas (n)	Error de convergencia
Suelos friccionales	$\phi = 25^\circ$	Valor Medio	400	0.020
		Desviación Típica	4000	0.010
		Coficiente de Variación	4000	0.001
	$\phi = 30^\circ$	Valor Medio	600	0.020
		Desviación Típica	2000	0.010
		Coficiente de Variación	1000	0.001
	$\phi = 35^\circ$	Valor Medio	1000	0.020
		Desviación Típica	2000	0.010
		Coficiente de Variación	1000	0.001

**TABLA 3.** Número mínimo de corridas para la generación aleatoria.

## CIDEM

### Stochastic Modelling of Geotechnical Engineering Problems

---

1- Entrada de datos Entrar el número de variables nv := 1..nvar

Entrar el tamaño de corrida aleatoria n := 4000

Valor medio de variables de entrada  $\mu$ :

$\phi := 30$

tg $\phi$	tg $\phi$	rad.
$\gamma$	18	Kn/m <sup>3</sup>
Ncm	100	Kn
Ncv	50	Kn
Nw	0.001	kn

Coefficientes de variación de variables de entrada

$C_{nv} :=$

0.08
0.05
0.1
0.25
0.31

Desviación estandar de las variables de entradas  $\sigma$ :

$\sigma_{nv} := \mu_{nv} \cdot C_{nv}$

$\sigma_{nv} :=$

0.046
0.9
10
12.5
$3.1 \cdot 10^{-4}$

2- Generación aleatoria por el Método de Monte Carlo (Distribución normal)

Enter the number of bins for histogram: bin := 30

Vector of random deviates:  $N_{nv} := \text{morm}(n, \mu_{nv}, \sigma_{nv})$

	0
0	0.4709
1	0.6678
2	0.587
3	0.5752
4	0.5576
5	0.575
6	0.6073
7	0.6084
8	0.5525
9	0.6023
10	0.6139
11	0.64
12	0.5282
13	0.6303
14	0.6044
15	...

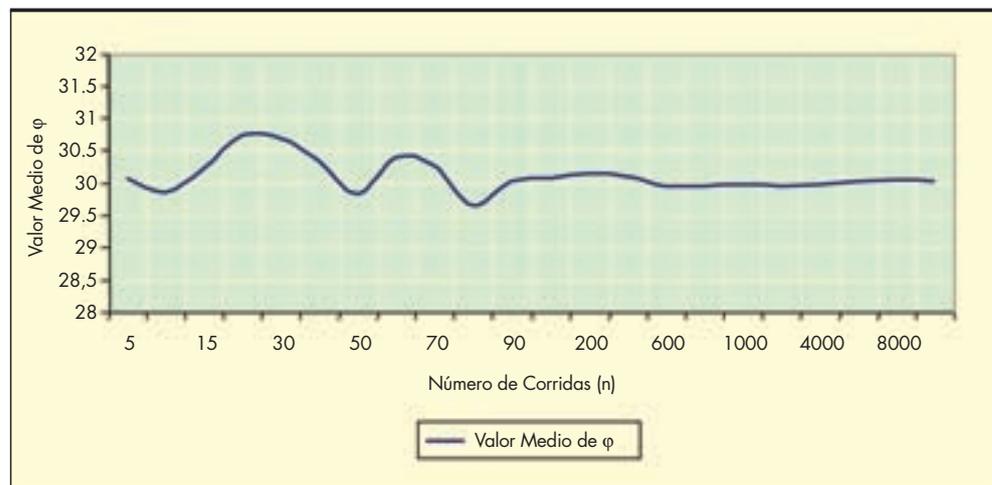
	0
0	16.404
1	18.56
2	17.757
3	17.07
4	17.569
5	18.629
6	17.235
7	18.546
8	18.215
9	17.677
10	18.666
11	17.598
12	16.313
13	17.334
14	18.384
15	...

	0
0	98.724
1	100.746
2	104.122
3	106.728
4	96.483
5	94.243
6	102.327
7	80.282
8	94.315
9	81.946
10	91.766
11	97.256
12	115.004
13	111.582
14	100.419
15	...

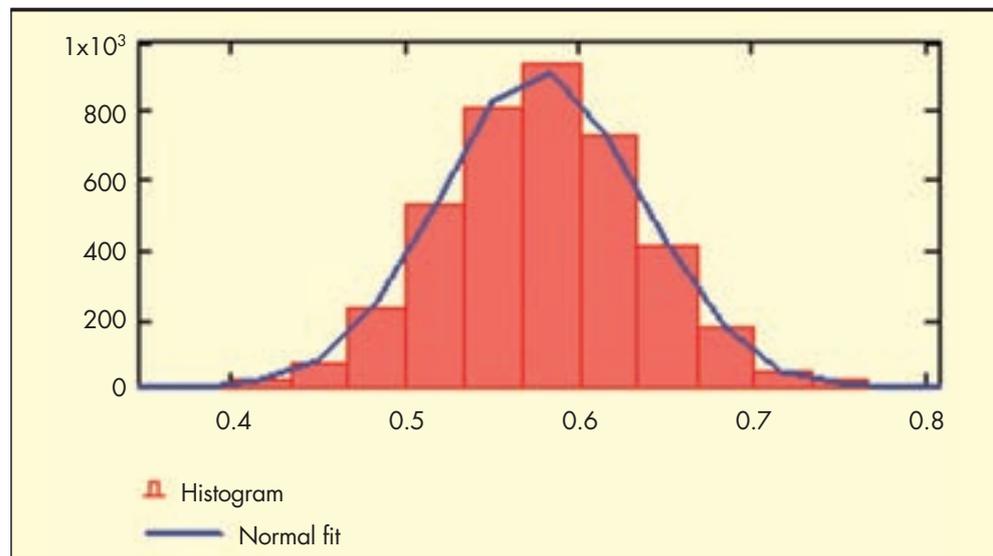
	0
2978	41.09
2979	45.871
2980	44.237
2981	57.124
2982	50.028
2983	77.917
2984	39.964
2985	46.515
2986	50.745
2987	54.063
2988	51.361
2989	64.63
2990	38.536
2991	41.375
2992	54.157
2993	...

	0
3984	$1.021 \cdot 10^{-3}$
3985	$1.298 \cdot 10^{-3}$
3986	$7.35 \cdot 10^{-4}$
3987	$8.157 \cdot 10^{-4}$
3988	$6.181 \cdot 10^{-4}$
3989	$1.12 \cdot 10^{-3}$
3990	$1.531 \cdot 10^{-3}$
3991	$1.185 \cdot 10^{-3}$
3992	$1.157 \cdot 10^{-3}$
3993	$1.815 \cdot 10^{-3}$
3994	$8.988 \cdot 10^{-4}$
3995	$1.021 \cdot 10^{-3}$
3996	$4.183 \cdot 10^{-4}$
3997	$7.772 \cdot 10^{-4}$
3998	$1.224 \cdot 10^{-3}$
3999	...

**FIGURA 2.** Procedimiento automatizado de generación aleatoria, aplicado a un suelo friccional con ángulo de fricción interna del suelo  $\phi = 30^\circ$  y coeficiente de variación  $V_{tg\phi}$  igual a 0.08.



**FIGURA 3.** Convergencia de la media para suelos friccionales ( $\phi=30^\circ$ ).



**FIGURA 4.** Histograma de frecuencias para una de las variables aleatorias consideradas en el cálculo de capacidad de carga: ángulo de fricción interna del suelo ( $\varphi = 30^\circ$ ).

Luego del análisis de estos resultados (los de la Tabla 3 y la Figura 3) se puede concluir que el valor medio de ángulo de fricción interna ( $\bar{\varphi}$ ) no muestra una alta convergencia para series menores de 400 valores. Para garantizar la citada convergencia del valor medio de esta variable ( $\varphi$ ), se requiere, como mínimo, de series de 400 o más valores.

Por otra parte, tanto para la desviación estándar así como para el coeficiente de variación de la citada variable  $\varphi$ , la convergencia se alcanza para valores mucho más altos que para el caso del valor medio. De aquí que se pueda plantear que para series de más de 4000 valores existe una convergencia satisfactoria para estos estadígrafos (desviación estándar y coeficiente de variación).

La conclusión más importante de este paso intermedio de la metodología y que aporta a la continuidad de la investigación se basa que, de acuerdo a los resultados obtenidos en la Tabla 3, se ha establecido un valor único de tamaño de corrida, para el desarrollo del experimento teórico. Este valor ha resultado ser 4000 (véase nuevamente la Figura 2, en la cual se realiza a generación aleatoria para un tamaño de corrida equivalente a 4000), y se ha escogido este valor por razones lógicas, ya que a partir de este existe una convergencia en los estadígrafos de todas las variables que intervienen en el diseño.

#### V. Determinación de histogramas y estadígrafos fundamentales para la data resultante de la generación

A partir de los resultados obtenidos en la generación aleatoria (4000 valores de  $\varphi$ ,  $g$ ,  $N_{cm}$ ,  $N_{cv}$  y  $N_v$ ) se procede a obtener la estadística descriptiva de cada una de las variables. El objetivo de este paso es el de comprobar estos resultados con los empleados antes de efectuar la generación. Posteriormente, se procede a graficar el histograma de frecuencias de cada variable, tal y como puede verse en el ejemplo mostrado en la Figura 4, en este caso para la variable  $\varphi$ .

Luego de efectuado este análisis (el de la Figura 4 y el del resto de los histogramas obtenidos), se concluye que puede lograrse una mejor distribución de frecuencias en la mayoría de las variables excepto en el ángulo de fricción interna. En esta variable la distribución es más discreta, incluso se pudo comprobar que a medida que disminuye el coeficiente de variación de esta variable, la distribución de frecuencias se hace menor. Esta cuestión no afecta en nada la continuidad de la aplicación de la metodología.

#### VI. Comprobación de la normalidad de los datos resultantes

Existen diversas pruebas para practicar la bondad de ajuste de una data. En el caso específico de esta investigación se ha escogido la prueba de Kolmogorov-Smirnov para comprobar la normalidad de la data resultante. La citada prueba se emplea cuando se puede suponer que la variable bajo consideración tiene una distribución continua, además se considera como una de las más poderosas, por lo que si se cumplen las condiciones para su aplicación, es la prueba que deberá usarse siempre. Los resultados de la aplicación de esta prueba en el ejemplo desarrollado –véase Tabla 4– indican que todas las variables provienen de una distribución normal, tal y como se había supuesto al inicio del procedimiento (Centeno, 2002).

Como se puede apreciar en la última fila de la Tabla 4, todos los resultados del test aportan valores inferiores a los establecidos teóricamente en la citada prueba ( $P < 1-\alpha$ ) para rechazar la hipótesis acerca de que la distribución muestral es del mismo tipo que la hipotética, por lo tanto, se acepta dicha hipótesis

#### VII. Determinación estocástica de la variable resultante (capacidad de carga $q_{br}$ ) y obtención de la probabilidad de falla ( $PF$ )

Para alcanzar el objetivo de un diseño geotécnico sobre bases probabilistas, se hace necesario el análisis de las variables que inciden en el mismo. Estas variables han sido definidas en el aspecto II y III de esta metodología; sin embargo, una cuestión de extrema importancia lo constituye la problemática de obtención del ancho ( $b$ ) de la cimentación.

Para el cálculo de la capacidad de carga se parte, primeramente, de obtener el ancho ( $b$ ) de la cimentación. Para esto se realiza un diseño geotécnico por el primer estado límite, tomándose para el citado diseño los valores medios de las variables que intervienen en la ecuación de capacidad de carga. (Ecuación 4).

Posteriormente se realiza la generación de valores aleatorios para cada variable. Seguidamente, con todos estos resultados –que son 4000 para cada una de las variables de entrada– se lleva a cabo, nuevamente, el proceso de diseño geotécnico por el primer estado límite. En este diseño se incluye el valor de  $b$ , obtenido inicialmente con los valores medios con que se contaba al inicio del problema, o sea, los datos

Parámetros		Ángulo de fricción interna de suelo ( $\phi$ ) (en grados)	Capacidad de carga (Qbt) (kN)	Resultante de cargas actuantes (Nm) (kN)
Tamaño de muestra	$n$	4000	4000	4000
Parámetros normales	Valor medio Desviación Típica	0.578491 0.057577	739.4886 305.8034	113.4134 11.09511
Diferencias extremas	Absoluta Positiva Negativa	0.011 0.011 -0.008	0.080 0.080 -0.056	0.010 0.010 -0.007
Resultado del Test	Kolmogorov - Smirnov Significac. asintótica bi-lateral	0.672 0.758	0.658 0.789	0.639 0.808

**TABLA 4.** Resultados de la aplicación del Test Kolmogorov Smirnov, para una de las corridas efectuadas, en este caso, un suelo friccional  $\phi = 30^\circ$  y Coeficiente de Variación ( $V_{ig\phi}$ ) igual a 0.10.

de valores medios de las variables de entrada, que habían sido tomados de ensayos.

El resultado de todo este proceso son los valores de capacidad de carga –que para esta investigación son 4000–, a los cuales se les determinan los estadígrafos fundamentales y se le comprueba aleatoriedad y normalidad por el test de Kolmogorov Smirnov, de manera similar a lo citado en el paso VI de esta metodología.

**OBTENCIÓN DE LA PROBABILIDAD DE FALLA (Pf)**

Como paso final de la metodología, se calcula la probabilidad de falla, obteniéndose resultados aproximados al 50% –esto significa una probabilidad de falla igual a 0.5–, en concordancia con lo establecido en las bases teóricas del diseño probabilista. Estos resultados indican que al trabajar con el valor medio de una variable que incide en el proceso de diseño (en este caso: b), definitivamente la probabilidad de falla debe aproximarse a 0.5.

Para calcular esta probabilidad de falla, se ha empleado un método gráfico. Este método consiste en determinar el área bajo la intersección de las curvas de resistencia y cargas ( $Y_2$  y  $Y_1$ ). Para este se hace uso del concepto de independencia estadística. Este plantea que dos variables aleatorias son estadísti-

camente independientes si la probabilidad de que una variable tome algún valor no afecta en nada la probabilidad de que la otra variable tome cualquier valor. (Rosowsky, 1999).

La consecuencia más importante de este concepto radica en que la probabilidad simultánea de ocurrencia de dos variables aleatorias puede ser calculada como el producto de las probabilidades de cada una de ellas. Ecuación 5.

$$Pf = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Q(x) \cdot f_F(x) dx \tag{5}$$

Donde:

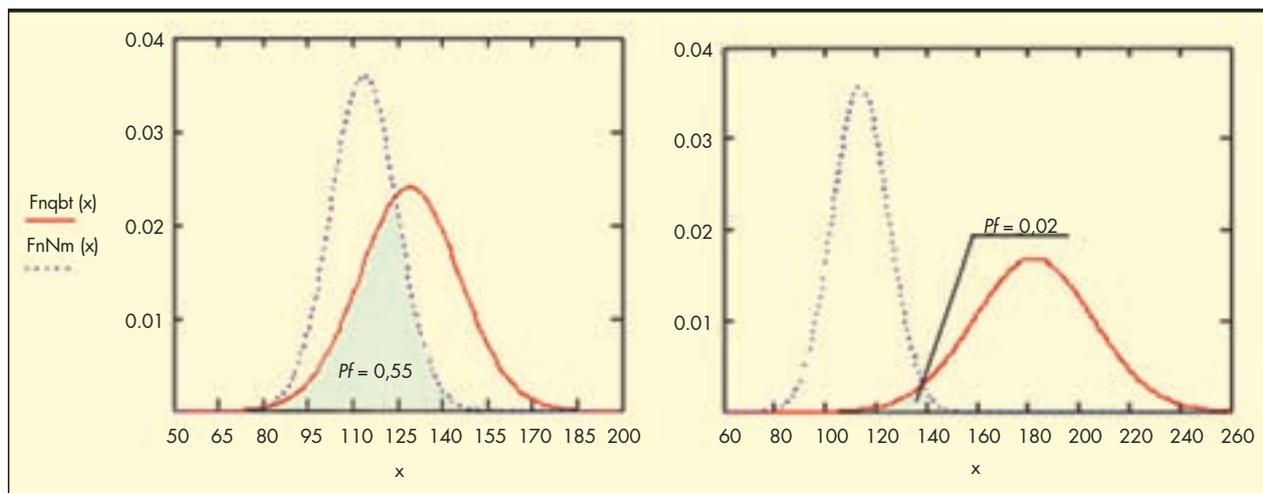
$F_Q(x)$ : Función de distribución de probabilidades de la resistencia.

$f_F(x)$ : Función de densidad de probabilidades de las cargas.

A partir de la Ecuación 5 se calcularon los valores de probabilidad de falla. Estos resultados han sido graficados y pueden verse en el ejemplo de la Figura 5. Donde:

$F_{nqbt}(x)$ : Función de distribución de probabilidades de la capacidad de carga (Qbt).

$F_{nNm}(x)$ : Función de distribución de probabilidades de las cargas (Nm).



**FIGURA 5.** Funciones de distribución de probabilidades de las cargas y la resistencia para suelos friccionales: a)  $\phi = 30^\circ$ ,  $\nu = 0.03$ ,  $b_{diseño} = 0.84$  m. b)  $\phi = 30^\circ$ ,  $\nu = 0.03$ , brequerida = 1.04 m.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIONES

#### PROCEDIMIENTO DE DISEÑO SOBRE BASES PROBABILISTAS PARA EL CASO EN ESTUDIO

Tomando como punto de partida, los valores obtenidos de capacidad de carga, se procede a determinar el valor medio de la citada variable. De igual modo se aplican las ecuaciones establecidas para la obtención del valor medio de las cargas actuantes. Finalmente se calcula la desviación estándar y el correspondiente coeficiente de variación, tanto para las cargas así como para la capacidad de carga, de acuerdo a las expresiones:

$$u_{Y_1} = \frac{\sigma_{Y_1}}{Y_1} \tag{7}$$

$$u_{Y_2} = \frac{\sigma_{Y_2}}{Y_2} \tag{8}$$

Siendo:

$\sigma_{Y_1}$  y  $Y_1$ : Resultados de la desviación estándar y valor medio de las cargas actuantes.

$\sigma_{Y_2}$  y  $Y_2$ : Resultados de la desviación estándar y valor medio de la capacidad de carga. (Estos valores son obtenidos a partir de un análisis estadístico descriptivo, para cada variable).

Como segundo paso, teniendo en cuenta que los valores de b obtenidos (bdis), no satisfacen la condición de probabilidad de falla ( $Pf \leq 0.02$ ) en cimentaciones, es necesario encontrar los valores de b que garanticen tal condición (breq). Para esto se lleva a cabo nuevamente el proceso de diseño; se parte de un valor de b que se irá variando hasta satisfacer la citada condición ( $Pf \leq 0.02$ ), o sea  $H=0.98$  (Nivel de seguridad). Tablas 5 y 6.

Luego del análisis de los resultados de las Tablas 5 y 6 devienen conclusiones muy importantes. Tales conclusiones ratifican las bases y las hipótesis consideradas para el desarrollo de la metodología propuesta. En primer lugar y como conclusión más importante, se puede ver que los resultados de probabilidad de falla obtenidos con el ancho b, resultante

Resultados del diseño con variables aleatorias (Suelos $\varphi \leq 30^\circ$ )													
$\sigma$ (°)	$V_{tg\varphi}$	bdis (m)	$Y_1$ (kN)	$u_{Y_1}$	$Y_2$ (kN)	$u_{Y_2}$	Pf	breq (m)	$Y_1$ (kN)	$u_{Y_1}$	$Y_2$ (kN)	$u_{Y_2}$	Pf
25	0,03	1,26	113,413	0,098	129,697	0,118	0.525	1,53	113,413	0,098	190,28	0,118	0,019
25	0,08	1,26	113,413	0,098	134,05	0,292	0.525	2,10	113,413	0,098	359,40	0,288	0,020
25	0,10	1,26	113,413	0,098	136,84	0,366	0.508	2,61	113,413	0,098	555,61	0,357	0,021
27,5	0,03	1,03	113,413	0,098	129,64	0,124	0.533	1,26	113,413	0,098	192,89	0,123	0,020
27,5	0,08	1,03	113,413	0,098	134,584	0,310	0.522	1,80	113,413	0,098	394,67	0,304	0,02
27,5	0,10	1,03	113,413	0,098	137,772	0,389	0.504	2,32	113,413	0,098	673,19	0,378	0,021
30	0,03	0,84	113,413	0,098	128,754	0,130	0.558	1,04	113,413	0,098	196,07	0,129	0,020
30	0,08	0,84	113,413	0,098	134,315	0,329	0.529	1,55	113,413	0,098	436,61	0,321	0,021
30	0,10	0,84	113,413	0,098	137,928	0,414	0.523	2,25	113,413	0,098	920,61	0,399	0,021

TABLA 5. Resultados del diseño con entrada de variables estocásticas o aleatorias, para suelos puramente friccionales ( $\varphi \leq 30^\circ$ ).

Resultados del diseño con variables aleatorias (Suelos $\varphi > 30^\circ$ )													
$\sigma$ (°)	$V_{tg\varphi}$	bdis (m)	$Y_1$ (kN)	$u_{Y_1}$	$Y_2$ (kN)	$u_{Y_2}$	Pf	breq (m)	$Y_1$ (kN)	$u_{Y_1}$	$Y_2$ (kN)	$u_{Y_2}$	Pf
32,5	0,03	0,69	113,413	0,098	130,055	0,136	0.536	0,86	113,413	0,098	200,53	0,136	0,020
32,5	0,08	0,69	113,413	0,098	131,935	0,218	0.539	0,98	113,413	0,098	260,70	0,216	0,021
33,5	0,10	0,69	113,413	0,098	136,408	0,349	0.51	1,37	113,413	0,098	510,12	0,339	0,020
35	0,03	0,56	113,413	0,098	129,074	0,143	0.561	0,71	113,413	0,098	205,73	0,143	0,019
35	0,08	0,56	113,413	0,098	131,173	0,231	0.551	0,82	113,413	0,098	274,73	0,228	0,020
35	0,10	0,56	113,413	0,098	136,196	0,37	0.513	1,20	113,413	0,098	589,03	0,358	0,021
37,5	0,03	0,46	113,413	0,098	192,308	0,151	0.499	0,58	113,413	0,098	208,77	0,150	0,020
37,5	0,08	0,46	113,413	0,098	261,34	0,244	0.507	0,68	113,413	0,098	287,29	0,240	0,021
37,5	0,10	0,46	113,413	0,098	599,444	0,393	0.482	1,08	113,413	0,098	725,43	0,378	0,021

TABLA 6. Resultados del diseño con entrada de variables estocásticas o aleatorias, para suelos puramente friccionales ( $\varphi > 30^\circ$ ).

de un diseño con valores medios (bdis), aportan resultados aproximados al 50%. Sin embargo, para lograr que la probabilidad de falla de la estructura cumpla con la condición de diseño, de acuerdo a criterios de seguridad ( $P_f=0,02$ , para estructuras geotécnicas) se hizo necesario incrementar el valor de  $b$  (breq).

Con este incremento de  $b$ , se obtuvo que para garantizar tal condición, es preciso crecer estos valores (los de bdis), en ocasiones hasta más del doble de su valor inicial. Aunque, en la medida en que aumenta el valor de la variable  $\phi$ , el ancho del cimiento es menor y por lo tanto es menor el ancho requerido para hacer cumplir la condición de seguridad.

Por otro lado, puede verse que el coeficiente de variación de la variable respuesta  $Y_2$ , se incrementa en la medida en que aumenta el coeficiente de variación  $\phi$ . Este incremento ocurre, incluso para un mismo valor de ángulo de fricción interna del suelo.

Al analizar los resultados de probabilidad de falla, se aprecia una disminución de esta variable, cuando para un mismo ángulo de fricción interna del suelo se varía su coeficiente de variación. Sin embargo, si se analiza este fenómeno, variando el ángulo de fricción interna del suelo, para un mismo coeficiente de variación de esta variable, se puede apreciar, una disminución en la cuantía de  $Y_2$ , y una disminución de la probabilidad de falla correspondiente.

Es importante aclarar que en este ejemplo, el valor medio de las cargas actuantes así como sus coeficientes de variación permanecen constantes. Esto es propiamente parte del proceso de diseño, o sea, aquí se trabaja para obtener un valor de capacidad de carga y para esto las cargas son parte de los datos del problema, por lo que no varían. Sin embargo sí se analizan estadísticamente ya que inciden directamente en la determinación de la probabilidad de falla.

Como conclusión final, se plantea que los valores de probabilidad de falla obtenidos mediante vías analíticas, como la implementada en esta investigación generan un margen más grande de errores en los resultados. A partir de aquí, puede deducirse que los valores de  $b_{req}$  se pueden disminuir si se implementa una vía de obtención de probabilidad de falla que garantice una eficiencia superior. Esto bien pudiera ser mediante el empleo de métodos probabilistas de diseño, específicamente empleando la *Teoría de la seguridad*, la cual se basa absolutamente en conceptos probabilistas, pero el desarrollo de estas teorías constituye el tema de otras investigaciones.

**COMPARACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA CON LOS MÉTODOS TRADICIONALES EXISTENTES DE DISEÑO**

A modo de conclusión se lleva a cabo una comparación desarrollando tres diseños con idénticas condiciones. Específicamente este caso, se presenta una cimentación superficial apoyada sobre un suelo puramente friccional, con un valor de ángulo de fricción  $\phi=30^\circ$ . A partir de este proceso se han obtenido los resultados de la Tabla 7.

Se puede apreciar en la Tabla 7 que haciendo uso del método de estados límites se obtiene un valor resultante de diseño muy inferior al obtenido a través de la aplicación del método del factor de seguridad global, lo cual tiene sentido a partir de las bases que se establecen para el citado método, en el cual cada variable del diseño es conducida a un valor de cálculo que permita comprobar el estado límite analizado. Asimismo se nota que el valor del coeficiente de seguridad general  $K$  disminuye considerablemente pues este ahora es el resultado de la multiplicación de los coeficientes de seguridad de las cargas, los materiales y un coeficiente de seguridad general, los cuales son definidos de modo estadístico, a partir de resultados de ensayos realizados para cada una de estas variables –las actuantes y las resistentes–.

Por otro lado, ya cuando se introduce el tema de la simulación estocástica, se está haciendo un aproximación y un análisis estadístico mucho más severo, en este caso se analizan todas las variables en conjunto, y a posteriori, al introducir el tema de la seguridad que también tiene un fundamento estadístico complejo, se logra la combinación perfecta para lograr un resultado mucho más eficiente y así lo demuestra el valor de ancho de cimentación obtenido y el cual puede verse en la tercera fila, segunda columna de la Tabla 7. Con este valor se ha alcanzado una economía en el diseño equivalente a un 65% comparado con el método del factor de seguridad global, incluso considerable esta reducción en relación al método de la Teoría de la seguridad que hasta el momento era el método más racional de diseño geotécnico.

De igual manera se ha alcanzado una reducción considerable en el factor de seguridad global  $K$ , y esto se debe a la inserción de un análisis estadístico más notable y en conjunto, amparado por la aplicación de técnicas sofisticadas de simulación.

Por tales motivos, se plantea que el diseño por métodos estocásticos, además de modelar de manera más realista las condiciones de un diseño geotécnico, se considera un método mucho más racional en el diseño de cimentaciones superficiales, tal y como puede verse en los resultado de la citada Tabla 7.

**4. CONCLUSIONES**

1. Las herramientas fundamentales para desarrollar una buena modelación estocástica lo constituyen la construcción del modelo, el análisis estadístico de las variables que inciden, y la presencia de un mecanismo de generación de números aleatorios.
2. La caracterización estadística de las variables aleatorias que intervienen en los diseños geotécnicos: cargas actuantes y propiedades físico-mecánicas de los suelos, tomada del estudio y valoración de la experiencia nacional e internacional, es factible de aplicar en la modelación estocástica convencional.
3. El valor mínimo de la serie con la que se debe trabajar, para obtener resultados confiables en la variable de res-

Método de diseño empleado	Ángulo de fricción $\phi$ ( $^\circ$ )	Brequerida (m)	Coficiente de seguridad general K
Factor de Seguridad Global	30	1,75	3.00
Estados Límites.	30	1.55	2.34
Diseño en seguridad	30	1.14	1.45

**TABLA 7.** Resultados del diseño comparativo de la metodología propuesta con métodos existentes.

puesta, luego de todo el proceso de simulación, es de 4000 juegos de datos.

4. Los resultados de la simulación estocástica con solución analítica han definido la magnitud de los coeficientes de variación de las cargas y la resistencia de los materiales, sin embargo la probabilidad de falla obtenida se dispersa de la condición de diseño por seguridad; por lo que se hizo necesario una solución probabilista del problema para garantizar la citada condición.
5. Se ha demostrado la efectividad de la metodología propuesta, cuando esta es aplicada con solución analítica, con respecto a métodos anteriores de diseño, de aquí que esta es factible de aplicar para cualquier caso práctico de diseño geotécnico, debido a su exactitud y su bajo consumo computacional.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Ripley, B. D. 1987. Stochastic Simulation. Wiley and Sons, N.Y.
2. Leuangthon, O. 2006. The principles of Monte Carlo Simulation, University of Alberta, Canada.
3. Quevedo, G. 2002. Aplicación de los Estados Límites y la Teoría de Seguridad en el Diseño Geotécnico en Cuba. Tesis presentada en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias. Comisión de Grado Científico de la República de Cuba, La Habana, Cuba.
4. Brinch Hansen, J. 1961. A general formula for bearing capacity. The Danish Geotechnical Institute, Bulletin No 11, Copenhagen.
5. Centeno, R. 2002. Simulación de Monte Carlo y su aplicación a la Ingeniería Geotécnica. VIII Conferencia Gustavo Pérez Guerra. Universidad Central de Venezuela. Escuela Ingeniería Civil. Caracas, Venezuela.
6. Phoon, K. 2006. Modeling and simulation of stochastic data. Singapore. Department of civil engineering, University of Singapore.
7. Quevedo, G., Recarey, C. 2005. Modelación Estocástica y Teoría de Seguridad en el estudio de conexiones de estructuras mixtas. Universidad Politécnica de Cataluña. España.
8. Rosowsky, D. V. 1999. Structural Reliability, Structural Engineering Handbook. Clemson University, Clemson, SC, Ed. Chen Wai-Fah Boca Raton: CRC Press LLC.
9. Koris, K., Szalai, K. 1998. Stochastic distribution of structural resistance in reinforced concrete beams. 2do Simposio de Phds. en Ingeniería Civil. Universidad de Budapest, 1998.