

MODULACION DE LAS ONDAS DE ORILLA

ANTONIO LECHUGA ALVARO (*)

RESUMEN. Se han estudiado las características más importantes de las ondas de orilla en una playa con pendiente acusada empleando la formulación de aguas poco profundas. Hay dos posibles maneras de realizar esto, según si se consideran conjuntamente o por separado la información sobre frecuencia y la amplitud de las ondas de orilla. En el segundo caso obtenemos una ecuación tipo Zakharov. Sabemos que esa ecuación es la aplicación a una onda uni-dimensional cuasimonocromática de la ecuación no lineal de Schrödinger. En el primer caso se obtiene una ecuación que resulta más compacta y cuyo análisis es el tema principal de este comunicado.

Actualmente, se sabe con certeza que las ondas de orilla pueden excitarse mediante interacciones resonantes con trenes de ondas incidentes y reflejadas en una playa. La ecuación de la evolución de estas interacciones en la aproximación de profundidades reducidas hace posible que describamos inestabilidades modulacionales de las ondas de orilla subarmónicas. Se lleva a cabo el análisis de estabilidad de esa ecuación mediante el uso de la ecuación de Hill correspondiente.

Aparece en la figura 1 la variación de número de onda relativo de la modulación espacial de las ondas de orilla con el parámetro de no linealidad de las ondas incidentes. Sólo es posible el crecimiento si los puntos representativos se sitúan entre las líneas continuas. Los resultados actuales muestran una contribución importante de los términos cuadráticos en ϵ_1 a las características modulacionales.

Observaciones in situ indican que algunas ondas estacionarias en las playas son de una longitud de onda mucho más elevada que la de las ondas de orilla de modo cero. El mecanismo de inestabilidad modulacional podría explicar este fenómeno.

ABSTRACT. The main characteristics of large-scale modulation of edge waves on a sloping beach have been studied using the shallow water formulation. There are two possible ways for that depending on whether we consider jointly or separately frequency information and amplitude of edge waves. In the latter case we obtain a Zakharov type's equation that we know is the application to a quasimonochromatic one-dimensional wave of the nonlinear Schrödinger equation. In the former one, a resulting more compact equation is obtained whose analysis is the main subject matter of this paper.

At present it is only too well-known that edge waves can be excited by resonant interactions with incident wavetrains reflected on a beach. The evolution equation of these interactions in the shallow water approximation enable us to describe modulational instabilities of subharmonic edge waves. The stability analysis of this equation is carried out by using the corresponding Hill equation.

Figure 1 shows the variation of relative wave number of edge-wave spatial modulation with incident wave nonlinearity parameter. Growth only is possible if representative points are placed between the solid lines. Present results show an important contribution of quadratic terms in ϵ_1 to the modulational characteristics.

Field observations indicate that some standing waves on beaches are of much longer wavelength than the edge wave of zero mode. Probably the modulational instability mechanism can explain it.

1. INTRODUCCION

Ya en 1846 Stokes C. G. describió una solución de las ecuaciones de las ondas de superficie en una playa con fuerte pendiente, en la que en contraposición a la de las ondas normalmente incidentes, representaba un tren cuyas crestas eran perpendiculares a la línea de costa y cuya amplitud era má-

xima en la línea de orilla, decreciendo exponencialmente en la dirección de las aguas profundas. A pesar de resolver el mismo conjunto de ecuaciones aún había una diferencia más con respecto a las ondas normalmente incidentes y es que se trataba de un problema de autovalores, con lo cual, el espectro de posibles soluciones dejaba de ser continuo para convertirse en discreto. De esta manera sólo eran posibles determinados «modos» $m = 0, 1, 2, \dots$ cada uno con una solución del potencial y su relación de dispersión. De hecho Stokes sólo en-

(*) Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Jefe del Sector de Costas del Centro de Estudios de Puertos y Costas (CEDEX).

encontró la solución correspondiente a un modo, el modo $n = 0$. Hay que esperar hasta los años 50 de nuestro siglo para encontrar la solución lineal general de todos los modos de la onda de orilla para playas de pendiente uniforme. De este modo, Eckart en 1951 encontró la solución general en la aproximación de aguas poco profundas y Ursell en 1952 la solución general en la formulación completa, ambos para el caso de playa de pendiente uniforme y teoría lineal.

Aunque la significación física de las ondas de orilla se conoce desde mediados de los años 50, es a partir de 1969, sobre todo con A. J. Bowen y D. L. Inman, cuando se establece la vinculación causal entre éstas, y distintas perturbaciones rítmicas en las playas como son las «beach cusps», las «rip currents», «rescuer bars», etc.

A mediados de los años 70 se producen los trabajos más significativos sobre la excitación de las ondas de orilla por el oleaje normalmente incidente a una playa, concretamente R. T. Guza y R. E. Davis en 1974 y R. T. Guza y A. J. Bowen en 1976 establecen desde un punto de vista riguroso la interacción no lineal de un tren de ondas monocromático de frecuencia, ω , normalmente incidente y reflejado en una playa con una onda de orilla estacionaria de frecuencia, $1/2 \omega$, usando la aproximación de aguas poco profundas en el caso de playa de pendiente uniforme. Con posterioridad se producen importantes avances en el estudio de este problema, así A. A. Minzoni y G. B. Whitham (1977) estudian la excitación de las ondas de orilla por el oleaje incidente sin usar la aproximación de aguas poco profundas, dando por tanto generalidad al tratamiento en playas de pendiente uniforme. En el límite para pequeñas pendientes de la playa esta formulación coincide con la aproximación de aguas poco profundas.

Partiendo de la teoría de la excitación subarmónica se producen sucesivos avances en la formulación de los mecanismos de generación y crecimiento de las formas rítmicas en playas o «beach cusps». En este sentido se orientan los trabajos de D. A. Huntley y A. J. Bowen (1976), R. T. Guza y A. J. Bowen (1981), D. L. Inman y R. T. Guza (1982) y A. Lechuga (1986). En este último se estudia la excitación subarmónica en playas de pendiente no uniforme.

En otro orden de cosas en 1976, G. B. Whitham señaló que las ondas de orilla de amplitud finita son siempre inestables a las modulaciones de gran escala. Posteriormente en 1983 T. R. Akylas estudió la evolución tanto espacial como temporal de las modulaciones de las ondas de orilla excitadas por el oleaje incidente en el caso de las ecuaciones

completas mediante el tratamiento numérico de la correspondiente ecuación de evolución del tipo de Zakharov* [V. E. Zakharov y A. B. Shabat (1972)].

En el presente trabajo vamos a abordar el estudio de la modulación de las ondas de orilla mediante un método constructivo de las zonas de inestabilidad en base a la aplicación de la ecuación de Hill a las ecuaciones de evolución en aguas poco profundas. A nuestro juicio el presente método sigue más de cerca el fenómeno físico contemplado, siendo más fácil la consideración de las distintas variables implicadas en el problema.

La modulación de las ondas de orilla puede estar implicada como algunos autores han señalado en oscilaciones de gran longitud de onda y gran período que son directamente observables en algunas playas y que no podían explicarse por el oleaje incidente de períodos mucho más cortos.

2. FORMULACION DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones hidrodinámicas en la zona costera en la aproximación de aguas poco profundas y con la hipótesis habitual de fluido homogéneo, incompresible e irrotacional pueden escribirse en función del potencial de velocidades, Φ , y de el desplazamiento de la superficie libre η , como sigue:

$$\delta\eta/\delta t + \delta/\delta x [(h + \eta) \delta\Phi/\delta x] + \delta/\delta y [(h + \eta) \delta\Phi/\delta y] = 0 \quad (1)$$

$$\delta\Phi/\delta t + 1/2(\delta\Phi/\delta x)^2 + (\delta\Phi/\delta y)^2 + g \cdot \eta = 0 \quad (2)$$

siendo, h la profundidad, x la coordenada en dirección perpendicular a la playa e y la coordenada en dirección longitudinal de la playa.

Eliminado η , entre (1) y (2) se obtiene la conocida ecuación no lineal en la aproximación de aguas poco profundas,

$$\Phi_{tt} + g(h \Phi_x) + g(h \Phi_y) = 2(\Phi_x \cdot \Phi_{xt} + \Phi_y \cdot \Phi_{yt}) + \Phi_x \cdot (\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) + 1/2(\Phi_x + \Phi_y)(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) + \Phi_x \cdot \Phi_{xx} + \Phi_y \cdot \Phi_{yy} + 2\Phi_x \cdot \Phi_y \cdot \Phi_{xy} \quad (3)$$

Como vemos la ecuación tiene términos lineales cuadráticos y cúbicos en Φ .

La excitación subarmónica de las ondas de orilla estacionarias por el oleaje incidente, se puede expresar mediante la sustitución de:

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i \quad (4)$$

(*) Zakharov en transcripción castellana.

CONSTRUIMOS SOLUCIONES



Construimos grandes realidades que son el fruto de la técnica y la experiencia acumulada a lo largo de los años.

Levantamos horizontes, abrimos nuevos caminos y construimos soluciones.

Canalizamos asimismo nuestra actividad en depurados proyectos de medio ambiente.

Así somos y así seguiremos:
construyendo futuro.

ESTUDIOS DE IMPACTO AMBIENTAL

EVALUACION DE ALTERNATIVAS

VALORACION DE IMPACTOS

MEDIDAS CORRECTORAS

PLANES DE RESTAURACION



GESTION Y ASISTENCIA TECNICA DE ESTUDIOS AMBIENTALES

PLAZA DEL CONDE DEL VALLE SUCHIL, 15
TELEFONO: 433 67 99
28015 MADRID

en la ecuación (3). Siendo Φ_i el potencial de velocidad de la onda de orilla y Φ_r el potencial de velocidad de la onda incidente. Teniendo en cuenta que términos del segundo miembro de (3) contribuirían al primer armónico en la frecuencia, podríamos escribir simbólicamente la ecuación de interacción como:

$$(\Phi_e) = (\Phi_i, \Phi_e) + (\Phi_e, \Phi_e, \Phi_e) \quad (5)$$

Para que la ecuación anterior tenga solución sabemos que se ha de cumplir la condición de ortogonalidad o alternativa de Fredholm que con el mismo simbolismo anterior podemos escribir como:

$$\int_0^\infty (\Phi_e) \cdot e^{-kx} dx = \int_0^\infty (\Phi_i, \Phi_e) \cdot e^{-kx} dx + \int_0^\infty (\Phi_e, \Phi_e, \Phi_e) \cdot e^{-kx} dx \quad (6)$$

Llegados a este punto caben dos alternativas, según expresemos que la onda tiene la información temporal separada en «rápida» y «lenta» o si esa información temporal se expresa conjuntamente. En el primer caso las ecuaciones que se plantean según (6), para el caso de excitación de las ondas progresivas subarmónicas de amplitud A y B , lentamente variables tanto en el tiempo, como longitudinalmente en el espacio, se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} \delta A / \delta t + \omega / 2k \delta A / \delta y - \omega / 4k^2 \delta^2 A / \delta y^2 i - \\ - \omega \cdot \gamma / 4 B^* = 0 \\ \delta B / \delta t - \omega / 2k \delta B / \delta y - \omega / 4k^2 \delta^2 B / \delta y^2 i - \\ - \omega \cdot \gamma / 4 A^* = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

que son inmediatamente reconocidas como ecuaciones de tipo Zakharov. En ellas el asterisco significa complejo conjugado. El coeficiente γ depende del oleaje incidente y es proporcional a:

$$\varepsilon_i \int_0^\infty (d^2 J_0 / dx^2 + 2k d J_0 / dx) e^{-2kx} dx \quad (8)$$

siendo:

$$\varepsilon_i = a_i \cdot (2\omega)^2 / g \operatorname{tg}^2 \beta \quad (9)$$

como sabemos este último parámetro de no linealidad del oleaje está estrechamente relacionado con el parámetro de Iribarren.

La función potencial del oleaje incidente, fuertemente reflejado en la playa, se expresa como:

$$\Phi_i = a_i g / 2\omega J_0(4\sqrt{kx}) \cdot \sin 2\omega t \quad (10)$$

siendo $J_0(4\sqrt{kx})$, la función de Bessel de orden cero.

En (8) el argumento de la función es $4\sqrt{kx}$. En todo este trabajo el número de onda k es el correspondiente a las ondas de orilla.

El análisis de estabilidad de (7) se puede efectuar por el método de las características, análogamente al empleado por Akylas en su trabajo. Sin embargo, nosotros usaremos un método de análisis más constructivo basado en el empleo de la ecuación de Hill como veremos a continuación.

3. MODULACION DE LA ONDA DE ORILLA

En vez de considerar separadamente las variaciones temporales «lentas» y «rápidas» en la onda de orilla, podemos expresar éstas conjuntamente mediante la siguiente función de potencial.

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \varphi \cdot e^{-kx} \\ \varphi &= \varphi(t, y) \end{aligned} \quad (11)$$

En donde φ contiene toda la información temporal, además de toda la información longitudinal a lo largo de la playa.

El potencial de velocidades del oleaje incidente se expresa, con la bien conocida solución (10).

De esta manera la condición de ortogonalidad (6) la podemos escribir como sigue, una vez efectuadas las oportunas sustituciones y simplificaciones y considerando sólo los términos cuadráticos:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + \omega^2 \varphi / 2 - \omega^2 \varphi_{yy} / 2k^2 + 2k[a_i g / 2\omega \cdot \varphi_1 \\ \sin 2\omega t \cdot I_1 + 2a_i g / 2\omega \cdot \varphi \omega \cdot I_2 \cos 2\omega t + 2a_i g / \\ / 2\omega \cdot \omega \cos 2\omega t I_3 \cdot (k^2 \cdot \varphi + \varphi_{yy})] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

En donde:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty (d^2 J_0 / dx^2 - 2k d J_0 / dx) e^{-2kx} dx \\ I_2 &= \int_0^\infty (-2k d J_0 / dx) \cdot e^{-2kx} dx \\ I_3 &= \int_0^\infty J_0 e^{-2kx} dx \end{aligned} \quad (13)$$

Como vemos esta ecuación es análoga a la encontrada por R. T. Guza y A. J. Bowen en 1976, sólo que en nuestro caso aparecen las derivadas segundas de ϕ respecto de y . En el caso de no existir modulación longitudinal la variación de ϕ respecto de y sería sensiblemente proporcional al $\cos ky$ y la ecuación (12) sería idéntica a la señalada de Guza y Bowen para el caso de resonancia perfecta.

Introducimos la modulación longitudinal como una variación de gran longitud de onda de la amplitud de la onda de orilla:

$$km = q \cdot k \quad (14)$$

En la ecuación (12) efectuamos por una parte el cambio $\omega t = T$ y por otro el cambio:

$$\phi = z \exp [-\alpha gk/\omega^2 \cos 2T \cdot I_1] \quad (15)$$

con lo cual obtendremos finalmente la ecuación:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + z[1 + q^2/2 + q + \varepsilon_i/4k \\ \cos 2T(2I_2 - I_1 + 2k^2 I_3(q^2 + 2q)) - \\ - I_1 \cdot \varepsilon_i^2/16k \cdot \sin^2 2T] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + z[1 + q^2/2 + q - I_1 \cdot \varepsilon_i^2/32k \cdot \\ \cdot \cos 2T(2I_2 - I_1 + 2k^2 I_3(q^2 + 2q)) + \\ - I_1 \cdot \varepsilon_i^2/32k \cos 4T] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Esta como sabemos es la ecuación de Hill, que se reduce a la ecuación de Mathieu si suprimimos los términos cuadráticos en ε_i .

Dependiendo de los valores de q y de ε_i la ecuación (17) nos permite discernir las zonas de inestabilidad de la solución de la onda de orilla, y por lo tanto, los valores de la modulación espacial más proclives a aparecer para unas características dadas del oleaje incidente. Este análisis lo efectuaremos en el apartado siguiente.

4. ANALISIS DE ESTABILIDAD

La ecuación de Hill (17) la escribimos en forma más compacta como:

$$\ddot{z} + z(\alpha + p \cos 2T + r \cos 4T) = 0$$

$$\alpha = 1 + q^2/2 + q - I_1 \cdot \varepsilon_i^2/32k$$

$$p = \varepsilon_i/4k [2I_2 - I_1 + 2k^2 I_3(q^2 + 2q)]$$

$$r = \varepsilon_i^2 I_1/32k \quad (18)$$

Como los valores de α son cercanos a la unidad nos encontramos con la llamada primera zona de inestabilidad asintótica. Por tanto la solución de la onda de orilla será inestable para valores de α comprendidos en los límites de estabilidad de la primera zona de la ecuación de Hill,

$$\alpha_{s_{el}} < \alpha < \alpha_{c_{el}} \quad (19)$$

Para cada par de valores, q, ε_i , los valores de p y r , según (18) definen los límites correspondientes, $\alpha_{s_{el}}, \alpha_{c_{el}}$, de la primera zona de inestabilidad. Sólo queda comparar el valor de α con los límites para establecer en qué región nos situamos.

Teniendo en cuenta que tanto α, p como r dependen de q y de ε_i , el proceso de cálculo es claramente iterativo. Para el cálculo mediante ordenador de los límites de estabilidad hemos empleado un algoritmo similar al señalado por E. A. Grebennikov, e Y. A. Ryabov (1983).

En el diagrama representado en la figura 1 se señalan los límites de la zona de inestabilidad así como la curva que relaciona, q y ε_i , para el caso de la modulación más inestable. Como puede observarse la longitud de onda de la modulación disminuye para valores crecientes de ε_i , y por lo tanto, a igualdad de otras características, para valores crecientes de la amplitud del oleaje incidente. Esto último también se desprende del trabajo de T. R. Akyas (1983).

Un resultado interesante es que tanto los límites de la región de inestabilidad como el crecimiento más inestable de la modulación se representan por líneas con curvatura relativamente acusada, lo que nos indica que la relación entre ε_i y q no es lineal en el campo de valores en la que se mueve ε_i .

ε_i	q_1	q_2	q_{op}
0,25	0,024695077	-0,009040869	0,007827104
0,50	0,063954686	-0,003004514	0,030475186
0,75	0,117139204	0,017840852	0,067490028
1,00	0,1823705	0,051665346	0,117017923
1,25	0,258372	0,0969959	0,17768395
1,50	0,343354	0,1513905	0,24737225
1,75	0,4357925	0,213054	0,32442325
2,00	0,533623161	0,280624847	0,407124004

TABLA 1.

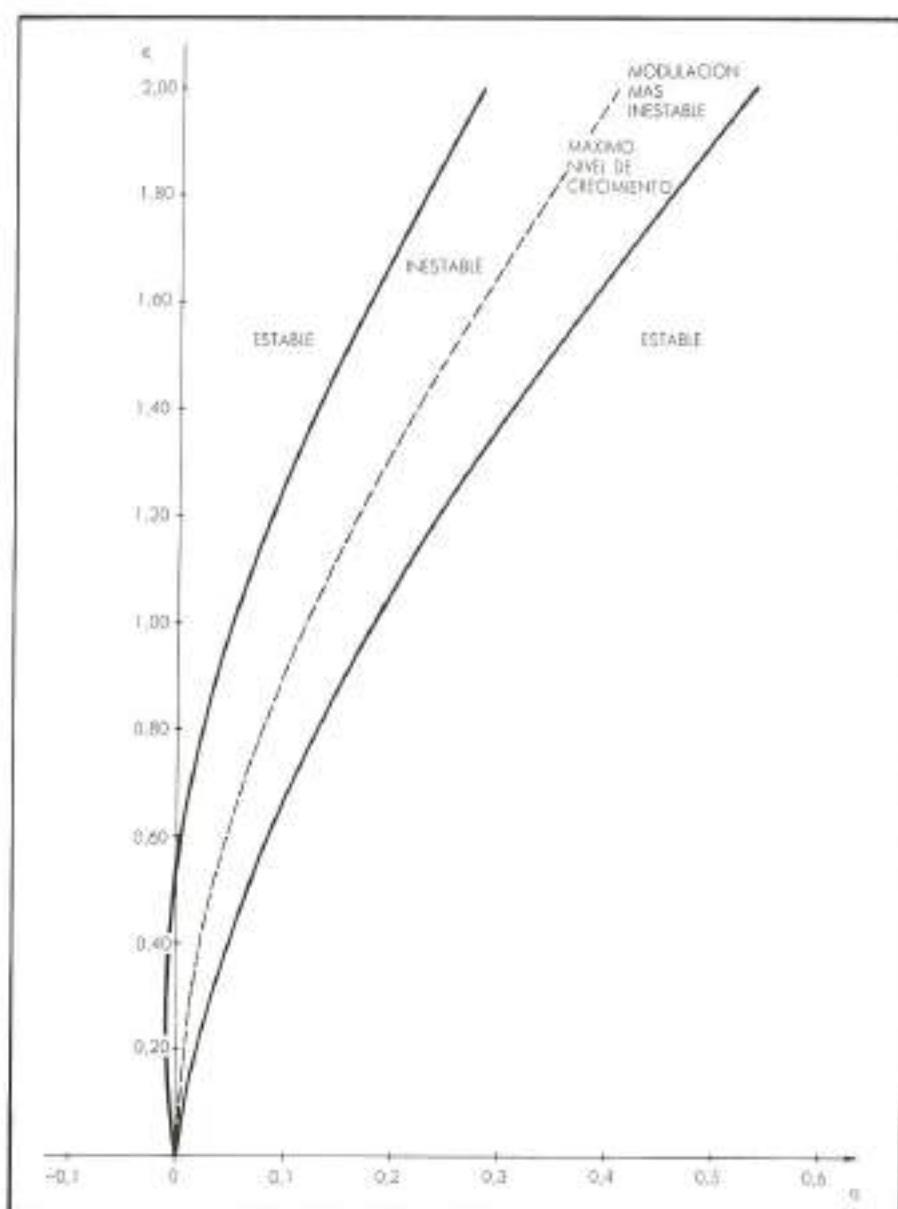


FIGURA 1. Relación entre el parámetro ϵ_1 de longitud de onda relativa y el parámetro q de no linealidad del sistema. El crecimiento de la modulación sólo es posible en la zona de inestabilidad.

Los valores de los límites, así como de la modulación más inestable se ofrecen en la tabla 1 para distintos de ϵ_1 colocados en orden creciente.

Llegados a este punto hay que señalar las acusadas diferencias que se obtienen tanto con los límites de estabilidad como en la modulación más inestable en el caso de que no consideremos en el cálculo los términos cuadráticos en ϵ_1 , es decir en el caso de que en (18) $r = 0$ y $n = 1 + q^2/2 + q$.

En este supuesto la ecuación de Hill se transforma en la más simple de Mathieu, desplazándose tanto los límites como la modulación más inestable

hacia la izquierda en el diagrama de (ϵ_1, q) . Lógicamente, para pequeños valores, de ϵ_1 los resultados son prácticamente coincidentes en ambas alternativas.

5. CONCLUSIONES

De acuerdo con los apartados anteriores de nuestro estudio se llegan a unos resultados que exponemos en la tabla 1 y que gráficamente representamos en la figura 1. Para cada valor del parámetro, ϵ_1 , hay dos valores del número de onda relativo de la modulación de tal manera que entre los cuales se establece la zona de inestabilidad de la



FIGURA 2. Elongas barras de arena conectadas a la costa, Cape Cod, Massachusetts. Probablemente la extraordinaria longitud de onda de estas formaciones pueden explicarse por el mecanismo de modulación de la onda de orilla. (Fotografía de David S. Aubrey. Cortesía del autor.)

solución. Asimismo se puede encontrar la relación entre q y ϵ_1 , que hace que la modulación correspondiente sea más inestable.

El procedimiento empleado a tal fin ha sido el análisis de estabilidad mediante la ecuación de Hill, válido como sabemos cuando la ecuación de evolución del fenómeno de que se trate es cuasilineal y de segundo orden.

Como puede observarse los valores de q son crecientes con los de ϵ_1 . Este crecimiento, sin embargo, es claramente no lineal. A título de ejemplo, para un valor de ϵ_1 de aproximadamente 1,3, el valor de q para la modulación más inestable es de 0,2. Es decir, la longitud de onda de la modulación es cinco veces la correspondiente a la de la longi-

tud de onda de la onda de orilla en el modo cero.

Para la obtención de los valores que figuran en este estudio según la ecuación (17) hemos tenido en cuenta los términos proporcionales a ϵ_1^2 , lo cual proporciona resultados exactos en este orden de aproximación. La no consideración de estos términos cuadráticos introduce variaciones relativamente importantes en los valores de los límites y, consecuentemente, en los de la modulación más inestable. Así, para $\epsilon_1 = 1$ el valor del límite superior pasa de $q = 0,1823705$ a $q = 0,0667708$ según consideremos o no los términos en ϵ_1 . Para $\epsilon_1 = 2$ este mismo límite pasa de $q = 0,5336232$ a $q = 0,1331372$. Las diferencias son, por lo tanto, considerables.

La importancia de los términos cuadráticos se manifiesta más acusadamente debido a que, como sabemos, los límites para la consideración de una playa como reflectiva se encuentra para valores de ϵ_i de aproximadamente 2, con lo cual una parte sustancial del rango de validez de las teorías implicadas en los desarrollos, son para valores de ϵ_i cercanos o superiores a la unidad.

En este trabajo sólo nos hemos ocupado de la modulación espacial de la onda de orilla. Lógicamente esta modulación irá acompañada de la correspondiente modulación temporal que se manifestará en forma de ondas de gran período comparado con el correspondiente, tanto a la onda de orilla de modo cero según su relación de dispersión, como con el del oleaje incidente imprescindible para la excitación subarmónica.

Observaciones de diferentes autores han puesto de manifiesto que el espectro de frecuencias de los movimientos ondulatorios en las playas medido fundamentalmente mediante el *mic- μ* son de muy baja frecuencia en comparación con los valores del período de las ondas de orilla correspondiente a la topografía de los fondos de cada caso. Estas mismas observaciones señalan una clara estructura periódica longitudinal con una longitud de onda mucho mayor que la de la onda de orilla de modo cero. En otros casos la escala espacial de las longitudes de onda queda expresada en la propia línea de costa mediante avances y retrocesos rítmicos de considerables dimensiones claramente superiores a las «beach cusps» generadas por el mecanismo de excitación de las ondas de orilla, de modo cero. Estas formas rítmicas de longitud de onda de gran escala, de cientos de metros en algunos casos, podrían ser la expresión costera de este mecanismo de inestabilidad modulacional al que nos hemos referido en este trabajo.

6. BIBLIOGRAFIA

1. AKYLAS, T. R., 1983. Large-Scale modulations of edge waves *J. Fluid Mech.* 132, pp. 197-208.
2. GREBENIKOV, E. A. y RYABOV, Y. A., 1983. Constructive methods in the analysis of nonlinear systems, Mir Publishers, Moscow.
3. GUZA, R. T. y DAVIS, R. E., 1974. Excitation of edge waves by waves incident on a beach *J. Geophys. Res.*, 79, pp. 1285-1291.
4. GUZA, R. T. y BOWEN, A. J., 1976. Finite amplitude edge waves, *J. Marine Res.* 34, pp. 269-293.
5. GUZA, R. T. y BOWEN, A. J., 1981. On the amplitude of beach cusps, *J. Geophys. Res.*, 86, pp. 4125-4132.
6. HUNTLEY, D. A. y BOWEN, A. J., 1978. Beach cusps and edge waves, *Proceeding 16th. Coastal Engineering Conference*, pp. 1378-1393.
7. INMAN, D. L. y GUZA, R. T., 1982. The origin of swash cusps on beaches, *Marine Geology*, 49, pp. 139-148.
8. KRILOFF, N. y BOGOLIOBOFF, N., 1947. Introduction to Non-linear Mechanics. *Annals mathematic studies*, 11, Princeton University Press.
9. LECHUGA, A., 1983. Formas rítmicas en playas. *Revista de Obras Públicas*, Mayo, pp. 353-357.
10. LECHUGA, A., 1985. Resonancia en playas. *Revista de Obras Públicas*, Febrero, pp. 97-106.
11. LECHUGA, A., 1986. Formas rítmicas en playas: su relación con la evolución costera. CEDEX, Madrid.
12. MEL, C. C., 1983. The applied Dynamics of Ocean Surface Waves. Wiley Interscience.
13. MINZONI, A. A. y WHITHAM, G. B., 1977. On the excitation of edge waves on beaches, *J. Fluid Mech.* 792, pp. 237-287.
14. STOKER, J. J., 1966. Nonlinear vibrations. Interscience Publishers, New York.
15. WHITHAM, G. B., 1976. Nonlinear effects in edge waves, *J. Fluid Mech.* 74, pp. 353-368.
16. ZAKHAROV, V. y SHABAT, A. B., 1972. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media *Soviet Physics JETP* 34.1, pp. 62-69.