

Modelización de la rotura y fluidificación en geomateriales y geoestructuras

MANUEL PASTOR (*)

RESUMEN La rotura de las geoestructuras puede ser causada por cambios en las tensiones efectivas debidos bien por cargas externas (terremotos, por ejemplo), bien por variación de las presiones intersticiales (lluvia), o cambios en la geometría (erosión), así como por una disminución de las propiedades resistentes de los materiales (meteorización, ataque químico, etc). El caso particular de los deslizamientos es interesante, existiendo diversas clasificaciones que tienen en cuenta su forma, velocidad de propagación, etc. Dos de estos casos son los deslizamientos propiamente dichos y los flujos. En el primer caso, la deformación se concentra en zonas de pequeño espesor, que se idealiza como una superficie (superficie de rotura). La cinemática de esta rotura se puede considerar como el movimiento relativo de dos masas cuyas deformaciones no son grandes. Este mecanismo está usualmente asociado a materiales sobreconsolidados que presentan reblandecimiento. Los flujos se producen generalmente en materiales de baja densidad y estructura metaestable, con tendencia a compactar, de forma que se generan presiones intersticiales que aumentan el ángulo de rozamiento movilizado, pudiéndose llegar en algunos casos a la licuefacción. Este mecanismo de rotura se conoce como rotura difusa, y no ha sido tan estudiado como el de localización a pesar de se trata frecuentemente de roturas de tipo catastrófico. De hecho, el suelo pasa de un estado sólido a un estado fluidificado, con una gran movilidad. Es importante para el ingeniero predecir tanto el comportamiento de las geoestructuras bajo las cargas de cálculo como las condiciones en las que se producirá la rotura. De esta manera, en algunos casos, se podrán reforzar las zonas más débiles aumentando así su seguridad. En otros casos, no se podrá realizar este refuerzo (grandes deslizamientos como avalanchas, lahares, etc), pero sí se podrán conocer las consecuencias de la rotura: velocidad de propagación, alcance, espesores, etc. La modelización de estos problemas es compleja, ya que aparecen dificultades en los modelos matemáticos, constitutivos o reológicos y numéricos. Dado que en los geomateriales aparece una interacción fuerte entre el esqueleto sólido y los fluidos intersticiales, esto debe ser tenido en cuenta en los modelos matemáticos. En este trabajo se describirán, pues, el desarrollo y aplicación de técnicas avanzadas de modelización; matemática, constitutiva/reológica y numérica. Se dedicará especial atención a los problemas de transición entre suelos y suelos fluidificados, que hoy en día se estudian en una gran mayoría de los casos con modelos diferentes. Así por ejemplo, se emplean modelos constitutivos para el comportamiento previo a la rotura, y reológicos para los materiales fluidificados. En lo que respecta a los modelos matemáticos, existen formulaciones nuevas en velocidades (o desplazamientos), tensiones, y presiones de aire y agua intersticial, de los que se pueden obtener modelos simplificados integrados en profundidad para deslizamientos rápidos. Respecto de los modelos constitutivos, es interesante la teoría de la Plasticidad Generalizada (modelo básico de Pastor-Zienkiewicz y extensiones a suelos no saturados). Se estudiará la extensión de estos modelos elastoplásticos a la viscoplasticidad (Perzyna y consistente), explorando la posibilidad de emplearlos tanto antes como después de la rotura. Finalmente, en lo que a modelos numéricos se refiere, se describirá la implementación de los modelos matemáticos y constitutivos desarrollados en (i) modelos clásicos de elementos finitos, como el GeHoMadrid desarrollado en los grupo investigador M2i al que pertenece el autor de este trabajo, (ii) Métodos de tipo Taylor Galerkin, y (iii) métodos sin malla como el SPH y el Material Point Model. Estos modelos se aplicarán, principalmente a (i) Licuefacción de estructuras cimentadas en el fondo marino (ii) presas de residuos mineros (iii) deslizamientos rápidos de laderas.¹

MODELLING OF DIFFUSE FAILURE AND FLUIDIZATION IN GEOMATERIALS AND GEOSTRUCTURES

ABSTRACT Failure of geostructures is caused by changes in effective stresses induced by external loads (earthquakes, for instance), changes in the pore pressures (rain), in the geometry (erosion), or in material properties (chemical attack, degradation, weathering).

Landslides can be analyzed as the failure of a geostructure, the slope. There exist many alternative classifications of landslides, but we will consider here a simple classification into slides and flows.

In the case of slides, the failure consists on the movement of a part of the slope with deformations which concentrate in a narrow zone, the failure surface. This can be idealized as localized failure, and it is typical of overconsolidated or dense materials exhibiting softening.

On the other hand, flows are made of fluidized materials, flowing in a fluid like manner. This mechanism of failure is known as diffuse failure, and has received much less attention by researchers.

Modelling of diffuse failure of slopes is complex, because there appear difficulties in the mathematical, constitutive and numerical models, which have to account for a phase transition. This work deals with modeling, and we will present here some tools recently developed by the author and the group to which he belongs.

(*) Grupo de Modelos Matemáticos en Ingeniería M2i. Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid y Laboratorio de Geotecnia del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas. Email: manuel.pastor@upm.es

¹ Este texto es una ampliación del discurso de entrada en la Real Academia Sevillana de Ciencias presentado por el autor el 11 de Marzo de 2010.

Palabras clave: Geomateriales, Rotura, Localización, Rotura difusa, Modelización, Fluidificación, Licuefacción.

Keywords: Geomaterials, Failure, Localized failure, Diffuse failure, Modelling, Fluidization, Licuefaction.

1. INTRODUCCIÓN

El tema central de este trabajo es la modelización del comportamiento de geomateriales y geoestructuras, de sus procesos de rotura, y en especial, de aquellos casos en los que el material se comporta como un fluido tras la rotura.

En el Diccionario de la Real Academia de la Lengua se encuentran dos acepciones que describen lo que es un modelo.

En primer lugar, modelo es *una representación en pequeño de alguna cosa*. Los ingenieros hemos empleado modelos a escala en problemas cuya resolución no era posible abordar por otros métodos. Es el caso de los vertederos de las presas, en los cuales hay un problema de superficie libre y de mezcla del agua con el aire, el de los grandes puertos en los que se desea estudiar problemas como la propagación del oleaje y la agitación en sus dársenas, geoestructuras como las laderas hechas inestables por la lluvia o los esfuerzos generados por el viento en elementos estructurales singulares. El paso de los años, con el desarrollo de las técnicas numéricas de modelización ha ido restando protagonismo a estos modelos a escala reducida, aunque falta todavía mucho tiempo y esfuerzo para que puedan ser sustituidos.

La segunda acepción que nos interesa aquí es la de *“esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento”*. Dejando de lado nuestro acuerdo sobre el ejemplo elegido para ilustrar este término en el Diccionario, diré que los ingenieros hemos empleado los modelos para traducir, empleando fórmulas y ecuaciones, la complejidad de los fenómenos que intervienen en nuestro quehacer cotidiano. En muchos casos hemos sido capaces de elaborar fórmulas sencillas de gran utilidad que permiten dimensionar vigas y otros elementos estructurales, pero siguen siendo mayoría los casos en los que la complejidad del fenómeno hace imposible llegar a estas fórmulas sencillas.

Los modelos de los que tratará este trabajo son modelos matemáticos: fórmulas y ecuaciones que describen los fenómenos que observamos, modelos constitutivos que explican cómo se comportan los materiales, y modelos numéricos en los que se aproximan los dos primeros y que se pueden implementar en programas de cálculo.

Y los materiales que describiremos son los geomateriales, especialmente aquellos en los que la rotura puede llevar a su fluidificación.

2. LOS GEOMATERIALES: LA ESCUELA ALERT

El concepto de geomaterial es relativamente nuevo. Nace de la inquietud de un grupo de investigadores pertenecientes a áreas como la Mecánica de Suelos, de Rocas o del hormigón por descubrir aspectos comunes en el comportamiento de estos materiales, objeto hasta entonces de áreas científicas diferentes.²

² El Profesor Félix Darve crea en los años ochenta dos asociaciones o redes de investigación a niveles francés y europeo conectadas entre sí, con el objetivo de profundizar en el estudio de los geomateriales. En la actualidad, la red ALERT Geomaterials comprende 24 universidades, en su mayoría europeas.

Los geomateriales son materiales de origen geológico que han sido transformados, bien por la acción de la naturaleza, bien por la del hombre. Existen geomateriales de tipo granular o pulverulento como las arenas y de tipo cohesivo, como las arcillas, rocas y hormigones. Existen geomateriales de rotura dúctil, como las arcillas saturadas normalmente consolidadas, y de rotura frágil como las pizarras o granitos. Todos ellos tienen una propiedad fundamental en común: su comportamiento mecánico depende de la presión de confinamiento³. Al aumentar ésta, el material se rigidiza, aumentando la tensión tangencial que causa su rotura.

Se trata, en general, de materiales porosos, con huecos ocupados por fluidos como aire, agua, o una mezcla de ambos. La tensión total que actúa sobre esta mezcla se reparte entre sus componentes, apareciendo así las denominadas tensiones efectivas que controlan la deformación del esqueleto sólido y las presiones intersticiales en los fluidos que rellenan los poros. Una segunda propiedad importante de los geomateriales es el acoplamiento mecánico entre el esqueleto sólido y los fluidos que rellenan sus poros, que es clave para comprender su comportamiento.

Debido a la estructura granular de los geomateriales, la deformación tangencial origina un cambio de volumen que depende de su naturaleza, de su estado denso o suelto y de la presión de confinamiento, apareciendo densificación en materiales sueltos o poco densos y dilatación en los densos. Los materiales, pues, presentan dilatación, que es el acoplamiento entre las deformaciones tangenciales y las volumétricas inducidas por éstas.⁴

En el caso de los suelos, los estados residuales, una vez agotada su resistencia, se encuentran situados sobre una línea en el espacio presión efectiva –tensión tangencial– índice de huecos, que se denomina “Línea de Estado Crítico”.⁵

Estas cuatro propiedades (dependencia de la presión de confinamiento, acoplamiento sólido-fluido intersticial, dilatación y existencia de un estado crítico) son ingredientes fundamentales tanto para comprender el comportamiento de los geomateriales como para desarrollar modelos matemáticos y constitutivos que describan su comportamiento.

Y es mediante estos modelos como los ingenieros, interesados en proyectar en condiciones lejanas de la rotura, pueden predecir cómo se deformará una geoestructura o una cimentación bajo las cargas de servicio, las condiciones en las que se producirá la rotura y las consecuencias de la misma, tanto en la estructura analizada como en otras a las que pueda afectar.

³ La dependencia de la presión de confinamiento aparece en el criterio de rotura de Mohr Coulomb, descrito en el trabajo de Coulomb de 1773, y aplicado por Poncelet y Rankine posteriormente a problemas prácticos de Ingeniería. Coulomb, C.A., Mem.Math. et Phys. 7, 343, 1773.

⁴ Los primeros estudios de la dilatación en medios granulares se deben a Reynolds (1885), que observó la tendencia a dilatar de las arenas sometidas a deformación tangencial. O.Reynolds, “The dilation of media composed of rigid particles in contact”, Philosophical Magazine, S5, 20, 469-481, 1885.

⁵ El concepto de Estado Crítico ha sido propuesto por Roscoe, Schofield y Wroth en 1956, aunque Casagrande en 1935 observó que, a presión constante, tras producirse la rotura, la densidad final de la arena era constante e independiente de su densidad inicial.

3. MODELIZACIÓN DE GEOMATERIALES

La Geotecnia⁶ ha sido comparada, acertadamente con la Medicina por ser tan diferentes entre sí los problemas que presentan distintos suelos -no hay enfermedades, sino enfermos- y por compartir con aquella un cierto carácter de arte.

Llevando más lejos la comparación, se podría decir que ambas se han beneficiado de los adelantos tecnológicos que se han producido en las últimas décadas. Recordemos, entre otros, los equipos de resonancia magnética nuclear empleados también en Geotecnia, o el georadar. La informática ha permitido a los técnicos de ambas ciencias disponer de información más precisa, siendo posible predecir el comportamiento de una válvula nueva en el corazón, o el de una presa bajo la acción de un sismo. El desarrollo de las técnicas de modelización, junto con el abaratamiento de los equipos informáticos, permite hoy realizar cálculos precisos mediante programas que funcionan en pequeños ordenadores.

Estos programas de cálculo incorporan, en general, tres componentes fundamentales: un modelo matemático, un modelo constitutivo o reológico, y un modelo numérico.

La primera componente es el modelo matemático, un conjunto de ecuaciones con el que intentamos describir de forma lo más precisa posible, los aspectos fundamentales del problema que deseamos resolver. En general, se trata de ecuaciones de balance de masa, de momento lineal, y de energía.

Los modelos constitutivos o reológicos⁷ describen el comportamiento del material, permitiendo relacionar las tensiones con las deformaciones, bien directamente, bien mediante relaciones entre sus incrementos. Existe hoy en día una gran diversidad de modelos que describen el comportamiento de geomateriales: modelos elásticos, elastoplásticos, viscoplásticos, viscoelásticos o de daño con los que se pueden reproducir los aspectos fundamentales de su comportamiento mecánico.

Si el problema a resolver es demasiado complejo, simplificaremos las ecuaciones hasta que su solución quede a nuestro alcance, llegando en algunos casos a problemas para los que existe una solución analítica. Y así, basándonos en un "divide y vencerás", estudiaremos por separado problemas como la consolidación unidimensional, la deformabilidad elástica, o la rotura de ciertos tipos sencillos de cimentaciones, para los que se han encontrado soluciones analíticas de gran utilidad práctica. Sin embargo, esto nos ha hecho perder en ocasiones la visión global del problema, del cual los fenómenos considerados son tan sólo aspectos parciales.

No siempre es posible encontrar una solución analítica al problema, debiéndose recurrir a técnicas numéricas para resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales del modelo. Entre las distintas técnicas numéricas que existen en la actualidad, pueden mencionarse los elementos finitos, las diferencias finitas, los volúmenes finitos, los métodos sin malla, los métodos basados en la integral de contorno, y los elementos discretos.

Los ingredientes de un modelo son, por lo tanto, el modelo matemático propiamente dicho, la ecuación constitutiva y el modelo numérico. La capacidad de predicción global del modelo nunca será superior a la del componente peor, hecho que hay que tener en cuenta a la hora de elegir el modelo que sea más adecuado para nuestras necesidades. Por ejemplo, no tiene sentido intentar emplear un modelo estático para es-

diar el comportamiento de una estructura marina sometida al oleaje y su posible rotura por licuefacción.

Intentaremos a continuación dar una visión general de la modelización de geomateriales y geoestructuras, describiendo los modelos matemáticos, constitutivos, reológicos y numéricos que se han desarrollado últimamente.

3.1. MODELOS MATEMÁTICOS. LAS ECUACIONES DE BIOT-ZIENKIEWICZ Y EL PROBLEMA DE LA ROTURA POR LICUEFACCIÓN DE LA PRESA DE SAN FERNANDO EN CALIFORNIA

La definición de una tensión efectiva responsable del comportamiento del esqueleto sólido es la pieza clave en los modelos matemáticos que, con distintos grados de complejidad, se han empleado para describir el comportamiento de los geomateriales. El primer modelo que se propuso para estudiar el acoplamiento del sólido con el fluido intersticial para geomateriales elásticos se debe a Biot⁸.

Sin embargo, en la ingeniería geotécnica práctica no se emplearon estas ecuaciones debido a su complejidad y a la necesidad de aplicarlas a problemas en los que no era posible obtener simplificaciones de las mismas. Tanto en los textos de Geotecnia como en los proyectos se utilizaban modelos sin acoplamiento, con parámetros mecánicos que dependían de que la aplicación de las cargas fuera lenta (condiciones drenadas) o rápida, sin que se produjera un drenaje efectivo (condiciones sin drenaje). Únicamente el modelo de consolidación unidimensional de Terzaghi⁹ permitía estudiar, de una forma sencilla, el acoplamiento del sólido con el fluido intersticial.

En el año 1971 tuvo lugar la rotura del paramento de aguas arriba de la presa inferior de San Fernando, durante el terremoto del mismo nombre. Se trataba de una presa que había sido construida mediante un relleno hidráulico de muy baja densidad, en el que bajo la acción del terremoto se produjo su licuefacción¹⁰. Afortunadamente, la rotura consistió en un deslizamiento en el espaldón, que hizo descender la coronación diez metros, quedando ligeramente por encima del nivel de embalse, y no se produjeron réplicas que causaran mayores daños. Se evacuó a la población del valle en la zona de riesgo -unas ochenta mil personas-, y se bajó el nivel del embalse en los tres días siguientes.

Esta rotura, así como la preocupación por el comportamiento de estructuras y obras de tierra y su posible licuefacción bajo la acción de terremotos, impulsó el estudio del acoplamiento entre el esqueleto sólido y el fluido intersticial, investigándose tanto las técnicas de ensayos dinámicos como los modelos matemáticos, numéricos y constitutivos.

Los años siguientes vieron el desarrollo de nuevos equipos de laboratorio para la realización de ensayos dinámicos y cíclicos, los cuales permitieron progresar en la comprensión de las condiciones en las que se producía la rotura y la licuefacción de arenas poco densas. A partir de los resultados obtenidos en estos ensayos se desarrollaron modelos simplificados, limitados tanto por los modelos matemáticos, constitutivos y numéricos empleados, como por los medios de cálculo disponibles.

En los años ochenta, Zienkiewicz y sus colaboradores en la Universidad de Swansea generalizaron las ecuaciones de

⁶ Esta comparación se debe al Profesor Jiménez Salas, maestro de varias generaciones de ingenieros.

⁷ Se suelen denominar modelos o ecuaciones constitutivas a las relaciones entre tensiones, deformaciones unitarias, o sus incrementos para sólidos, empleándose el término modelo reológico en el caso de fluidos.

⁸ Biot, M.A., Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. J.Appl.Phys. 26, 182-185, 1955.

⁹ Terzaghi, K. Theoretical Soil Mechanics, John Wiley and Sons, New York, 1943.

¹⁰ Seed, H.B., Lee, K.L., Idriss, I.M., y Makdisi, F., Analysis of the slides in the San Fernando Dams during the earthquake of February 9, 1971, Earthquake Engineering Research Center 73-2, Univ. California, Berkeley, 1973.

Biot, extendiéndolas a materiales cuyo comportamiento es no lineal y a grandes deformaciones¹¹. Al grupo de Zienkiewicz se debe la formulación conocida como u-pw, o desplazamientos presiones intersticiales, que es la empleada en la mayor parte de programas de cálculo en geotecnia en nuestros días, así como su extensión a suelos no saturados¹². El primer ingrediente para la modelización, tanto de los problemas acoplados del día a día geotécnico, como de los más complejos problemas de rotura dinámica quedaba establecido. Los dos ingredientes restantes –los modelos constitutivos y las técnicas numéricas de aproximación– habían conocido un desarrollo similar. A finales de los años ochenta estaban disponibles todos ellos, y comenzaba el rápido desarrollo de una nueva generación de ordenadores personales que pondría al alcance de todos los ingenieros el uso de estos modelos.

3.2. MODELOS CONSTITUTIVOS

El segundo ingrediente necesario en la modelización es el modelo constitutivo, que traduce en fórmulas el comportamiento observado en los ensayos de laboratorio. Permite conocer las deformaciones que causan las tensiones antes de llegar a rotura, las condiciones en las que ésta se produce y la debilitación progresiva del material.

El comportamiento del material en condiciones alejadas de la rotura se conoce desde 1678, cuando Hooke propuso la primera ecuación constitutiva en la que establecía la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones –ut tensio sic vis–. La teoría matemática de la elasticidad, que emplea esta ley, fue desarrollada por Navier (1821), Cauchy (1822), y Poisson (1828).

Modelos clásicos

Las condiciones en las que tiene lugar la rotura fueron estudiadas por Coulomb¹³ en 1773, quien relacionó la resistencia al corte con la cohesión y el ángulo de rozamiento. Este resultado se aplicó posteriormente a problemas prácticos como los empujes de tierras por Poncelet y Rankine.

Casi un siglo después, Tresca¹⁴ propuso el criterio de rotura que lleva su nombre, según el cual la rotura se produce cuando la máxima tensión tangencial alcanza un determinado límite que marca la resistencia del material. La superficie de rotura así definida es el lugar geométrico en un espacio de tensiones donde sucede aquella.

Aunque la superficie de rotura contiene estados últimos, dentro de ella pueden producirse deformaciones irreversibles que no desaparecen con la descarga. Para estudiar cómo se producen estas deformaciones se introdujeron los conceptos de superficies de fluencia, reglas de flujo plástico y leyes de endurecimiento, que son los ingredientes de la teoría clásica de la plasticidad. La superficie de fluencia contiene en su interior todos los estados en los que el material es elástico. Puede evolu-

cionar durante el proceso de carga, aumentando o disminuyendo de tamaño (endurecimiento isótropo), trasladándose (endurecimiento cinemático), o incluso girando (endurecimiento anisótropo). Las principales contribuciones al desarrollo de esta teoría son las de St. Venant, Lévy, Von Mises¹⁵, Huber¹⁶, Prandtl¹⁷, Reuss¹⁸, y Melan¹⁹. Basándose en estos trabajos, Drucker²⁰ estableció, en 1949, los principios de lo que conocemos como Plasticidad Clásica, proponiendo conceptos como la superficie de carga, descarga y carga neutra, consistencia y unicidad.

Los modelos de Tresca y Von Mises, que permitían aproximar bien el comportamiento observado en los metales, no se pudieron aplicar a los geomateriales en general y a los suelos en particular, ya que su comportamiento depende de la presión de confinamiento. Aunque la idea de un criterio de rotura dependiente de la presión ya había sido propuesta por Coulomb, no se formuló una superficie de fluencia de este tipo hasta 1952, cuando Drucker y Prager²¹ propusieron un modelo elástico-perfectamente plástico con una ley de flujo plástico asociada. Este modelo fue mejorado por Drucker, Gibson y Henkel²² quienes introdujeron dos superficies de fluencia, una de ellas cónica, que era cerrada por la segunda. En este modelo, el endurecimiento dependía de la densidad del suelo. Se abría así el camino a los modernos modelos de plasticidad para suelos.

El modelo de Cambridge y el Estado Crítico. Extensión a los suelos granulares

En este camino, uno de los pasos fundamentales fue el desarrollo de la Teoría del Estado Crítico en la Universidad de Cambridge (Reino Unido) en el período 1955 a 1968. Se trata de un ingrediente presente en la mayoría de los modelos constitutivos de suelos empleados hoy en día. Aunque el modelo inicial fue desarrollado únicamente para arcillas blandas normalmente consolidadas, se han propuesto posteriormente numerosas mejoras que han ampliado considerablemente su campo de aplicación.

Las limitaciones más importantes del modelo de Cambridge aparecen en los suelos granulares, para los que el comportamiento depende conjuntamente de su densidad relativa y de la presión de confinamiento. Existen aquí dos patrones de comportamiento denominados denso y suelto. En el segundo caso puede aparecer una pérdida drástica de resistencia cuando la carga se aplica de forma rápida y las presiones intersticiales no se disipan. Este fenómeno es conocido como licuefacción.

Los trabajos de Nova²³ y Wilde²⁴ permitieron reproducir ambos patrones de comportamiento, aunque considerando dos probetas de una misma arena con densidades diferentes como dos materiales distintos. La introducción del concepto de parámetro de estado permitió tratar de forma unificada una arena dada, independientemente de su densidad y de la presión a la que estuviera sometida. El primer modelo constitutivo que incorporó

¹¹ Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T. y Bettess, P., Drained, undrained, consolidating dynamic behaviour assumptions in soils. *Geotechnique* 30, 385-395, 1980.

Zienkiewicz, O.C. y Shiomi, T., Dynamic behaviour of saturated porous media: The generalised Biot formulation and its numerical solution. *Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech.* 8, 71-96, 1984.

¹² Zienkiewicz, O.C., Xie, Y.M., Schrefler, B.A., Ledesma, A. y Bicanic, N. Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. II. Semi-saturated problems *Proc.R. Soc.Lond. A* 429, 311-321, 1990b.

¹³ Coulomb, C.A., Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, *Mem.Math. et Phys.* 7, 343, 1773.

¹⁴ Tresca, H. *Comptes rendus acad.Sci.Paris*, 59, 754, 1864.

¹⁵ Huber, M.T., *Czasopismo techniczne, Lemberg*, 22, 81, 1904.

¹⁶ von Mises, R., *Göttinger Nachrichten, math-phys. Klasse*, 582, 1913.

¹⁷ Prandtl, L., *Proc. 1st Int.Cong. Appl.Mech.*, 43, Delft, 1924.

¹⁸ Reuss, Zeits. Ang. Math. Mech. 10, 266, 1930.

¹⁹ Melan, E. *Ingenieur-Archiv* 9, 116, 1938.

²⁰ Drucker, D. C., Relations of experiments to mathematical theories of plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 16, pp. 349-357, 1949.

²¹ Drucker, D.C. y Prager, W. *Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design*, *Quart.Appl.Math.* 10, 157-165, 1952.

²² Drucker, D.C., Gibson, R.E. y Henkel, D.J., *Soil Mechanics and Workhardening Theories of Plasticity*, *Transactions ASCE* 122, 338-346, 1957.

²³ R.Nova, On the hardening of soils, *Arch.Mech.Stos.* 29, 3, 445-458, 1977.

²⁴ P.Wilde, Two-invariants dependent model of granular media, *Arch.Mech.Stos.* 29, 799-809, 1977.

esta idea fue el de respuesta armónica propuesto por Angel Uriel²⁵ en 1973. Posteriormente, en 1985, Been y Jefferies propusieron una definición de parámetro de estado que es la que ha sido adoptada por la mayoría de los investigadores hoy en día²⁶. Este concepto se puede introducir de forma sencilla en modelos de superficie límite²⁷ y de plasticidad generalizada²⁸.

Una segunda extensión fundamental del modelo de Cambridge fue la realizada por el grupo del profesor Alonso en Barcelona²⁹, que consiguió formular el primer modelo constitutivo para suelos no saturados. Se trató de una formulación bitensorial basada en la succión, diferencia entre las presiones del agua y del aire, y en la tensión neta, diferencia de la total y la del aire. Esta formulación inicial ha sido posteriormente extendida por investigadores como Houlsby³⁰, Jommi³¹ en 2000, Gallipoli³², Wheeler³³, Sheng³⁴, Tamagnini³⁵, y Manzanal, Pastor y Fernández Merodo.

El problema de las cargas cíclicas y la licuefacción

A principios de la década de los ochenta no existían modelos consistentes que permitieran reproducir el comportamiento de los suelos bajo carga cíclica. Se trataba de un problema importante que ya se había manifestado en el proyecto de carreteras y autopistas estadounidenses tras la segunda guerra mundial, y que había contribuido al desarrollo de ensayos cíclicos.

Los primeros ensayos de carga cíclica se realizaron en 1943, tratándose de ensayos de placa de carga en los que se llegaron a aplicar trescientos ciclos³⁶. El primer equipo triaxial de carga cíclica fue puesto a punto por Buchanan y Kuri en 1956³⁷, y a partir de ese momento se llevaron a cabo numerosos ensayos de laboratorio encaminados a caracterizar las secciones estructurales de firmes de carreteras, como los de Seed³⁸. En el trabajo de Seed y McNeill de 1962 se llegó a una conclusión fundamental: el comportamiento cíclico de dos suelos cuyas propiedades bajo carga monótona son similares puede ser completamente diferente, y por lo tanto los ensayos cíclicos son imprescindibles. Por otra parte, las deformaciones inducidas por el tráfico son muy pequeñas, requiriendo de técnicas avanzadas de medida, como las introducidas por Brown en la Universidad de Nottingham³⁹.

Por otra parte, los equipos puestos a punto para ensayos de carreteras se comenzaron a aplicar para explorar el comportamiento y rotura de los suelos bajo carga sísmica. La diferencia con las carreteras es que en este caso, debido a la corta duración de las acciones, no da tiempo a disipar las presiones intersticiales, pudiendo llegarse incluso a licuefacción.

No es de extrañar que los primeros ensayos de carga cíclica realizados en este campo se debieran también al grupo del Profesor Seed. Estos ensayos se realizaron entre 1966 y 1971⁴⁰, de forma que tras producirse el terremoto de San Fernando en 1971, se disponía de un conocimiento bastante completo de los aspectos básicos de la licuefacción⁴¹, lo cual permitió analizar la rotura de la presa baja de San Fernando. En Japón, el Profesor Ishihara⁴² realizó una labor fundamental de caracterización de suelos bajo carga sísmica, proporcionando un conjunto completo de ensayos, especialmente en arenas de poca densidad. Y son estos ensayos en los que se basaron los investigadores que desarrollaron una nueva generación de modelos constitutivos para carga cíclica en la década de los ochenta.

²⁵ A.O.Uriel, Discussion to Spec. Session 2, Problems of non linear soil mechanics, Proc. 8th Int. Conf. Soil. Mech. Found. Eng. Moscow, Vol.4.3, 78-80, 1973.

A.O.Uriel y M.Merino, Harmonic response of sands in shear, Third Int. Conf. on Num. Methods Geomechanics, Aachen, 2-6, 1979.

²⁶ Been, K. y Jefferies, M. G., A state parameter for sands, *Géotechnique* 35, 99-112, 1985.

Jefferies, M.G. Nor.Sand: a simple critical state model for sand, *Géotechnique* 43, 91-103, 1993.

²⁷ Manzari M. y Dafalias, Y., A critical state two-surface plasticity model for sands, *Géotechnique* 47, 255-272, 1997.

²⁸ Saitta, A. Modélisation élastoplastique du comportement mécanique des sols. Application à la liquéfaction des sables et à la sollicitation d'expansion de cavité. PhD Thesis, ENPC-CERMES Paris, 1994.

Bahda-Gerard, F., Pastor, M. y Saitta, A. A double hardening model based on generalized plasticity and state parameters for cyclic loading of sands, *Numerical Models in Geomechanics*, S.Pietruszczak y G.N.Pande (Eds), 2000.

Ling, H.I. y Liu, H., Pressure-Level Dependency and Densification Behavior of Sand Through Generalized Plasticity Model, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 2003, 851-860, 2003.

Tonni, L., Cola, S. y Pastor, M., A Generalized Plasticity approach for describing the behaviour of silty soils forming the Venetian Lagoon basin, *Proc. of the Sixth European Conf. on Numerical Meth. in Geot. Eng.*, Graz, 93-99. Taylor & Francis Group, 2006.

Manzanal, D., Modelo constitutivo basado en la Teoría de la Plasticidad Generalizada con la incorporación de parámetros de estado para arenas saturadas y no saturadas, tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, ETS de Ingenieros de Caminos, Junio 2008.

²⁹ Alonso, E.E., Gens, A. y Josa, A., A constitutive model for partially saturated soils, *Géotechnique*, 40(3), 405-430, 1990.

³⁰ Houlsby, G.T., The work input to an unsaturated granular material, *Géotechnique*, 47(1), 193-196, 1997.

³¹ Jommi, C. Remarks on the constitutive modelling of unsaturated soils, *Experimental evidence and theoretical approaches in unsaturated soils*, Tarrantino & Mancuso (eds.), Trento, Italy, Balkema, Rotterdam, 139-153, 2000.

³² Gallipoli, D., Gens, A.; Sharma, R. y Vaunat, J., An elastoplastic model for unsaturated soil incorporating the effects of suction and degree of saturation on mechanical behaviour, *Géotechnique*, 53(1), 123-135, 2003.

³³ Wheeler, S.J., Sharma, M. K. & Buisson, M.S.R., Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils, *Géotechnique*, 53(1), 41-54, 2003.

³⁴ Sheng, D., Sloan, S.W. y Gens, A. A constitutive model for unsaturated soils: thermomechanical and computational aspects, *Computational Mechanics*, 33(6), 2004.

³⁵ Tamagnini, R., An extended Cam-Clay model for unsaturated soils with hydraulic hysteresis, *Géotechnique*, 54(2), 223-228, 2004.

Tamagnini, R. y Pastor, M. "A thermodynamically based model for unsaturated soils: a new framework for generalized plasticity", 2nd International Workshop on Unsaturated Soils, Mancuso (ed.), Naples, Italy, 1-14, 2004.

³⁶ Kersten, M.S., Repeated Load Tests on Highway Subgrade Soil and Bases, University of Minnesota, Inst. of Tech. Engineering, Paper 43, Julio 1943.

³⁷ Buchanan, S.J. y Khuri, F.I., Elastic and Plastic Properties of Soils and their Influence on the Continuous Support of Rigid Pavements, Report for Office of the Chief of Engineers, Airfield Branch, Eng. Division, Military construction and the Rigid Pavement Laboratory, Ohio River Div.Lab. Mariemont, 1954.

³⁸ Son de destacar las numerosas contribuciones de Seed y sus colaboradores, entre las que se pueden destacar:

Seed, H.B. y McNeill, R.L., Soil Deformation in Normal Compression and Repeated Loading Tests, H.R.B., Bull. 141, 1956.

Seed, H.B. y Fead, J.W.N. Apparatus for Repeated Loading Tests on Soils, ASTM, STP No.254, pp. 78-87, 1959.

Seed, H.B., Chan, C. K. y Lee, C. E., Resilience Characteristics of Subgrade Soils and their Relation to Fatigue Failures in Asphalt Pavements, Int. Conf. on Asphalt Pavements, Michigan, Ann Harbor, 611-636, 1962.

³⁹ Brown, S.F. y Smith, M.S. The Measurements of Recoverable and Irrecoverable Deformations in the Repeated Load Triaxial Test, *Geotechnique*, 1974.

⁴⁰ Los trabajos más representativos publicados por Seed y sus colaboradores son: Seed, H.B. y Chan, C.K., Clay Strength Under Earth-quake Loading Conditions, *Journal of the Soil Mechanics and foundations División, ASCE*, Marzo 1966.

Seed, H.B. y Lee, K.L., Liquefaction of Saturated Sands during Cyclic Loading, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations División, ASCE*, Vol. 92 SM6, pp 105-134, 1966.

Seed, H.B. y Peacock, W.H., Test Procedures for Measuring Soil Liquefaction Potential, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations División, ASCE*, Vol. 97, SM8, pp. 1099-1119, 1971.

⁴¹ Es también de destacar la contribución de G.Castro en su tesis doctoral, presentada en 1969.

Castro, G., Liquefaction of sands, Ph.D. Thesis, Harvard Univ., Harvard Soil Mech.Series no.81, 1969.

⁴² Tatsuoka, F. e Ishihara, K., Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction, *Soils and Foundations* 14, 51-65, 1974.

Ishihara, K., Tatsuoka, F. y Yasuda, S., Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stress, *Soils and Foundations* 15, 29-44, 1975.

Otra área para el cual las cargas cíclicas transmitidas a la cimentación son un aspecto fundamental de su diseño es el de las estructuras marinas, como cajones de diques, plataformas de prospección y extracción de petróleo, o plataformas de soporte de ayudas a la navegación. Estas estructuras se empezaron a utilizar a finales del siglo XIX en California, como complemento de instalaciones de tierra firme, habiéndose empleado en 1922 en las prospecciones realizadas en el lago Maracaibo.

Con el paso de los años, los ingenieros construyeron plataformas en fondos más profundos. Tras la segunda guerra mundial ya existían plataformas en el golfo de Méjico proyectadas para resistir vientos huracanados y olas de seis metros de altura. A principios de la década de los setenta se habían construido plataformas marinas en las costas de Alaska, Brasil, Indonesia y Zaire, aunque fue la crisis del petróleo de 1973, junto con el descubrimiento de petróleo en el Mar del Norte, lo que impulsó definitivamente esta tecnología, consiguiéndose construir plataformas en profundidades superiores a 70 metros⁴³.

En esos años, los laboratorios de geotecnia comenzaron a realizar ensayos de carga cíclica encaminados a caracterizar la respuesta de los fondos marinos en los que se cimentan estas estructuras. El Instituto Geotécnico Noruego (NGI) desarrolló tanto técnicas de ensayo como métodos simplificados de cálculo a fin de estudiar el comportamiento a corto y a largo plazo de las cimentaciones en el fondo marino⁴⁴. Por otra parte, la construcción y el cierre de diques en Holanda, como el de Oosterschelde, hizo necesario el estudio de los efectos de las cargas cíclicas originadas por las mareas en la cimentación⁴⁵. En la actualidad, la necesidad de encontrar fuentes de energía alternativas ha llevado al diseño de generadores eólicos en el mar. Se trata de estructuras cuya cimentación está sometida tanto a cargas verticales y horizontales cíclicas como a momentos, empleándose soluciones constructivas como pilotes de gran diámetro y cajones de succión.⁴⁶

Podríamos concluir, así, que existen tres áreas importantes en ingeniería, la sísmica, la de carreteras y ferrocarriles, y la marítima, en las que es vital contar con modelos matemáticos, constitutivos y numéricos avanzados, siendo precisamente esa necesidad lo que ha impulsado su desarrollo.

Los primeros modelos constitutivos capaces de reproducir el comportamiento de materiales bajo carga cíclica fueron de plasticidad con endurecimiento cinemático, propuestos por Mroz e Iwan en 1967⁴⁷. En ellos se sustituía la superficie de fluencia de los modelos de plasticidad clásicos por una familia de superficies de fluencia anidadas que podían trasladarse o variar de tamaño, asociando a cada una un módulo plástico. Fueron aplicados a suelos por Mroz, Norris y Zienkiewicz⁴⁸ y

Prévost⁴⁹, y aunque los resultados reproducían el crecimiento de la deformación plástica bajo la aplicación sucesiva de ciclos de carga, no eran capaces todavía de describir aspectos como la licuefacción. Estos modelos fueron mejorados por Ghaboussi y Momen⁵⁰, que introdujeron un endurecimiento anisótropo en el que la superficie de fluencia puede rotar, llegando a reproducir la densificación bajo carga cíclica en arenas, o el aumento de la presión intersticial en ensayos no drenados. Son también de destacar las contribuciones de Hirai⁵¹, Cambou y Lanier⁵², y di Prisco, Nova y Lanier⁵³.

El problema fundamental planteado por los modelos de endurecimiento cinemático, anisotrópico o mixto estribaba en el gran coste de cálculo requerido para integrar las ecuaciones diferenciales del modelo. Por ello, se buscaron simplificaciones como las propuestas independientemente por Krieg⁵⁴ y Dafalias y Popov⁵⁵, en las que se emplearon únicamente dos superficies, una exterior, que hacía de frontera y una interior que podía evolucionar dentro de ésta. Esta simplificación era similar a la propuesta por Hashiguchi y Ueno⁵⁶.

Los modelos de superficie límite combinaron una gran sencillez en su formulación con unos excelentes resultados, siendo de fácil implementación en modelos numéricos. Se emplearon para reproducir el comportamiento de suelos cohesivos⁵⁷ y granulares⁵⁸ bajo cargas cíclicas, obteniéndose con ellos licuefacción y movilidad cíclica. Desde 1985 hasta hoy, se han continuado introduciendo mejoras en los modelos iniciales de superficie límite. De hecho, prácticamente cualquier modelo de plasticidad clásica puede ser generalizado de forma inmediata a un modelo de superficie límite sin más que definir en el interior de la superficie límite o externa reglas de interpolación para el módulo plástico y la dirección del flujo plástico.

Una tercera clase de modelos basados en la plasticidad son los denominados modelos de plasticidad generalizada, en los que no se emplean superficies de fluencia ni potenciales plásticos, postulándose directamente las direcciones discriminantes de carga-descarga y de flujo plástico, así como el módulo plástico. La teoría de la plasticidad generalizada fue propuesta por Zienkiewicz y Mroz en 1985⁵⁹ y aplicada a los suelos por Pastor

⁴³ Como ejemplos representativas pueden citarse la Ekofisk operada por Phillips, con 70 metros de profundidad construida en 1973, las Brent B y D de tipo Condeep de Shell, con 140 m de profundidad en 1975 o la más moderna Troll Condeep de Norske Shell, construida en 1995 en 303 m de profundidad.

⁴⁴ Andersen, K.H., Behavior of Clay Subjected to Undrained Cyclic Loading, Proceedings of the Int.Conf. BOSS'76, Norwegian Institute of Technology, 1976.

⁴⁵ Marr, W.A. y Christian, J.T., Permanent displacements due to cyclic wave loading, J.Geotech.Engr.Div., ASCE, 107, GT8, 1129-1149, 1981.

⁴⁶ El BAM de Berlín desarrolla en la actualidad un importante proyecto encaminado a proporcionar criterios de diseño basados en la modelización constitutiva y numérica, estando en marcha la tesis doctoral del ingeniero de Caminos español Pablo Cuéllar.

⁴⁷ Mroz, Z., On the description of anisotropic work-hardening, J.Mech. Phys. Solids, 15, 163-175, 1967.

Iwan, W.D., On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems, Journal of Applied Mechanics 34, 612-617, 1967.

⁴⁸ Mroz, Z., Norris, V.A. y Zienkiewicz, O.C., An anisotropic hardening model for soils and its application to cyclic loading, Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech., 2, 203-221, 1978.

⁴⁹ Prévost, J.H., Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour", Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech., 1, 195-216, 1977.

⁵⁰ Ghaboussi, J. y Momen, H., Modelling and analysis of cyclic behaviour of sands, Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, pp 313 - 342 G.N. Pande and O.C.Zienkiewicz (Eds), Wiley, 1982.

⁵¹ Hirai, H., An elastoplastic constitutive model for cyclic behaviour of sands, Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech. 11, 503-520, 1987.

⁵² Cambou, B. y Lanier, J., Induced anisotropy in cohesionless soil: experiments and modelling, Computers and Geotechnics 6, 291-311, 1988.

⁵³ di Prisco, Nova, R. y Lanier, J., A mixed isotropic kinematic hardening constitutive law for sand, in D.Kolymbas (ed.), Modern approaches to plasticity, pp 83-124, Balkema, 1993.

⁵⁴ Krieg, R.D., A practical two-surface plasticity theory, J.Appl.Mech., Trans.ASME E42, 641-646, 1975.

⁵⁵ Dafalias, Y.F. y Popov, E.P., A model of non-linearly hardening materials for complex loadings", Acta Mechanica 21, 173-192, 1975.

⁵⁶ Hashiguchi, K. y Ueno, M., Elastoplastic Constitutive laws of granular materials, Constitutive Equations of Soils, 9th. Int. Congr. Soil Mech. Found.Engng., S.Murayama and A.N.Schofield (Eds), pp 73-82, JSSMFE, 1977.

⁵⁷ Dafalias, Y.F. y Herrmann, L.R., Bounding Surface Formulation of Soil Plasticity, in Soil Mechanics - Transient and Cyclic Loads, G.N.Pande y O.C.Zienkiewicz (Eds), Ch.10, 253-282, Wiley, 1982.

⁵⁸ Zienkiewicz, O.C., Leung, K.H. y Pastor, M., Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. I Basic model and its application, Int.j.numeral.methods geomech. 9, 453-476, 1985.

Pastor, M., Zienkiewicz, O.C. y Leung, K.H., Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. II Non-associative models for sands, Int.j.numeral.methods geomech. 9, 477-498, 1985.

⁵⁹ Zienkiewicz, O.C. y Mroz, Z., Generalized Plasticity formulation and application to Geomechanics, Mechanics of Engineering Materials, C.S.Desai y R.H.Gallaher (Eds), John Wiley and Sons, 1985.

y Zienkiewicz⁶⁰. De la misma forma que en el caso de la plasticidad con superficie límite, ha sido mejorada, introduciéndose parámetros de estado para suelos granulares⁶¹, decohesión⁶², y extendiéndose a suelos no saturados⁶³.

Finalmente, otra alternativa sencilla que ha sido propuesta por investigadores como Cuéllar⁶⁴, Zienkiewicz⁶⁵ y López Querol y Blázquez⁶⁶ consiste en la introducción en el modelo de las deformaciones acumuladas originadas por los ciclos de carga de forma independiente, como un segundo mecanismo de deformación.

Más allá de la plasticidad: nuevos modelos constitutivos

A pesar de que los modelos constitutivos de tipo plástico proporcionan una excelente aproximación al comportamiento de los geomateriales, se han propuesto en las últimas décadas modelos alternativos que los mejoran. Una de las limitaciones más importantes de los modelos plásticos es la linealidad de la respuesta entre los incrementos de tensión y de deformación en cada una de las dos zonas tensoriales de carga y de descarga, que no depende en cada una de estas zonas de la dirección del incremento del tensor de tensiones.

Las dos alternativas más eficientes que se han desarrollado en las últimas décadas son los modelos no lineales incrementalmente y los modelos hipoplásticos.

Los primeros, debidos a Darve, introducen una ley de interpolación continua entre las respuestas del material a incrementos de tensión dirigidos según los ejes principales del tensor de tensiones. La teoría inicialmente propuesta por Darve y Labanieh⁶⁷ en la Universidad de Grenoble ha sido mejorada posteriormente⁶⁸, habiéndose aplicado para estudiar los problemas de inestabilidad asociados a la rotura difusa de los geomateriales.

La teoría de la hipoplasticidad, que fue presentada por Dafalias y sus colaboradores como una extensión de los modelos de superficie límite⁶⁹, ha sido investigada por Kolymbas⁷⁰, y extendida posteriormente a suelos cohesivos y friccionales. La teoría se basa en los teoremas de representación de tensores, que permiten expresar el incremento del tensor de tensión en función de los tensores de tensión y del incremento del tensor de deformación. se llega así, de una forma elegante, a leyes constitutivas en las que la dependencia de la dirección del incremento del tensor de tensiones aparece de forma natural.

3.3. MODELOS NUMÉRICOS: EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El tercer ingrediente necesario, junto a los modelos matemáticos y a los modelos constitutivos, es el modelo numérico. Hoy en día existen numerosas técnicas que pueden emplearse para discretizar las ecuaciones en derivadas parciales de los modelos matemáticos, como las diferencias finitas, los elementos finitos, los métodos basados en la integral de contorno, los volúmenes finitos o los métodos sin malla. De todas estas técnicas, los elementos finitos ha sido la más empleada en el área de los geomateriales.

Éstos son materiales sólidos y, como tales, se pueden aplicar a ellos las técnicas generales de elementos finitos. Sin embargo, presentan una serie de peculiaridades que ha hecho necesario el desarrollo de técnicas de discretización específicas. Las características fundamentales de los geomateriales descritas al principio de este trabajo son la dependencia de la presión de confinamiento, la dilatación asociada a la deformación tangencial, la existencia de un estado crítico para los suelos, y el acoplamiento entre el esqueleto sólido y los fluidos intersticiales. Por otra parte, presentan un comportamiento no lineal, incluso cuando las deformaciones son muy pequeñas.

La necesidad de llevar a cabo un análisis acoplado se conoció desde los primeros trabajos relativos al flujo de agua en los suelos y a la consolidación. El primer trabajo en el que se analizó la consolidación se debió a Sandhu y Wilson⁷¹, quienes resolvieron en 1969 un problema de consolidación bajo una zapata corrida, empleando triángulos con interpolación cuadrática de desplazamientos y lineal de presiones intersticiales. Esta formulación se extendió a problemas más complejos por otros autores, como Yokoo⁷², Smith⁷³ y Valliappan⁷⁴.

Smith y Hobbs⁷⁵ propusieron un modelo para estudiar la consolidación, un problema para el que ya existían en esa época soluciones analíticas, y compararon los resultados cal-

⁶⁰ Pastor, M y Zienkiewicz, O.C., A generalized plasticity hierarchical model for sand under monotonic and cyclic loading, Proc.2nd.Int.Conf. Numerical Models in Geomechanics, Ghent (Belgium), 31marzo-4 abril, G.N.Pande y W.F.Van Impe (eds), M.Jackson and Son Publ. pp. 131-150, 1986.

Pastor, M., Zienkiewicz, O.C. y Chan, A.H.C., Generalized Plasticity and the modelling of soil behaviour, Int.j.numer.anal.methods geomech. 14, 151-190, 1990.

⁶¹ Bahda-Gerard, F., Pastor, M. y Saitta, A., A double hardening model based on generalized plasticity and state parameters for cyclic loading of sands, Numerical Models in Geomechanics, S.Pietruszczak y G.N.Pande (Eds), 2000.

Ling, H.I. y Liu, H., Pressure-Level Dependency and Densification Behavior of Sand Through Generalized Plasticity Model, Journal of Engineering Mechanics ASCE, 2003, 851-860, 2003.

Ling, H.I. y Yang, S., Unified Sand Model Based on the Critical State and Generalized Plasticity, Journal of Engineering Mechanics, 132 (12), 1380-1391, 2006.

⁶² Fernández Merodo, J.A., Tamagnini, R., Pastor, M. y Mira, P., Modelling damage with generalized plasticity, Rivista Italiana di Geotecnica, 4, 32-42, 2005.

⁶³ Tamagnini, R. y Pastor, M., A thermodynamically based model for unsaturated soils: a new framework for generalized plasticity, 2nd International Workshop on Unsaturated Soils, Mancuso (ed.), Nápoles, Italia, 2004.

Manzanal, D. Modelo constitutivo basado en la Teoría de la Plasticidad Generalizada con la incorporación de parámetros de estado para arenas saturadas y no saturadas, tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, ETS de Ingenieros de Caminos, Junio 2008.

⁶⁴ Cuéllar, V., Bazant, Z.P., Krizek, R.J. y Silver, M.L., Densification and hysteresis of sand under cyclic shear, J.Geotech.Engr.Div., ASCE, 103, 918, 1977.

⁶⁵ Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T. y Hinton, E., Non linear seismic response and liquefaction, Int.J.Num.anal.Methods in Geomech. 2, 381-404, 1978.

⁶⁶ López-Querol S. y Blázquez R., Liquefaction and cyclic mobility model for saturated granular media. Internacional Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 30(5):413-439, 2006.

⁶⁷ Darve, F. y Labanieh, S. Incremental constitutive law for sands and clays: simulation of monotonic and cyclic tests, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomechs. 6, 243-275, 1982.

⁶⁸ Darve, F. Flavigny, E. y Rojas, E. A class of incrementally non-linear constitutive relations and applications to clays, Computers and Geotechnics, 2, 43-66, 1986.

Desrues, J. y Chambon, R., A new rate type constitutive model for geomaterials: CloE, D. Kolymbas (Ed.), in Modern Approaches to Plasticity, 309-324, Elsevier, 1993.

⁶⁹ Dafalias, Y. F., Bounding surface plasticity. I: Mathematical foundation and hypoplasticity, J. Eng. Mech. ASCE, 112, 966-987, 1986.

Wang, Z. L. Dafalias, Y. F. y Shen, C. K., Bounding surface hypoplasticity model for sand, J. Eng. Mech. ASCE, 116, 983-1001, 1990.

⁷⁰ Kolymbas, D. An outline of hypoplasticity, Archive of Applied Mechanics, 61, 143-151, 1991.

Kolymbas, D. y Wu, W. Introduction to Hypoplasticity, Kolymbas, D. (Ed.) in Modern Approaches to Plasticity, 213-224, Elsevier, 1993.

Kolymbas, D. Introduction to hypoplasticity, A.A.Balkema, Rotterdam/Brookfield 2000.

⁷¹ Sandhu, R. S. y Wilson, E. L., Finite element; analysis of seepage in elastic media. Proc. Am. Soc. Civ. Engrs 95, EM3, 41-652, 1969.

⁷² Yokoo, Y., Yamagata, K. y Nagaoka, H., Finite element method applied to Biot's consolidation theory. Soils and Foundations 11, 1,29-46, 1971.

Yokoo, Y., Yamagata, K. y Nagaoka, H., Finite element analysis of consolidation following undrained deformation. Soils and Foundations 11, 37-58, 1971.

⁷³ Smith, I. M. y Hobbs, R., Finite element analysis of centrifuged and built-up slopes. Geotechnique 24, 531-559, 1974.

⁷⁴ Valliappan, S., Lee, I. K. y Boonlualohr, P., Finite element analysis of consolidation problem. Finite element methods in flow problems, UAH Press, 741-755, 1974.

⁷⁵ Smith, I. M. y Hobbs, R., Biot analysis of consolidation beneath embankments, Géotechnique 26, No. 1, 149-171, 1976.

culados con los observados en la máquina centrífuga. Emplearon elementos con diferentes grados de interpolación para los desplazamientos y las presiones intersticiales. Se trataba de formulaciones para problemas cuasi estáticos, en los que las aceleraciones eran muy pequeñas, que son problemas de tipo parabólico que admiten incrementos de tiempo relativamente grandes.

Nuevos avances por polinización cruzada en mecánica de sólidos y del suelo

En el caso de los problemas dinámicos en suelos saturados, las variables de campo suelen ser los desplazamientos o velocidades del esqueleto sólido y las presiones intersticiales en el fluido. Estos modelos fueron desarrollados por el profesor Zienkiewicz y sus colaboradores en la Universidad de Swansea a finales de la década de los setenta y principios de los ochenta. A ellos se debe la formulación conocida como u-pw (desplazamientos-presiones). Se trata de una formulación mixta que plantea los mismos problemas que se encuentran en dinámica de fluidos y sólidos incompresibles, ya que en el caso de los suelos, cuando la permeabilidad es muy pequeña y las partículas sólidas muy rígidas las ecuaciones son similares.

Este problema fue estudiado por Babuska⁷⁶ y Brezzi⁷⁷ quienes propusieron de forma independiente las condiciones que deben satisfacer los elementos a emplear, no siendo admisibles, por ejemplo, elementos que empleen el mismo orden de interpolación para los campos de velocidades y de presiones.

Sin embargo, los elementos de bajo orden como los triángulos lineales en dos dimensiones y los tetraedros en tres son elementos sencillos que permiten una gran rapidez en los cálculos, por lo que son idóneos para problemas con un número muy elevado de grados de libertad. Para poderlos emplear en formulaciones mixtas se propusieron diversas técnicas de estabilización, destacando las contribuciones de Brezzi y Pitkaranta⁷⁸, Hughes, Franca y Balestra⁷⁹ y Hafez y Soliman⁸⁰. La última, extremadamente sencilla, consiste en añadir a la ecuación de continuidad la divergencia de la ecuación de conservación del momento lineal, multiplicada por un parámetro que el usuario debe elegir basándose en su experiencia. Esta técnica ha sido mejorada por Oñate⁸¹ en el método denominado de cálculo finito, en el cual el parámetro se obtiene de forma consistente.

La técnica de estabilización más empleada es la de paso fraccional, que fue propuesta por Chorin⁸² en 1968 con el objetivo de poder emplear métodos clásicos de integración en el tiempo. El método propuesto inicialmente por Chorin admite una serie de alternativas, algunas de las cuales proporcionan

la estabilización necesaria, como las descritas por Donea⁸³, Kawahara y Ohmiya⁸⁴ y Zienkiewicz y Codina⁸⁵.

Estas técnicas se han extrapolado desde la dinámica de fluidos a la dinámica de sólidos y suelos. En el caso de la dinámica de sólidos, el método de Hafez y Soliman fue empleado por Pastor y Quecedo⁸⁶ para estudiar problemas de rotura en materiales plásticos, y el método de paso fraccional propuesto por Chorin fue aplicado por Zienkiewicz⁸⁷ y Quecedo y Pastor⁸⁸. Para suelos saturados pueden mencionarse los trabajos de Pastor⁸⁹, Li⁹⁰ y Mabssout⁹¹, siendo de destacar la contribución de Mira⁹², quien ha conseguido desarrollar un elemento finito de deformaciones supuestas estabilizado.

En dinámica de sólidos, tradicionalmente, se han empleado formulaciones irreducibles en desplazamientos, que son sistemas de ecuaciones hiperbólicas de segundo grado. Una alternativa interesante es la de describir el problema empleando como variables las tensiones y las velocidades. De esta forma, el problema es un sistema de ecuaciones hiperbólicas de primer grado, similares a las ecuaciones de onda en profundidades reducidas.

Estas ecuaciones pueden resolverse empleando los métodos desarrollados para fluidos, como el de Taylor Galerkin. Las ventajas que se consiguen han sido puestas de manifiesto por Mabssout *et al*^{93, 94}. En primer lugar, al ser una formulación basada en velocidades y tensiones, presenta una excelente precisión, especialmente en los problemas de flexión. Se pueden, por lo tanto, emplear triángulos y tetraedros para problemas de flexión, sin los problemas de las formulaciones de desplazamientos en los que para conseguir errores aceptables debe emplearse un número excesivamente alto de elementos. En segundo lugar, se trata de una formulación que evita la influencia de la alineación de los elementos de bajo orden, y que permite calcular superficies de rotura. Finalmente, las propiedades de difusión o amortiguamiento y dispersión numéricas son buenas, lo que permite estudiar la propagación de ondas y discontinuidades.

⁷⁶ Babuska I., The finite element method with Lagrange multipliers. *Numerische Mathematik* 20:179-192, 1973.

⁷⁷ Brezzi F., On the existence, uniqueness and approximations of saddle point problems arising from Lagrange multipliers. *RAIRO* 8-R2:129-151, 1974.

⁷⁸ Brezzi, F. y Pitkaranta, J., On the stabilization of finite element approximations of the Stokes problem, *Efficient solutions of elliptic problems*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, 10, W. Hackbusch (Eds.), 11-19, Vieweg, Wiesbaden, 1984.

⁷⁹ Hughes, T.J.R., Franca, L.P. y Balestra, M., A new finite element formulation for fluid dynamics, V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal order interpolation". *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 59, 85-99, 1986.

⁸⁰ Hafez, M. y Soliman, M., Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables on unstaggered grids, *Proc. AIAA Conf.* 91-1561-CP, 368-379, 1991.

⁸¹ Oñate E., A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182: 355-370, 2000.

⁸² Chorin A.J., Numerical solution of incompressible flow problems. *Studies in Numerical Analysis* 2, 64-71, 1968.

⁸³ Donea, J., Giuliani, S., Laval, H. y Quartapelle, L., Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method', *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 30, 53-73, 1982.

⁸⁴ Kawahara, M. y Ohmiya, K., Finite element analysis of density flow using velocity correction method, *Int. J. Num. Meth. Fluids* 5, 981-993, 1985.

⁸⁵ Codina, R., Vázquez, M. y Zienkiewicz, O.C., An implicit fractional step finite element method for incompressible, compressible flows, *Proc. 10th Int. Conf. Finite Elements Fluids*, 519-24, 1998.

⁸⁶ Pastor, M., Quecedo, M. y Zienkiewicz, O.C., A mixed displacement-pressure formulation for numerical analysis of plastic failure, *Comp. and Structures* 62, 1, 13-23, 1996.

⁸⁷ Zienkiewicz, O.C., Rojek, J., Taylor, R.L. y Pastor, M., Triangles and Tetrahedra in Explicit Dynamic Codes for Solids, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 43, 565-583, 1998.

⁸⁸ Quecedo, M., Pastor, M. y Zienkiewicz, O.C., Application of a fractional step method to localization problems. *Computers and Structures* 74:535-545, 2000.

⁸⁹ Pastor M., Li T, Liu X, Zienkiewicz O.C., Stabilized low-order finite elements for failure and localization problems in undrained soils and foundations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174:219-234, 1999.

⁹⁰ Li, X., Han, X. y Pastor, M., An iterative stabilized fractional step algorithm for finite element analysis in saturated soil dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 192, 3845-3859, 2003.

⁹¹ Mabssout, M., Herreros, I. y Pastor, M., Wave propagation and localization problems in saturated viscoplastic Geomaterials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol 68, Issue 4, 425-447, 2006.

⁹² Mira P., Pastor M., Li T, Liu X. A new stabilized enhanced strain element with equal order of interpolation for soil consolidation problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 192 4257-4277, 2003.

⁹³ Mabssout, M. y Pastor, M., Two step Taylor-Galerkin algorithm for shock wave propagation in soils, *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* 27, 685-704, 2003.

⁹⁴ Mabssout M, Pastor M, Herreros, M.I. y Quecedo, M., A Runge-Kutta, Taylor-Galerkin scheme for hyperbolic systems with source terms. Application to shock wave propagation in viscoplastic geomaterials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30, 1337 - 1355, 2005.

Son también de destacar las formulaciones mixtas estabilizadas propuestas recientemente por Cervera, Chiumenti y Codina^{95, 96}.

Problemas no lineales: tras la convergencia cuadrática

Muchos de los problemas que interesa resolver empleando el método de los elementos finitos son no lineales. Estos problemas aparecen en todas las áreas de la mecánica. En mecánica de fluidos, la no linealidad aparece en las formulaciones eulerianas, con productos de las velocidades y sus derivadas espaciales, así como en el caso de los fluidos complejos como los no newtonianos. En mecánica de sólidos se distingue entre problemas en los que la no linealidad es causada por los grandes desplazamientos de la estructura, como el caso del pandeo, y aquellos en los que se debe al comportamiento no lineal del material. Son problemas cuya solución es importante obtener, ya que, incluso en los casos en los que la estructura proyectada trabaja en condiciones normales en el rango lineal, interesa conocer las condiciones en las que tendrá lugar su rotura. En otros casos, la estructura o elemento estructural proyectado tienen desplazamientos importantes durante su funcionamiento, como ocurre por ejemplo con las alas de avión. De hecho, el primer modelo de elementos finitos no lineal fue el publicado por Turner *et al*⁹⁷ en 1960, que trataba de un problema de no linealidad geométrica en problemas de ingeniería aeronáutica. A este trabajo le siguen los de Argyris^{98,99}, Gallagher¹⁰⁰, Mallet¹⁰¹ y Dupuis¹⁰².

En los problemas en los que el origen de la no linealidad es el comportamiento del material, hay dos aspectos importantes a tratar. Por una parte, en cada incremento de las acciones exteriores se resuelve un problema no lineal, para lo cual se pueden emplear los métodos de Newton-Raphson, completo o modificado. En segundo lugar, se debe integrar la ecuación constitutiva del material.

En los primeros trabajos que se realizaron en el campo de la no linealidad material se emplearon técnicas incrementales sencillas, considerando las acciones exteriores divididas en una serie de incrementos de carga o desplazamiento que permiten llegar a la solución. En estas iteraciones, dependiendo del tipo de ley de comportamiento del material, se usaban relaciones entre los incrementos de tensión y de deformación basadas en la matriz constitutiva del material. En el caso de los materiales elastoplásticos, la matriz constitutiva material

permitía obtener una matriz de rigidez tangente¹⁰³ que se empleaba en el incremento considerado.

Esta forma de resolver el problema, progresando en incrementos para los cuales se usa una matriz tangente obtenida al inicio de cada incremento es equivalente al método de Euler para resolver una ecuación diferencial ordinaria, y de la misma manera que en éste, los errores se acumulan.

Para evitar esto, se empleó el método de Newton-Raphson a nivel global, imponiendo la convergencia al final de cada incremento de carga o desplazamiento. Para economizar tiempo de cálculo, se sugirió emplear la matriz tangente inicial de cada incremento en todas las iteraciones, a costa de perder velocidad de convergencia.

A nivel local, el problema central era la integración de la ecuación constitutiva. El método explícito de Euler hacia adelante no proporcionaba la precisión necesaria, y se recurrió a dos técnicas para mejorarla. Por una parte, Nayak y Zienkiewicz¹⁰⁴ propusieron un método donde en cada incremento de las acciones externas se integraba la ecuación constitutiva en una serie de sub incrementos. Este método fue revisado por Sloan¹⁰⁵ en 1987.

Para evitar que el estado tensional se situara fuera de la superficie de fluencia se propusieron algoritmos mediante los que se aseguraba el retorno a la misma^{106,107}. Estos primeros algoritmos mantenían el carácter explícito.

Todas estas mejoras no fueron suficientes para conseguir la convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson, lo cual era debido a que la matriz constitutiva tangente que se empleaba para integrar la ecuación constitutiva no era consistente con el algoritmo global. Los métodos implícitos de integración, tales como el de Euler hacia atrás o los trapezoidales, mejoraron considerablemente la situación, y permitieron emplear en las iteraciones globales de Newton Raphson una matriz tangente consistente^{108,109}, con la que se consiguió la convergencia de segundo orden. Estos avances se generalizaron a los geomateriales, siendo de destacar las contribuciones de Borja¹¹⁰, Jeremic¹¹¹, Macari¹¹² y Tamagnini¹¹³.

La modelización de problemas de rotura en geomateriales se basa, pues, en los tres grupos de modelos, matemáticos, constitutivos y numéricos que hemos descrito. Sin embargo, el problema de la rotura plantea dificultades adicionales.

- ⁹⁵ Cervera M., Chiumenti M., Codina R. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics. Part I: Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010; 199: 2559 - 2570.
- ⁹⁶ Cervera M., Chiumenti M., Codina R. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics. Part II: Strain localization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010; 199: 2571 - 2589.
- ⁹⁷ Turner, M.J., Dill, E.H., Martin, H.C. y Melosh, R.J., Large deflection of structures subject to heating and external load, *J.Aero.Sci.*, 27, 97-106, 1960.
- ⁹⁸ Argyris, J.H., Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, 1964.
- ⁹⁹ Argyris, J.H., Continua and discontinua, *Proc.Conf.Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.
- ¹⁰⁰ Gallagher, R.J., Gellatly, R.A., Padlog, J. y Mallet, R.H., A discrete element procedure for thin shell instability analysis, *Am. Inst. Aero.& Astro.J.*, 5(1), 138-145, 1967.
- ¹⁰¹ Mallet, R.H. y Marcal, P.V., Finite element analysis of non-linear structures, *Proc. ASCE, J. of Struct.Div.*, 94, ST9, 208 1-2 105, 968.
- ¹⁰² Dupius, G.A., Hibbit, H.D., McNamara, S.F. y Marcal, P.V., Non-linear material and geometric behaviour of shell structures, *Comp.& Struct.*, 1, 223-239, 1971.

- ¹⁰³ Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S. y King, I.P., Elasto-plastic solutions of engineering problems. Initial stress, finite element approach, *Int.J.Num. Meth.Engng.*, 1, 75-100, 1969.
- ¹⁰⁴ Nayak, G.C. y Zienkiewicz, O.C., Elasto-plastic stress analysis. A generalisation for various constitutive relationships including strain softening, *Int.J.Num.Meth. in Engng.*, 5, 1, 13- 135, 1972.
- ¹⁰⁵ Sloan, S. W., Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations, *Int.J.Num.Meth.Engng.*, 24, 893-912, 1987.
- ¹⁰⁶ Wilkins, M.L., Calculation of elastic-plastic flow, *Methods of Computational Physics* (B.Alder et al. eds), Vol.3, Academic Press, London, 1964.
- ¹⁰⁷ Krieg, R.D y Krieg, D.N., Accuracy of numerical solution methods for the elastic, perfectly plastic model, *Trans.ASME, J.Pressure Vessel Tech.* 99, 510-515, 1977.
- ¹⁰⁸ Ortiz, M. y Popov, E.P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:1561-1576, 1985.
- ¹⁰⁹ Simo, J.C. y Taylor, R.L., Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48:101-118, 1985.
- ¹¹⁰ Borja, R.I. y Lee, S.R. Cam-Clay plasticity. I. Implicit integration of elastoplastic constitutive relations, *Comp.Meth.Appl.Mech.Engng.*, 78, 49-72, 1990.
- ¹¹¹ Jeremic, B. y Sture, S. Implicit integration in elastoplastic geotechnics, *Mech.Cohesive-Frict. Materials*, 2, 165-183, 1997.
- ¹¹² Macari, E.J., Weihe, S. y Arduino, P., Implicit integration of elastoplastic constitutive models for frictional materials with highly non linear hardening functions, *Mech.Cohesive-Frict. Materials*, 2, 1-29, 1997.
- ¹¹³ Tamagnini, C., Castellanza, R. y Nova, R., A generalized backward Euler algorithm for the numerical integration of an isotropic hardening elastoplastic model for mechanical and chemical degradation of bonded geomaterials, *Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech.*, 26: 963-1004, 2002.

4. EL PROBLEMA DE LA ROTURA

Según la Real Academia de la Lengua, la rotura es la acción y efecto de romper o romperse algo, separándose con más o menos violencia las partes de un todo deshaciendo su unión, o bien la raja o quiebra de un cuerpo sólido. Para los ingenieros la rotura es, más bien, un estado en el que cualquier pequeña perturbación en las acciones a las que está sometida una estructura o un material causa una variación grande en su deformación. Asociamos la rotura a la inestabilidad material o estructural, y distinguimos entre rotura frágil, en la que la resistencia de la estructura disminuye bruscamente tras producirse la rotura, y rotura dúctil, en la cual la resistencia no varía.

La rotura de una geoestructura se suele deber a una o a varias causas siendo las más frecuentes la disminución de la resistencia del material por degradación o meteorización, el aumento de las tensiones totales debido a cargas externas, terremotos, cambios en la geometría debidos a acción humana o de la naturaleza, o finalmente cambios en las presiones intersticiales, como los debidos a la lluvia.

El ingeniero, al diseñar una obra, debe predecir tanto su comportamiento en condiciones de servicio como las condiciones en las que tendrá lugar su rotura o agotamiento. En el primer caso, se trata de asegurar el buen funcionamiento de la obra en relación a los fines para los cuales fue proyectada, verificando, por ejemplo, que las deformaciones que se producen están dentro de los límites admisibles. Respecto del análisis de la rotura, se estudian los diferentes escenarios en los que ésta puede producirse, las cargas que la causan, y los mecanismos según los cuales se produce. Se puede cuantificar de esta manera, la proximidad o lejanía del estado de servicio a las condiciones de rotura, lo cual usualmente se plasma en un coeficiente de seguridad. El estudio del mecanismo de rotura es también importante, ya que permite en algunos casos reforzar las zonas más débiles donde aquella se produce.

Una vez conocidas tanto la seguridad frente a la rotura como las condiciones en las que ésta ocurre, no se continúa el análisis para estudiar las consecuencias de la misma. Sin embargo, en algunos casos, como en el de los deslizamientos rápidos de laderas, es de vital importancia, ya que es necesario conocer la peligrosidad de algunos emplazamientos, el camino que seguirá la masa de suelo movilizada en su propagación, su velocidad, los espesores que alcanzarán sus depósitos, y los efectos en edificaciones y estructuras. Dos casos particularmente complejos son los de los grandes deslizamientos que caen en lagos o embalses, y que pueden generar olas que afecten a las poblaciones ribereñas, o incluso propagarse sobre las presas, alcanzando a pueblos y ciudades aguas abajo¹¹⁴, y el de los deslizamientos que cierran un valle por donde discurre un río. Se forma así un embalse, cerrado por una presa de muy poca consistencia, que puede llegar a romper generando una riada de lodo¹¹⁵.

El estudio de las condiciones en que se produce la rotura ha atraído la atención de los ingenieros desde el trabajo de Coulomb en 1773. Antes del desarrollo de los modelos numé-

ricos que conocemos hoy en día, se siguieron tres métodos para el estudio de la rotura, el método de las líneas de deslizamiento o *slip lines*, los teoremas de colapso plástico, y los métodos de equilibrio límite. En la actualidad, se siguen empleando estos últimos ya que en muchos casos permiten una primera aproximación al problema.

Hill presentó en 1950¹¹⁶ una descripción excelente de las líneas de deslizamiento, que son las líneas características del problema hiperbólico en que consiste la deformación del sólido en rotura. En este trabajo recopiló las investigaciones de Kötter¹¹⁷ (1903), Prandtl¹¹⁸ (1920), Hencky¹¹⁹ (1923), y Geiringer¹²⁰ (1930). Es interesante su comentario relativo a las posibles discontinuidades que pueden aparecer en los campos de velocidad y de tensión y en sus respectivos gradientes al cruzar las líneas de deslizamiento.

Utilizando el método de las líneas de deslizamiento, fue posible obtener tanto cargas límite como mecanismos de rotura para problemas sencillos, como los de los casos de extrusión inversa descrito por Hill en 1950, o la indentación de un macizo semi infinito por un punzón liso debida a Prandtl en 1920, que corresponde también al problema de una zapata rígida sobre un suelo cohesivo.

Los teoremas de colapso plástico permitieron la obtención de límites superiores e inferiores que acotaban la carga de rotura real en algunos casos de geometría sencilla, de forma que se podía concluir que el mecanismo de rotura hallado era el correcto cuando ambos límites coincidían. El teorema de límite inferior fue propuesto por Feinberg¹²¹ y Hill¹²² en 1948. Estos trabajos fueron complementados con el de Hill de 1951¹²³, en el que se introdujo el teorema del límite superior. En todos estos casos, el tipo de material considerado era rígido plástico. La extensión a materiales elastoplásticos se debe a Drucker¹²⁴.

Más adelante, los ingenieros propusieron métodos simplificados para analizar las condiciones de rotura en taludes y laderas que se basaban en considerar un conjunto de posibles superficies de rotura en las que se estudiaba su equilibrio. Aquella para la cual la carga de rotura fuera mínima era la elegida. Los más empleados fueron los métodos de Fellenius¹²⁵, Bishop¹²⁶, Janbu¹²⁷ y Morgenstern y Price¹²⁸. Estos métodos han sido relacionados, recientemente, con los teoremas de colapso plástico por Davis y Selvadurai¹²⁹.

Tanto los teoremas de colapso plástico como los métodos de equilibrio límite se basan en dos hipótesis fundamentales,

¹¹⁶ Hill, R., The mathematical theory of plasticity, Oxford at the Clarendon Press, 1950.

¹¹⁷ Kötter, F. Berlin Akad. Berichte, 229, 1903.

¹¹⁸ Prandtl, L., Über die Härte plastischer Körper, Göttinger Nachr., Math. Phys. Kl., 74, 1920.

¹¹⁹ Hencky, H., Zeits.ang.Math.Mech. 3, 241, 1923.

¹²⁰ Geiringer, Proc. 3^{er} Int. Cong.App.Mech. Stockholm, 2, 185, 1930.

¹²¹ Feinberg, S.M., El principio de la carga límite, Prikl.Mat.Mekh., 12, 63 (en ruso), 1948.

¹²² Hill, R., A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity, Q.J. Mech.Appl. Math. 1, 18-28, 1948.

¹²³ Hill, R. (1951), On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point, Phil. Mag. 42, 868-875.

¹²⁴ Drucker, D.C., Prager, W. y Greenberg, H.J., Extended limit design theorems for continuous media", Quart. Appl. Math. 9, 381-378, 1952.

¹²⁵ Fellenius, W., Erdstatische Berechnungen mit Reibung und Kohasion, Ernst, Berlin, 1927.

¹²⁶ Bishop, A.W., The use of slip circle in the stability analysis of slopes. Geotechnique, 5(1), pp. 7-17, 1955.

¹²⁷ Janbu, N. Slope stability computations. Soil Mech. and Found. Engrg., A.A. Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 3, 409-416, 1968.

¹²⁸ Morgenstern, N.R. y Price, V.E., The analysis of the stability of general slip surfaces. Geotechnique, London, 15(1), 79-93, 1965.

¹²⁹ Davis, E.H. and Selvadurai, A.P.S., Plasticity and Geomechanics, Cambridge University Press, 2002.

¹¹⁴ Este es el caso de la presa de Vajont. El 9 de Octubre de 1963, se produjo un gran deslizamiento en la ladera del monte Toc, que causó una ola que se propagó sobre la presa, destruyendo Longarone. L. Müller describe el fenómeno en Müller, L. "The rock slide in the Vajont Valley", Felds Mechanik, 2, 148-212, 1965.

¹¹⁵ El lago Sarez, situado en los montes Pamir de Tayikistán, fue creado por un deslizamiento debido a un terremoto que tuvo lugar en 1911. El deslizamiento sepultó el pueblo de Usoy bajo 650 m de suelo y rocas, cerrando el valle del río Murghob. El nuevo lago tiene una longitud de sesenta y un kilómetros, embalsando diecisiete kilómetros cúbicos de agua. Su rotura generaría una ola de avenida en los ríos Bartang, Panj y Amu Daria que podría alcanzar el mar de Aral.

consistiendo la primera en suponer que las tensiones en rotura están situadas en la superficie de rotura, siendo la más frecuentemente empleada la de Mohr Coulomb. La segunda hipótesis es la de "rotura localizada", suponiendo que en el proceso de rotura se produce una discontinuidad en el campo de desplazamientos en una zona de muy pequeño espesor que se puede asimilar a una curva en dos dimensiones y a una superficie en tres. Estas condiciones no se satisfacen siempre, existiendo casos en los que se produce la rotura en estados tensionales situados en el interior de la superficie de Mohr Coulomb, no observándose concentración de deformaciones o discontinuidad en el campo de desplazamientos. Este tipo de rotura es conocido como "rotura difusa".

La rotura localizada

El primer tipo de rotura, la rotura localizada, aparece en suelos como las arcillas sobreconsolidadas y las arenas muy densas, materiales en los que aparece un reblandecimiento material importante. Se caracteriza por una concentración muy importante de la deformación plástica en zonas de pequeño espesor. Desde el punto de vista matemático, en materiales elastoplásticos aparece una discontinuidad en el campo de las deformaciones, que es de tipo débil, al aparecer no en la variable de campo velocidad o desplazamiento sino en sus derivadas espaciales. En el caso de los suelos, la discontinuidad aparece en la deformación cortante, denominándose a las zonas donde se produce "bandas de cortante". Al continuar el proceso de carga del material, esta discontinuidad débil puede evolucionar, apareciendo una discontinuidad fuerte en el campo de desplazamientos o velocidades. Al llegar a esta situación, la rotura se puede interpretar como el desplazamiento relativo de dos masas de material en las que las deformaciones son pequeñas.

La rotura localizada plantea problemas importantes, tanto desde el punto de vista experimental, como desde los de modelización matemática y numérica.

Cuando en un ensayo mecánico de laboratorio aparece una banda de cortante en una probeta, el principal problema que se plantea es la validez de los resultados obtenidos, ya que aquella deja de ser homogénea. La deformación unitaria medida refleja un promedio entre las deformaciones producidas dentro de la banda y en el exterior de ella, y las propiedades mecánicas observadas dependen del tamaño de la probeta ensayada. Cuanto mayor sea la relación entre la longitud de la probeta y el espesor de la banda, mayor será la fragilidad de aquella. Este efecto fue estudiado por Van Mier¹³⁰ en el hormigón.

Para el estudio experimental de las bandas de cortante, es fundamental disponer de técnicas de medida avanzadas, ya que pueden no ser observables a simple vista en una primera etapa. Es de destacar el trabajo realizado en la universidad de Grenoble por Desrues¹³¹, quien puso a punto en 1984 un método fotogramétrico basado en la comparación de fotografías tomadas a la probeta en instantes sucesivos¹³². Posteriormente¹³³, ha sido posible emplear micro tomografía de rayos X

con una resolución de 14 μm para estudiar la localización en probetas de suelos granulares muy finos, obteniendo detalles de la dilatación en la banda de cortante.

Desde un punto de vista matemático, cuando se considera un material elastoplástico, el problema matemático se transforma en un problema mal planteado ya que su naturaleza cambia de elíptica a hiperbólica en condiciones cuasi estáticas, y de hiperbólico a elíptico en condiciones dinámicas. El problema pierde su unicidad, admitiendo infinitas soluciones. Como consecuencia de esto, los modelos numéricos proporcionan soluciones que dependen del tamaño de la malla empleada. Es posible obtener, bajo determinadas condiciones, el momento en que puede nacer una banda de cortante así como su orientación, pero no su espesor, que queda indeterminado. Son de destacar los trabajos de Hadamard¹³⁴, Thomas¹³⁵, Hill¹³⁶ y Mandel¹³⁷ en el campo de la localización dinámica, y de Rudnicki y Rice¹³⁸, Hill y Hutchinson¹³⁹ y Rice y Rudnicki¹⁴⁰ en el campo estático. En ambos casos, la condición de localización es la anulación del determinante del tensor acústico.

Esta limitación de la teoría clásica de la plasticidad se debe a la falta de una longitud interna característica del material, y no aparece en viscoplasticidad. Para subsanar esta deficiencia, se pueden emplear modelos de medios continuos más completos, como los medios micropolares o de Cosserat, o los modelos no locales tipo gradiente o integral, descritos en la obra de los profesores Vardoulakis y Sulem¹⁴¹.

Finalmente, los modelos numéricos presentan también limitaciones y dificultades en el análisis de la rotura localizada de una estructura. El primer problema es consecuencia de la falta de unicidad del problema matemático, y se manifiesta por la dependencia de los resultados del tamaño de la malla empleada. La anchura de la banda obtenida en los cálculos es aproximadamente tres veces la separación entre nodos. Al disminuir el tamaño de la malla, disminuye también la anchura de la banda calculada. Si el tamaño de la malla es inferior al del espesor de la banda, se obtienen soluciones con bandas más finas, y en el límite, cuando el tamaño de la malla tiende a cero, también tiende a cero el espesor de la banda.

Por otra parte, el valor de la carga de rotura obtenida depende del tipo de elemento finito empleado, siendo mayor aquella que la real. En consecuencia, se sobreestima la carga que puede resistir una estructura, que puede romper. Este efecto se conoce desde la publicación de los trabajos de Nagtegaal¹⁴² en 1974 y Sloan y Randolph¹⁴³ en 1982, quienes lo relacionaron con la condición de cambio de volumen nulo asociada a la ley de flujo plástico.

¹³⁴ Hadamard, J., *Leçons sur la propagation des ondes et les equations d'hydrodynamique*, Hermann, Paris, 1903.

¹³⁵ Thomas, T.Y., *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, New York, 1961.

¹³⁶ Hill, R., *Acceleration waves in solids*, J. Mech. Phys. Solids 10, 1-6, 1962.

¹³⁷ Mandel, J., *Conditions de stabilité et postulat de Drucker*, Rheology and Soil Mechanics, pp 58-68 en J.Kravtchenko y P.M.Sirriey (Eds), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

¹³⁸ Rudnicki, J.W., y Rice, J.R., *Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials*, J.Mech.Phys. Solids 23, 371-394, 1975.

¹³⁹ Hill, R. y Hutchinson, J.W., *Bifurcation phenomena in the plane tension test*, J.Mech.Phys. Solids 23, 239-264, 1975.

¹⁴⁰ Rice, J.R. and Rudnicki, J.W., *A note of some features of the theory of localization of deformation*, Int.J.Sol.Struct. 16, pp 597-605, 1980.

¹⁴¹ Sulem, J. y Vardoulakis, I., *Bifurcation Analysis in Geomechanics*, Taylor & Francis(Routledge) 1995.

¹⁴² Nagtegaal, J.C., Parks, D.M., y Rice, J., *On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range*, Comput. Meth.Appl. Mech. Engrg. 4, pp 153-177, 1974.

¹⁴³ Sloan, S.W. and Randolph, M.F., *Numerical prediction of collapse loads using finite element methods*, Int.J. Numer. Anal. Methods Geomech. 6, 47-76, 1982.

¹³⁰ Van Mier, J.G.M *Complete stress-strain behaviour and damaging status of concrete under multiaxial conditions*, RILEM-CEB-CNRS Int.Conf.Concrete under multiaxial conditions, Vol.1, 75-85, Presses de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, Francia, 1984.

¹³¹ Desrues, J., *Naissance des bandes de cisaillement dans les milieux granulaires: expérience et théorie*, en Manuel de rhéologie des geomateriaux, F.Darve (Ed.), Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1984.

¹³² La técnica original fue propuesta por Butterfield en 1970: Butterfield, R., Harkness, R.M. y Andrawes, K.Z., *A stereophotogrammetric method for measuring displacement fields*, Géotechnique 20, 308-314, 1970.

¹³³ Viggiani, G., Lenoir, N., Bésuelle, P., Di Michiel, M., Marelli, S., Desrues, J. y Kretschmer, M., *X-ray microtomography for studying localized deformation in fine-grained geomaterials under triaxial compression*, Comptes Rendus Mécanique, 332, 10, 819-826, 2004.

Los elementos finitos de bajo orden, tales como triángulos y tetraedros con interpolaciones lineales del campo de desplazamientos, son los que dan lugar a errores mayores. La solución del problema consiste en emplear elementos de mayor precisión. Esto se consigue, por ejemplo con los métodos de proyección propuestos por Hughes¹⁴⁴ y Simo¹⁴⁵, de integración selectiva de Malkus y Hughes¹⁴⁶, de deformaciones supuestas de Simo y Rifai¹⁴⁷, Aldelfinger y Ramm¹⁴⁸, Papastavrou¹⁴⁹ y de Borst y Groen¹⁵⁰, las formulaciones mixtas velocidades-presiones de Pastor¹⁵¹ y Zienkiewicz¹⁵², o las formulaciones mixtas velocidades presiones de Mabsout¹⁵³. Estas últimas pueden implementarse en elementos lineales como triángulos y tetraedros, interpolando linealmente tanto las velocidades como las tensiones. Se trata de una formulación sencilla, que proporciona una excelente precisión tanto en problemas de flexión como en rotura localizada.

La rotura difusa

El segundo tipo de rotura, la rotura difusa ha sido observada en numerosos ensayos de laboratorio, como los realizados a volumen constante por Han y Vardoulakis¹⁵⁴ o Desrues¹⁵⁵ en arenas de muy baja densidad, y en los que la rotura tuvo lugar por licuefacción en toda la probeta sin que apareciera localización en banda de cortante. Como ejemplos de rotura difusa pueden citarse los casos de la licuefacción de estratos de arenas saturadas bajo la acción de un terremoto, la rotura de la Presa inferior de San Fernando o deslizamientos rápidos como el de Las Colinas en El Salvador.

En la realidad, la rotura difusa aparece en materiales de muy baja densidad, en los que se producen importantes deformaciones volumétricas de compactación del esqueleto sólido. Es el caso de las arenas de muy baja densidad, y de los suelos metaestables o colapsables. En ellos, la tendencia a compac-

tar causa un aumento importante de la presión intersticial en el aire y en el agua que ocupan sus poros, que hace disminuir las presiones efectivas en el esqueleto sólido, llegándose a la licuefacción. En estos problemas existen dos escalas de tiempo, asociadas a la consolidación o disipación de las presiones intersticiales, y a la aplicación de las cargas. En aquellos casos en los que el tiempo de aplicación de las cargas es inferior al de disipación puede producirse la licuefacción.

El problema fundamental que se plantea para analizar esta forma de rotura es que los métodos simplificados de equilibrio límite se basan en que la rotura tiene lugar según una superficie donde se localiza la deformación, y en que los estados de tensión están situados en una superficie de rotura. En estos casos ninguna de ambas hipótesis es cierta, y las predicciones realizadas basadas en estos métodos son inseguras. Como ejemplo se puede mencionar el de deslizamientos de laderas submarinas con pendientes muy pequeñas, netamente inferiores al ángulo de rozamiento de los materiales que las constituyen.

Una de las primeras investigaciones en las que se concluye que la rotura por licuefacción tiene lugar para ángulos de rozamiento movilizados inferiores a los del material es la realizada por Poul Lade y sus colaboradores¹⁵⁶.

La rotura difusa corresponde, pues, a una inestabilidad material que se puede presentar antes de alcanzar el estado de rotura. Para su estudio, existen dos técnicas de análisis, basadas en el trabajo de segundo orden y en la controlabilidad del recorrido tensional del material.

La primera técnica parte de la definición de estabilidad propuesta por Hill¹⁵⁷ en 1958, que se basa en la definición del trabajo de segundo orden como producto contraído de los incrementos de los tensores de tensión y de deformación. La rotura localizada aparece cuando este producto se hace cero por primera vez en una trayectoria de tensiones. El método propuesto por Darve y sus colaboradores¹⁵⁸ consiste en explorar, para cada punto de tensión, la respuesta del material a una serie de incrementos de tensión. El resultado fundamental es la aparición de conos de inestabilidad en cuyo interior están contenidas las posibles direcciones de los incrementos de tensión que causan inestabilidad. Estos conos aparecen a partir del momento en el que el ángulo de rozamiento movilizado supera un cierto valor crítico.

Una segunda línea alternativa propuesta por Nova¹⁵⁹ se basa en el estudio de la controlabilidad de un ensayo o una trayectoria de tensiones. Según este autor, la inestabilidad aparece cuando se anula la parte simétrica de la matriz constitutiva que relaciona los incrementos de tensión con los de deformación, expresados en su forma vectorial equivalente.

Es interesante destacar que la condición de inestabilidad de Hill implica la anulación del tensor acústico, aunque en este caso no aparezca localización de forma tan clara como en otros materiales.

Para el estudio de la rotura difusa y sus consecuencias se emplean los modelos matemáticos, constitutivos y numéricos antes descritos. El ingrediente clave en este caso es la ecuación constitutiva, que debe de ser capaz de reproducir la fluidificación del material.

¹⁴⁴ Hughes, T.J.R., Generalization of selective integration procedures to anisotropic and non-linear media, *Internat. J. Numerical Meth. Engrg.* 15, 1413-1418, 1980.

¹⁴⁵ Simo, J.C., Taylor, R.L. y Pister, K., Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elastoplasticity, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 51, 177-208, 1985.

¹⁴⁶ Malkus, D. y Hughes, T.J.R. Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concepts, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 15, 63-81, 1978.

¹⁴⁷ Simo, J.C. y Rifai, M.S., A Class of Mixed Assumed Strain Methods and The Method of Incompatible Modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 1595-1638, 1990.

¹⁴⁸ Andelfinger, U. y Ramm, E., EAS-elements for two-dimensional, three dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1311-1337, 1993.

¹⁴⁹ Papastavrou, A., Steinmann, P. y Stein, E., Enhanced finite element formulation for geometrically linear fluid-saturated porous media, *Mechanics of Cohesive Frictional Materials*, 2, 185-203, 1997.

¹⁵⁰ de Borst, R. y Groen, A.E., Towards efficient and robust elements for 3D-soil plasticity, *Computers and Structures*, 70, 23-34, 1999.

¹⁵¹ Pastor, M., Quecedo, M. y Zienkiewicz, O.C., A mixed displacement-pressure formulation for numerical analysis of plastic failure, *Comput. Struct.* 62, 13-23, 1997.

¹⁵² Zienkiewicz, O.C., Rojek, J., Taylor, R.L. y Pastor, M., Triangles and Tetrahedra in Explicit Dynamic Codes for Solids, *Int.J.Numer.Meth.Engrg.* 43, 565-583, 1998.

¹⁵³ Mabsout, M. y Pastor, M., A Taylor-Galerkin algorithm for shock wave propagation and strain localization failure of viscoplastic continua, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, 955-971, 2003.

Mabsout M. y Pastor M. A two step Taylor-Galerkin algorithm for shock wave propagation in soils. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech* 27, 685-704, 2003.

¹⁵⁴ Han, C. y Vardoulakis, I., Plane-strain compression experiments on water saturated fine-grained sand, *Geotechnique* 41 (1), 49-78, 1991.

¹⁵⁵ Desrues, J. y Georgopoulos, I.A., An investigation of diffuse failure modes in undrained triaxial tests on loose sand, *Soils and Foundations*, 46, 5, 585-594, 2006.

Desrues, J. y Viggiani, G., Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry, *Int.J.Numer.Anal.Meth.Geomechanics* 28 (4), 279-321, 2004.

¹⁵⁶ Lade, P.V., Nelson, R.B. e Ito, Y.M., Instability of granular materials with non associated flow, *J.Engrg. Mech. ASCE* 114 (12), 2173-2191, 1988.

¹⁵⁷ Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6:236-249, 1958.

¹⁵⁸ Darve F, Laouafa F., Instabilities in granular materials and application to landslides. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 5:627-652, 2000.

Laouafa F. y Darve F., Modelling of slope failure by a material instability mechanism. *Computer and Geotechnics* 29:301-325, 2002.

Khoa HDV, Georgopoulos IO, Darve F, Laouafa F., Diffuse failure in geomaterials: Experiments and modelling. *Computer and Geotechnics* 33:1-14, 2006.

¹⁵⁹ Nova R., Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programs. *Journal of the Mechanical behavior of Materials*; 5(2):193-20, 1994.

5. MÁS ALLÁ DE LA ROTURA: GEOMATERIALES FLUIDIFICADOS

Introducción

La rotura difusa es un primer paso hacia la fluidificación. Puede producirse tanto bajo acciones estáticas como bajo acciones cíclicas o dinámicas –oleaje o terremotos–. Un caso clásico es la licuefacción, que puede producirse en suelos saturados de muy baja densidad cuando el proceso de carga es mucho más rápido que la disipación de las presiones intersticiales generadas. En algunas ocasiones se trata de una rotura contenida, en la que los desplazamientos del material fluidificado no son excesivamente grandes. Es el caso de las estructuras cimentadas en arenas sueltas en las que se produce la licuefacción, como en Niigata (Japón) en 1964, donde los edificios se hundieron en su cimentación debido a un terremoto, o el hundimiento de cajones de cimentación de diques exteriores por la acción del oleaje.

Cuando ocurre en una ladera, el material fluye pendiente abajo y los desplazamientos alcanzan valores mucho mayores. La población de Las Colinas en Santa Tecla, El Salvador, sufrió una avalancha de material seco fluidificado que se propagó seiscientos metros en menos de quince segundos, sepultando varias manzanas de casas y causando 600 muertos. Los deslizamientos submarinos pueden producirse también por licuefacción del fondo causada por el oleaje, y se propagan también grandes distancias.

Los grandes deslizamientos de laderas pueden causar un número elevado de víctimas. Los más dañinos han sido el de Kansu (China), con 200.000 muertos, seguido del lahar de Huascarán en Perú (1970) con 67.000, los flujos de derrubios de Venezuela con 30.000 y el de Vajont en Italia, con 3.000. En este último, las víctimas fueron causadas por la gran ola generada en el embalse donde cayó el deslizamiento del Monte Toc, que saltó sobre la presa y alcanzó a la población de Longarone.

Existen muchos tipos de deslizamientos rápidos de laderas en los que el material se comporta como un fluido. Las avalanchas de rocas, involucran grandes masas de material. En su caída, los grandes bloques de roca se disgregan, generando bloques de menor tamaño. En Canadá, la avalancha que ha causado un mayor número de víctimas es la del Monte Turtley en 1903. Se desgajaron 36 millones de metros cúbicos de material en un frente de unos 700 metros, alcanzando, tras un descenso de 800 metros a la ciudad de Frank, donde causaron 70 víctimas mortales. El depósito que se formó tenía una longitud de unos dos kilómetros, una anchura de 1.7 y un espesor medio de 18 metros, equivalente a una casa de cinco pisos. En general, las avalanchas de roca se pueden considerar como drenadas, dado el alto índice de huecos del material cuando se desplaza. Otras avalanchas importantes son las de Valtellina (Italia, 1987), con cuarenta millones de metros cúbicos de roca y la de Randa (Suiza, 1991).

Los flujos de lodo (mudflows) son mezclas de suelos finos y agua, que, dependiendo de la pendiente, pueden recorrer varios kilómetros. Las roturas de balsas mineras causan también este tipo de flujos. Las distancias recorridas en estos casos suelen ser menores, del orden de cientos de metros.

Los flujos de derrubios son mezclas de suelo y agua, relacionados habitualmente con lluvias torrenciales y deslizamientos superficiales distribuidos en grandes extensiones de terreno. Pueden transportar grandes bloques de rocas que causan graves daños cuando impactan con edificaciones. Un caso especial son los lahares, que ocurren en materiales de origen volcánico. Los flujos de derrubios son habituales en zonas montañosas, como los Alpes. Como ejemplos pueden citarse los flujos de derrubios de Venezuela en 1999 así como los lahares del volcán Popocatepl, del Monte Santa Helena y

del Monte Pinatubo en 1991. En los lahares el agua puede provenir de la fusión de la nieve en la cumbre del volcán.

Los flujos deslizantes son deslizamientos rápidos en los que existe un importante acoplamiento entre el suelo y el fluido intersticial. Suelen originarse como consecuencia de la rotura por licuefacción de una parte de la ladera. Las distancias de propagación suelen ser del orden de seiscientos metros. El deslizamiento de Aberfan del 21 de Octubre de 1966, sepultó parte del pequeño pueblo minero del mismo nombre situado en el sur de Gales. La causa fue la rotura de depósitos de residuos mineros saturados de muy escasa consistencia. Otros ejemplos de flujos deslizantes son los deslizamientos masivos que ocurrieron en 1998 en la región del Pizzo d'Alvano en Campania (Italia), y el de Santa Tecla (El Salvador), debido al terremoto de enero de 2001.

Modelos matemáticos para geomateriales fluidificados

El comportamiento de los geomateriales fluidificados, en los que tanto las partículas sólidas como los fluidos intersticiales pueden tener una gran movilidad es complejo, y requiere modelos más generales que los que se emplean para estudiar el comportamiento de geomateriales sólidos, como los proporcionados por la teoría de mezclas. Son necesarias aquí ecuaciones de conservación de la masa y del momento lineal así como relaciones constitutivas o reológicas para cada una de las componentes de la mezcla. Las variables que se emplean en la formulación del problema son las fracciones de volumen ocupadas por cada componente, cuya suma es la unidad, las densidades de los materiales, las velocidades en cada fase y las tensiones parciales en las mismas. Por otra parte, pueden aparecer fenómenos como la conminución, consistente en la disgregación de partículas en otras más pequeñas, y la segregación inversa que causa un agrupamiento de las partículas de mayor tamaño en zonas concretas del fluido. Este efecto aparece en un tipo especial de deslizamientos rápidos de laderas denominados flujos de derrubios, que transportan en su frente y en su parte superior los bloques de mayor diámetro.

En el caso de que el movimiento de los fluidos intersticiales con respecto a las partículas sólidas sea pequeño, las ecuaciones de la teoría de mezclas se simplifican, llegándose a las ecuaciones de Biot Zienkiewicz que describen el comportamiento acoplado de los suelos y otros geomateriales, formuladas en su variante más sencilla en función de las velocidades del sólido, de las velocidades de Darcy de los fluidos, de las presiones intersticiales de éstos y de las tensiones efectivas en el sólido.

Los deslizamientos rápidos de laderas suelen presentar una longitud uno o incluso dos órdenes de magnitud mayores que su profundidad, y esto permite simplificar un paso más las ecuaciones. Teniendo en cuenta que la disipación de presiones intersticiales en vertical es mayor que en las otras dos dimensiones, se pueden considerar dos componentes de las velocidades. La primera corresponde a la consolidación vertical y la segunda a la propagación a volumen constante. Este tipo de modelos se conocen como de propagación-consolidación.

Finalmente, la diferencia de escalas verticales y horizontales permite emplear modelos integrados en profundidad, en los que las variables empleadas son el espesor del flujo y las velocidades integradas en profundidad. Estos modelos se han empleado desde que Hutter los introdujera para avalanchas^{160,161}. Respecto del acoplamiento entre las partículas sólidas y los fluidos intersticiales, el estudio ha sido posterior al realizado en el caso

¹⁶⁰ Hutter, K y Koch, T., Motion of a granular avalanche in an exponentially curved chute: experiments and theoretical predictions. Phil. Trans. R. Soc. London, A 334, 93–138, 1991.

¹⁶¹ Savage S.B. and Hutter, K., The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part I: Analysis. Acta Mechanica 86. 201–223, 1991.

de geomateriales sólidos, siendo de destacar los trabajos de Hutchinson¹⁶², Iverson y Denlinger¹⁶³ y Pastor *et al.*¹⁶⁴.

Modelos reológicos

Una diferencia importante en la descripción de las relaciones que existen entre los tensores de tensión y de deformación entre los sólidos y los fluidos es que para estos últimos se suele expresar la tensión en función del tensor velocidad de deformación, no existiendo memoria de la historia pasada para muchos de los fluidos manejados en ingeniería. Estas relaciones suelen denominarse modelos reológicos.

Existen modelos para fluidos con un umbral de tensión cortante bajo el cual no se produce movimiento. Uno de los primeros modelos de fluido cohesivo, que aún se usa para caracterizar materiales como el hormigón fresco, es el modelo de Bingham¹⁶⁵ que ha sido mejorado por Hohenemser y Prager¹⁶⁶ y Oldroyd¹⁶⁷. En el caso de los geomateriales fluidificados, los primeros experimentos que permitieron asentar las bases de su comportamiento fueron los de Bagnold¹⁶⁸, quien diseñó un reómetro en el cual se podía mantener el volumen constante mediante la aplicación de una presión de confinamiento. Bagnold empleó partículas de cera para evitar que, al introducirse en las juntas del equipo, se produjeran fuerzas de rozamiento importantes. Los ensayos y el modelo reológico propuesto por Bagnold han inspirado modelos más avanzados, como el fluido viscoplastico de Chen¹⁶⁹, en el que se introduce una componente friccional en la tensión umbral de fluencia. Son también de destacar los experimentos a escala diseñados para obtener el comportamiento reológico de los geomateriales del grupo francés MIDI¹⁷⁰.

La reología de los geomateriales es una rama aún joven en comparación con las ecuaciones constitutivas, debido fundamentalmente a limitaciones de los reómetros. En estos aparatos se intenta reproducir un campo homogéneo de velocidad de deformación, obteniendo, a partir de medidas de las fuerzas aplicadas que hacen posible el movimiento en el interior del reómetro las tensiones en el fluido. Se trata, en general, de obtener campos de deformación tangencial simple o aproximaciones de los mismos, en los que la única componente no nula del tensor velocidad de deformación es, por ejemplo, la derivada de la velocidad según x con respecto al eje y . Los resultados obtenidos permiten conocer la presión de confinamiento externa para mantener constante el volumen y la tensión tangencial, de forma que se pueden establecer relaciones entre la tensión tangencial y la componente correspondiente de la velocidad tangencial.

El problema estriba en la extensión a condiciones generales de tensión de los resultados obtenidos en las condiciones más sencillas que se observan en los reómetros. Para ello, se supone que se trata de un fluido isótropo para el que se pueden aplicar los teoremas de representación de funciones tensoriales isótropas de una variable tensorial. La tensión se expresa mediante la suma de los tensores identidad, velocidad de deformación y el cuadrado de éste, multiplicados por sendas funciones escalares de los invariantes del tensor de deformación. A partir de aquí, se particulariza el modelo general para las condiciones del reómetro y se identifican las componentes. En conclusión, la obtención de modelos reológicos se realiza en dos etapas. En la primera, se caracteriza el flujo reométrico mediante los datos obtenidos en el reómetro, y en una segunda etapa se generalizan los resultados obtenidos a condiciones generales.

En la práctica totalidad de los modelos reológicos existentes hoy en día se supone que el flujo se produce a volumen constante, y de hecho, en los modelos mediante los que se estudian las avalanchas se parte de esta hipótesis. Por otra parte, los experimentos de Bagnold pusieron de manifiesto la existencia de una presión que dependía de la velocidad de deformación. La aparición de estas tensiones normales en flujos puramente tangenciales –tensiones dispersivas– se podía reproducir siempre y cuando en la ley reológica general apareciera el término correspondiente al cuadrado del tensor velocidad de deformación.

Sin embargo, existe una explicación alternativa a la aparición de estas tensiones dispersivas, para lo cual hay que considerar de forma conjunta los resultados de los experimentos de Bagnold, que se hicieron a volumen constante midiendo la presión externa de confinamiento necesaria para mantener esta condición, y los resultados de ensayos reométricos a presión vertical constante¹⁷¹. En los primeros, la presión aumenta al aumentar la velocidad de deformación tangencial, manteniéndose constante el volumen, mientras que en los segundos, la densidad disminuye al aumentar la velocidad de deformación manteniéndose constante la presión. En este segundo caso no aparecen tensiones dispersivas.

Los resultados experimentales tienden a indicar que en el plano índice de huecos-presión de confinamiento existe una línea de equilibrio para cada velocidad de deformación, siendo el límite inferior correspondiente a una velocidad de deformación muy pequeña la línea de estado crítico clásica empleada en mecánica del suelo. Los ingredientes a añadir a los modelos reológicos clásicos son, pues, en primer lugar, una línea de equilibrio que depende de la velocidad de deformación, y en segundo lugar una dilatación que dependerá de la distancia de las condiciones en un momento dado a esta línea de equilibrio¹⁷².

Modelos numéricos

Dada la gran movilidad que existe en estos materiales, las técnicas numéricas que se emplean para discretizar las ecuaciones del modelo matemático son las usadas en fluidos con superficie libre. Y de la misma manera que en éstos, se ha tendido a emplear formulaciones eulerianas basadas en mallas de diferencias, volúmenes o elementos finitos. Los problemas a resolver son los clásicos de los fluidos: la incompresibilidad, la necesidad de emplear técnicas de estabilización, y la determinación lo más exacta posible de la situación de la superficie libre entre el aire y el geomaterial.

¹⁶² Hutchinson, J.N., A sliding-consolidation model for flow slides, *Can. Geotech. J.*, 23, 115-126, 1986.

¹⁶³ Iverson, R.I., Denlinger, R.P. Flow of variably fluidized granular masses across three dimensional terrain. 1. Coulomb mixture theory, *J. Geophys. Res.* 106, 2001.

¹⁶⁴ Pastor, M., Quecedo, M., Fernández Merodo, J.A., Herreros, I., González, E. y Mira, P., Modelling Tailing Dams and mine waste dumps failures. *Geotechnique*, Vol. LII, N.8, 579-592, 2002.

Pastor, M., Haddad, B., Como, S., Sorbino, G. y Drempetic, V., A depth-integrated, coupled SPH model for flow-like landslides and related phenomena. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 33:143-172, 2009.

¹⁶⁵ Bingham, E.C., *Fluidity and Plasticity*, McGraw-Hill, New York, 1922.

¹⁶⁶ Hohenemser, K. y Prager, W., Über die Ansätze der Mechanik der isotroper Kontinua, *Z. Angew. Math. Mech.* 1,2 216-226, 1932.

¹⁶⁷ Oldroyd, J.G., A rational formulation of the equations of plastic flow for a Bingham solid, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 43, 100-105, 1947.

¹⁶⁸ Bagnold, R.A., Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear, *Proc. Royal Society A*, 225, 9-63, 1954.

¹⁶⁹ Chen, C.L. y Ling, C.H., Granular-Flow Rheology: Role of Shear-Rate Number in Transition Regime, *J. Engng. Mech. ASCE*, 122, 5, 469-481, 1996.

¹⁷⁰ G.R.MIDI, On dense granular flows, *The European Physical Journal E*, Vol. 14 No. 4, pp. 341-366, 2004.

¹⁷¹ Hanes, D.M. e Inman, D.L., Observations of rapidly flowing granular-fluid materials, *J. Fluid Mech.* 150, 357-380, 1985.

¹⁷² Pastor, M., Blanc, T. y Pastor, M.J., A depth integrated viscoplastic model for dilatant saturated cohesive-frictional fluidized mixtures: application to fast catastrophic landslides, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 158, 142-153, 2009.

Para resolver este problema se emplean dos grandes grupos de técnicas. En primer lugar, las basadas en marcadores, como el método MAC (Marker and Cell) de Harlow y Welch¹⁷³ mejorados por Hirt y Nichols¹⁷⁴. La posición de la interfase queda determinada por las posiciones ocupadas por una serie de partículas o marcadores que acompañan al fluido en su movimiento. Posteriormente, se ha propuesto una técnica alternativa conocida como del nivel de referencia o "level set" que se basa en una función indicadora que toma valores positivos en un fluido y negativos en el segundo, de forma que el lugar geométrico para el cual se anula es la interfase buscada. Esta función se trata como una magnitud escalar que es transportada por el fluido. La formulación original de Osher y Sethian¹⁷⁵ se ha aplicado al movimiento de fluidos con densidades similares por Mulder¹⁷⁶. Para casos en los que existe una diferencia importante entre las densidades de los fluidos conviene transformar la función indicadora en una función de gradiente unidad, al menos en las proximidades de la interfase¹⁷⁷.

Como ejemplos de problemas de interés en ingeniería que se pueden resolver con este método pueden citarse la rotura de una presa, analizada por Quecedo *et al.*¹⁷⁸, y la generación de olas en embalses y bahías por grandes deslizamientos de laderas¹⁷⁹.

Y de la misma forma que se emplean en Dinámica de Fluidos las ecuaciones de onda en profundidades reducidas para proporcionar aproximaciones suficientemente precisas, se pueden usar las ecuaciones integradas en profundidad para los flujos de geomateriales. Se trata de sistemas de ecuaciones hiperbólicas de primer orden, para las que se pueden emplear las técnicas de diferencias, elementos y volúmenes finitos clásicas, como las empleadas por Laigle y Coussot¹⁸⁰, Pastor *et al.*¹⁸¹ y Quecedo *et al.*¹⁸².

En los últimos años se ha empezado a extender el uso de métodos sin malla, en los que la información relativa al material se da en nodos que se desplazan con el fluido. Como ejemplos de estos métodos se pueden mencionar el denominado de elementos difusos propuesto por Nayroles¹⁸³, el método de Galerkin sin elementos (Galerkin free) de Belytschko¹⁸⁴, los métodos conocidos como de nubes hp de Duarte y Oden¹⁸⁵, los

métodos de partición de la unidad de Babuska¹⁸⁶, los de puntos finitos de Oñate e Iddlesohn¹⁸⁷, y los SPH propuestos por Lucy y Gingold¹⁸⁸ y Monaghan¹⁸⁹.

Estas técnicas se han aplicado al caso de los deslizamientos rápidos de laderas por Bonet¹⁹⁰, McDougall y Hungr¹⁹¹ y Pastor *et al.*^{192,193}. La ventaja fundamental sobre los modelos numéricos de tipo euleriano es la mayor rapidez que se consigue al emplear dos mallas: una estructurada, que describe la topografía del terreno, y otra de cálculo, que consiste en los nodos del geomaterial que fluye.

Queda todavía mucho trabajo por hacer en este área de la modelización de geomateriales fluidificados, relacionada tanto con la Hidráulica como con la Mecánica del Suelo. Debido a esta particular posición en una fractura entre dos áreas del conocimiento su desarrollo ha sido más lento. La formación de grupos multidisciplinares facilitaría un desarrollo más rápido.

6. CONCLUSIÓN

Finalizo aquí este trabajo en el que he intentado presentar una visión general de la modelización del comportamiento de los geomateriales y geoestructuras.

Los geomateriales forman parte de este mundo fascinante en el que vivimos. Los usamos como materiales con los que construimos nuestras presas o diques. Sin embargo, nuestras obras son muy pequeñas en comparación con las grandes geoestructuras naturales como las montañas y sus laderas. En el primer caso, debemos asegurarnos de que las condiciones de funcionamiento de nuestra estructura estén lejos de la rotura, y en el segundo, debemos analizar los riesgos que entraña su fallo. Las técnicas de modelización que hemos visto permiten que nos acerquemos a estos objetivos.

Se trata de una visión subjetiva, que puede ser considerada como un cuaderno de viaje en el que he recogido los lugares que he visitado y los paisajes que han dejado huella en mí, empezando por mi primer contacto con ellos a través del libro de texto de los profesores Jiménez Salas y de Justo Alpañés¹⁹⁴. Es un viaje compartido con compañeros que han ido apareciendo a lo largo de estas páginas, algunos de los cuales ya no están entre nosotros. Los trabajos que hemos realizado en los lugares que hemos visitado nos han cambiado a todos nosotros. Hemos dejado algo nuestro en los problemas que hemos trabajado, y éstos, a cambio, nos han mejorado, haciendo que nos sea más fácil afrontar nuevos problemas.

¹⁷³ Harlow, J.H. and Welch, J.E., Phys. Fluids, 8:2182, 1965.

¹⁷⁴ Hirt, C.W. and Nichols, B.D., Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries". J. Comp. Phys., 39:201-225, 1981.

¹⁷⁵ Osher, S. y Sethian, J.A., Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation, J. Comp. Phys., 79, 12-49, 1988.

¹⁷⁶ Mulder, W., Osher, S. y Sethian, J.A., Computing interface motion in compressible gas dynamics, J. Comp. Phys., 100, 209-228, 1992.

¹⁷⁷ Sussman, M., Smereka, P. y Osher, S., A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow". J. Comp. Phys., 114, 146-159, 1994.

¹⁷⁸ Quecedo, M., Pastor, M., Herreros, M.I., Fernández Merodo, J.A. y Zhang, Q., Comparison of two mathematical models for solving the dam break problem using the FEM method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194 3984-4005, 2005.

¹⁷⁹ Quecedo, M., Pastor, M. y Herreros, M.I., Numerical modelling of impulse wave generated by fast landslides, Int.J.Numer.Meth.Engng 59:1633-1656, 2004.

¹⁸⁰ Laigle, D. y Coussot, P., Numerical modelling of mudflows. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 123 (7), pp. 617-623, 1997.

¹⁸¹ Pastor, M., Quecedo, M., Fernández Merodo, J.A., Herreros, M.I., González y E., Mira, P., Modelling Tailing Dams and mine waste dumps failures. Geotechnique, Vol.LII, N.8, pp. 579-592, 2002.

¹⁸² Quecedo, M., Pastor, M., Herreros, M.I. y Fernández Merodo, J.A., Numerical modelling of the propagation of fast landslides using the Finite Element Method. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 59, Issue 6, pp.755-794, 2004.

¹⁸³ Nayroles, B., Touzot, G. y Villon, P., "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements", Comp. Mech. 10, pp. 307-318, 1992.

¹⁸⁴ Belytschko, T., Lu, Y.Y. y Gu, L., Element-free Galerkin methods, International Journal Numerical Methods in Engineering, 37, pp. 229-256, 1994.

¹⁸⁵ Duarte C.A. y Oden, J.T., An h-p adaptive method using clouds, Comp.Meth. Appl.Mech.Eng. 139, 237-262, 1996.

¹⁸⁶ Babuska I., Melenk J., The partition of unity element method, Tech.Rep. BN-1185, Inst. Phys. Science and Techn. Univ. Maryland, Maryland USA, 1995.

¹⁸⁷ Oñate E., Idelsohn, S., A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. Comp. Mech. 21, pp. 283-292, 1998.

¹⁸⁸ Gingold R.A., Monaghan J.J., Smoothed particles hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 181, pp. 375-389, 1977.

¹⁸⁹ Lucy, L.B., A numerical approach to the testing of fusion process. Astronomical Journal, Vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.

¹⁹⁰ Bonet, J. y Kulasegaram, S., Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations, Int. J. Numer. Meth. Engng., 47, pp. 1189-1214, 2000.

¹⁹¹ McDougall, S. y Hungr, O., A Model for the Analysis of Rapid Landslide Motion across Three-Dimensional Terrain. Canadian Geotechnical Journal, 41 n 12, pp. 1084-1097, 2004.

¹⁹² Pastor M., Haddad B., Sorbino G., Cuomo S., y Drempetic, V., A depth integrated coupled SPH model for flow-like landslides and related phenomena, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics 33, 2, 143-172, 2009.

¹⁹³ Pastor, M., Blanc, T. y Pastor, M.J., A depth integrated viscoplastic model for dilatant saturated cohesive-frictional fluidized mixtures: application to fast catastrophic landslides, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 158, 142-153, 2009.

¹⁹⁴ Se trata de la obra de Jiménez Salas, J.A., y de Justo Alpañés, J.L., Geotecnia y Cimientos I. Propiedades de los suelos y de las rocas. Editorial Rueda, 1971, con la que varias generaciones de ingenieros -en mi casa han sido de momento tres- se han acercado a la Mecánica del Suelo por primera vez.

The logo for tedagua, featuring a stylized blue water drop icon above the company name "tedagua" in a bold, lowercase, sans-serif font.

Soluciones integrales para
tratamiento de aguas

Comprehensive Water
Treatment Solutions

Técnicas de Desalinización de Aguas, S.A.

Oficinas Centrales:

C/ Cardenal Marcelo Spínola, 10 - 28016 Madrid

Tel.: +34 91 456 95 00 - central@tedagua.com

www.tedagua.com