

FLUJO ELASTOPLASTICO INCOMPRESIBLE ALREDEDOR DE UN CONO INFINITO ⁽¹⁾

C. SAGASETA (*)

G.T. HOULSBY (**)

RESUMEN. Se presenta una solución para el flujo incompresible de un suelo alrededor de un cono infinito. Puede ser de aplicación en análisis de la penetración estática en arcillas, para la región alrededor de la punta del cono, que es un punto singular. El suelo se considera incompresible, elastoplástico, con el criterio de fluencia de Von Mises. Se analiza la influencia del ángulo de abertura del cono y su rugosidad, así como del índice de rigidez del suelo.

ABSTRACT. A solution is presented for the incompressible soil flow around an infinite cone. It can be of application for cone penetration analyses in clay, for the region around the cone tip, which is a singular point. The soil is considered as incompressible elastoplastic, with Von Mises yield condition. The influence of cone angle and roughness, as well as soil rigidity index, are analyzed.

1. INTRODUCCION

En el análisis de los campos de tensiones y velocidades durante la penetración estática en arcillas, la región que rodea la punta juega un importante papel. Si se emplea un método numérico para la solución, la punta es un punto singular (figura 1) en el cual algunas de las variables se hacen infinitas y otras son discontinuas, lo que produce problemas numéricos. El objetivo de esta comunicación es obtener una solución para esta región que pueda usarse como condición de contorno para análisis numéricos, evitando la singularidad existente.

Por otra parte, muchas de las características de la penetración de un cono real finito se dan cerca de la punta. La simplificación de la geometría del problema de la figura 1-a a la figura 1-b permite soluciones analíticas y por tanto la identificación de esas características y de los factores que las controlan. Por ejemplo, las dos posibilidades para la zona plástica de la figura 1-c conducen, en la región de la punta, a todo el suelo en estado plásti-

co o a una zona elástica por delante de la punta, limitada por una frontera elasto-plástica radial.

En esta comunicación se presenta un análisis de la región de la punta, considerándola como un cono infinito que penetra a una velocidad constante, v_0 , en un espacio de arcilla. Con el fin de tener un problema estacionario, el proceso se estudia visto desde el cono, es decir, tomando el cono como fijo y el suelo fluyendo hacia arriba a su alrededor (figura 1-b). La formulación teórica se describe

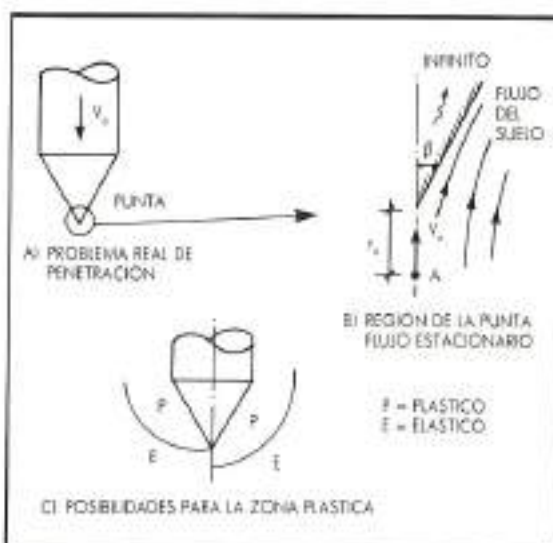


FIGURA 1. Problema de penetración. Región de la punta.

(*) Catedrático de Geotecnia de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de Cantabria.

(**) Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford, U.K.

(1) Comunicación presentada al Primer Simposio Internacional sobre Ensayos de Penetración (ISOPT-1), Orlando, Florida, USA, 20-24 de marzo de 1988.

brevemente, mientras que los resultados se presentan con más detalle.

Hay algunos análisis publicados de este problema, referidos a indentación de metales (Shield, 1955; Lippmann, 1962, 1965; Loeckert, 1963; Spencer, 1984). Todos ellos usan el criterio de Tresca y tratan el material como rígido-plástico, lo que lleva a discontinuidades en tensiones y/o velocidades al menos en la frontera elasto-plástica. La finalidad de esta comunicación es incluir la deformabilidad elástica del suelo, permitiendo así soluciones continuas.

2. FORMULACION DEL PROBLEMA

El suelo se considera como incompresible y elasto-plástico, con el criterio de Von Mises, definido por un módulo transversal, G , y una resistencia al corte, s_w , en compresión triaxial ($\sigma_1 = \sigma_3$). El cociente $J_p = G/s_w$ se denomina «índice de rigidez».

Las incógnitas del problema son las velocidades y tensiones del suelo, que se muestran en la figura 2-a. Debido a la simetría axial, se usan coordenadas esféricas, y el ángulo Φ , perpendicular al dibujo, no aparece en la formulación. Las tensiones (σ_{ij}) se descomponen en sus componentes isótropa (p) y desviadoras (σ'_{ij}). Usando las ecuaciones constitutivas presentadas por Houlsby et al. (1985), sin considerar los términos de Jaumann en las derivadas tensionales, resultan las siguientes ecuaciones para el problema:

— Incompresibilidad:

$$\dot{\epsilon}_{vol} = -\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2 \cdot \frac{v}{r} - \frac{u}{r} \cdot \cotg\theta = 0 \quad (1)$$

— Ley tensión-deformación incremental:

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{1}{2G} \cdot \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial \sigma'_r}{\partial \theta} + 6 \cdot \lambda \cdot \sigma'_r = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{2G} \cdot \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \theta} + 6 \cdot \lambda \cdot \sigma'_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\tau_{\theta r}} &= \frac{1}{G} \cdot \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + 12 \cdot \lambda \cdot \tau_{\theta r} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \end{aligned} \quad (4)$$

— Equilibrio interno:

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \tau_{\theta r} \cdot \cotg\theta + \frac{3}{r} \cdot \sigma'_r = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma'_\theta}{\partial \theta} - 3 \cdot \tau_{\theta r} + (\sigma'_r + 2 \cdot \sigma'_\theta) \cdot \cotg\theta = 0 \quad (6)$$

— Estado elástico/plástico:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \quad \text{si } F < 0 \\ \lambda &\geq 0 \quad \text{si } F = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

donde:

$$F = \sigma'^2_r + \sigma'_\theta \cdot \sigma'_\theta + \sigma'^2_\theta + \tau_{\theta r}^2 - \frac{4}{3} \cdot s_w^2$$

Un análisis detallado de las ecuaciones anteriores conduce a las siguientes conclusiones:

1. Las tensiones desviadoras ($\sigma'_r, \sigma'_\theta, \tau_{\theta r}$) pueden considerarse constantes con la coordenada radial, r :

$$\sigma'_{ij}(r, \theta) = s_{ij} \cdot \bar{\sigma}'_{ij}(\theta) \quad (8)$$

2. En estas condiciones, la solución más general para la presión, p , que satisface las ecuaciones de equilibrio interno, es:

$$p(r, \theta) = p_0 + s_w \cdot \left[v \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + \bar{p}(\theta) \right] \quad (9)$$

3. Para las velocidades (u, v) y el factor plástico, λ , se puede usar una técnica de separación de variables. La solución más general de este tipo es:

$$\begin{Bmatrix} u(r, \theta) \\ v(r, \theta) \\ r \cdot \lambda(r, \theta) \end{Bmatrix} = v_0 \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u}(\theta) \\ \bar{v}(\theta) \\ \bar{\lambda}(\theta) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Puede verse además que, si existe una zona elástica, las velocidades no pueden variar con la distancia radial ($n = 0$ en las ecuaciones 10). Por ello, puede concluirse que existen dos posibles situaciones:

1. Todo el suelo está en estado plástico (no hay zona elástica), y el exponente « n » es libre. A esto se llamará CASO PLÁSTICO.
2. Existe una zona elástica por delante de la punta y una zona plástica alrededor del cono. El exponente « n » es cero. A esto se denominará CASO ELASTOPLÁSTICO.

Por tanto, las nuevas variables incógnitas, indicadas por una barra superior ($\bar{}$), son funciones únicamente del ángulo θ , y el problema viene gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, en derivadas totales. Los parámetros « v » (ecuación 9) y « n » (ecuación 10), así como las constantes de integración, deben obtenerse de las pertinentes condiciones de contorno, que son las siguientes:

1. En el eje ($\theta = 0$), las condiciones de simetría axial ($u = 0$, $\tau_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_r = -2 \cdot \sigma_{\theta\theta}$), la velocidad de penetración impuesta ($v = v_0$) y la presión ($p = p_0$).
2. En la superficie del cono ($\theta = \pi - \beta$), las condiciones de velocidad normal nula ($u = 0$) y de rugosidad ($\tau_{\theta\theta} = -2/\sqrt{3} \cdot a \cdot s_r$), siendo a ($0 \leq a \leq 1$) el factor de adhesión de la superficie del cono.

El sentido físico del desarrollo anterior es que si los valores de la velocidad ascensional (v_0) y la presión (p_0) se imponen en un punto A (figura 2-b), situado en el eje a una distancia r_0 de la punta, entonces la integración del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas totales respecto a θ proporciona la variación de las tensiones y velocidades alrededor de la punta en cualquier punto M a lo largo del arco $A-B$. Sus valores en cualquier punto interior M' pueden obtenerse de los valores en M usando las ecuaciones (9) y (10), una vez que se han hallado los parámetros de variación radial de las velocidades (n) y de la presión (v).

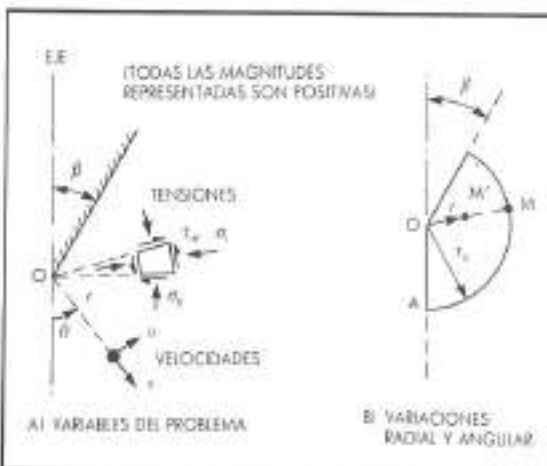


FIGURA 2. Definición de las variables del problema.

3. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

3.1. ANALISIS GENERAL

Las ecuaciones anteriores se han resuelto para un

rango razonablemente completo de propiedades del suelo (I_p) y características del cono (β, a).

La figura 3 muestra, a título de ejemplo, el flujo de un suelo con un índice de rigidez $I_p = 100$, alrededor de la punta de un cono estándar ($\beta = 30^\circ$), en los dos casos extremos de cono lubricado ($a = 0$) y rugoso ($a = 1$). La solución es del tipo CASO PLASTICO (es decir, todo el suelo está en estado plástico). También se indica el valor del exponente « n » (ecuaciones 10). La figura 4 muestra el campo de tensiones principales desviadoras. En la figura 5 se han representado las isó-

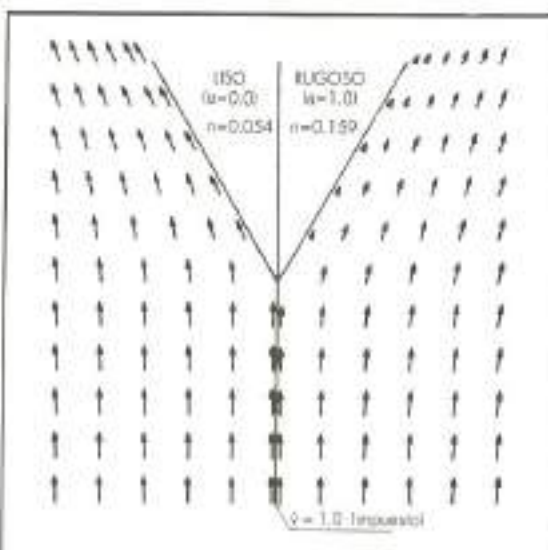


FIGURA 3. Cono estándar ($\beta=30^\circ$), $I_p=100$, Campo de velocidades.

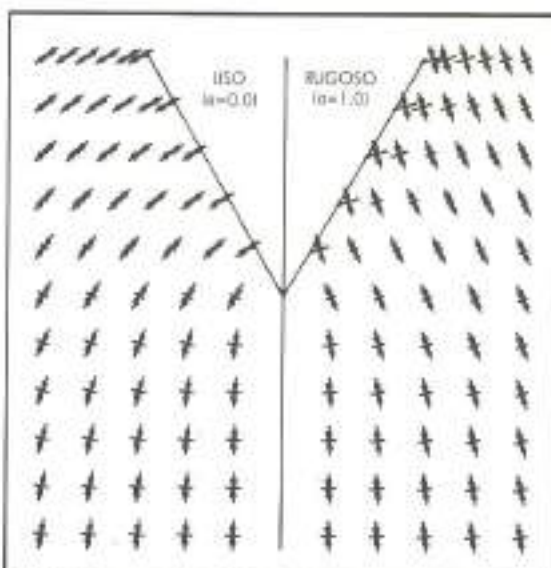


FIGURA 4. Cono estándar ($\beta=30^\circ$), $I_p=100$, Tensiones desviadoras principales.

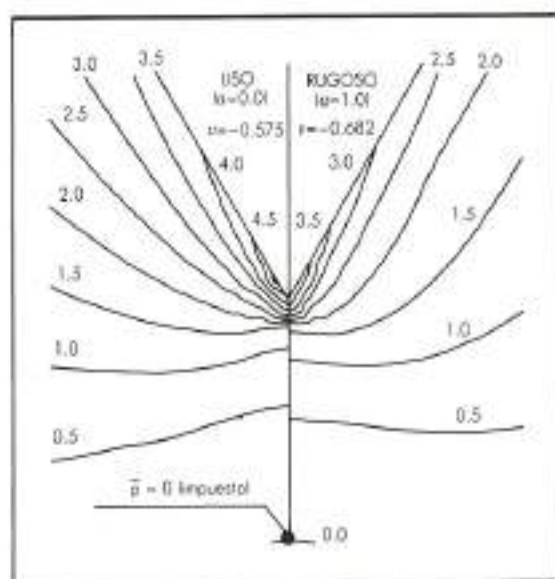


FIGURA 5. Cono estándar ($\beta=30^\circ$), $L=100$. Isolíneas de la presión.

neas del incremento de presión, $\bar{p} = (p - p_s)/s_c$. También se indica el valor del parámetro « n » de variación radial de la presión.

3.2. LÍMITE ENTRE LOS CASOS PLÁSTICO Y ELASTOPLÁSTICO

El primer resultado general significativo se refiere al rango que corresponde a los casos PLÁSTICO y

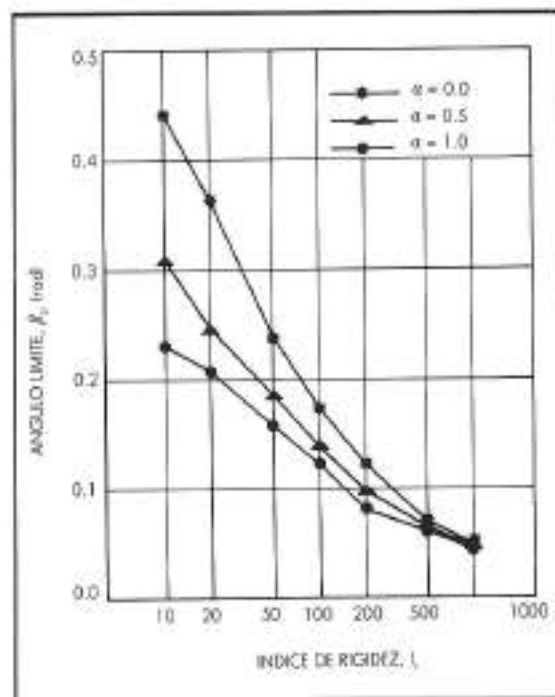


FIGURA 6. Ángulo del cono límite entre los casos elastoplástico y plástico.

ELASTOPLÁSTICO. Como hecho general, la existencia de una zona elástica (CASO ELASTOPLÁSTICO) es sólo posible para conos muy agudos (valores de β pequeños). La figura 6 muestra el valor crítico de β para la transición entre los dos casos, en función del índice de rigidez del suelo, para diferentes factores de rugosidad del cono. Como puede verse, para suelos reales (I_r de 50 a 500), el límite se sitúa alrededor de $5-10^\circ$, por lo que los conos estándar caen completamente dentro del rango del CASO PLÁSTICO. Una excepción notable son los primitivos piezoconos (Torstensson, 1975; Wizza et al., 1975), que tenían valores de β de 5 y de 10° , respectivamente. Puede demostrarse teóricamente que para material rígido-plástico ($I_r = \infty$), el CASO ELASTOPLÁSTICO no es posible ($\beta_c = 0$), de acuerdo con la tendencia que muestran las curvas de la figura 6.

Es interesante señalar que algunos autores han constatado, como resultado de análisis numéricos, la diferencia entre los dos casos descritos. Por ejemplo, Baligh (1985) afirma que un cono abierto ($\beta = 30^\circ$) implica «grandes deformaciones que son claramente visibles en las cercanías de la punta», mientras que un cono agudo ($\beta = 9^\circ$) actúa en forma diferente, «cortando el suelo en lugar de comprimirlo hacia adelante de la punta». Estos comentarios cualitativos tienen la expresión matemática de que el exponente « n » sea positivo o cero, respectivamente.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, no se detallan más los resultados obtenidos para el CASO ELASTOPLÁSTICO, limitando la presentación al CASO PLÁSTICO.

3.3. RESULTADOS PARA EL CASO PLÁSTICO

Las principales magnitudes que definen la solución son los parámetros que rigen la variación radial de la presión (v) y de las velocidades (w). También es interesante conocer las tensiones y velocidades en la cara del cono (indicadas a partir de aquí con el subíndice « c »). Las velocidades vienen definidas por la relación de velocidad de salida, $\bar{v}_c$. El incremento de presión se define por $\bar{p}_c$.

Para las tensiones desviadoras en la zona plástica se usan las variables de Lode, ζ y ψ , definidas por:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}'_r &= \frac{4}{3} \cdot \cos \zeta \cdot \cos \psi \\ \bar{\sigma}'_\theta &= -\frac{4}{3} \cdot \cos \zeta \cdot \sin(\psi + \pi/6) \\ \bar{\tau}_{r\theta} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin \zeta\end{aligned}\quad (11)$$

Sus valores en la cara del cono se pueden deducir de las condiciones de contorno, resultando:

$$\begin{aligned}\zeta_c &= -\arcsen \alpha \\ \psi_c &= -\operatorname{arctg} \left(\frac{n+2}{n\sqrt{3}} \right)\end{aligned}\quad (12)$$

La Tabla 1 recoge los valores obtenidos de n , ν , $\bar{v}_c$ y $\bar{p}_c$ para un cono estándar ($\beta = 30^\circ$), para valores del índice de rigidez en el rango 10-1000, y para tres valores diferentes del factor de rugosidad, α . Como puede verse, un suelo con $I_p > 200$ puede considerarse como rígido-plástico a efectos prácticos. El exponente « n » es pequeño, alrededor de 0,05 para cono lubricado y de 0,16 para cono rugoso. La relación de velocidad de salida es menor que la unidad, decreciendo con la rugosidad del cono, desde alrededor de 0,82 a aproximadamente 0,28. El parámetro de presión, « ν », es negativo, alrededor de -0,60, lo que implica la existencia de compresiones infinitas en la punta (ver ecuación 9), siendo pequeña la influencia de la rugosidad. El incremento de presión es positivo, disminuyendo con α , de 3,80 a 2,80.

I_p	α	n	ν	$\bar{v}_c$	$\bar{p}_c$
10	0,0	0,021	-1,204	0,832	4,236
	0,5	0,076	-1,090	0,603	3,609
	1,0	0,131	-0,995	0,281	3,241
20	0,0	0,038	-0,830	0,827	4,064
	0,5	0,083	-0,839	0,611	3,308
	1,0	0,133	-0,822	0,294	3,015
50	0,0	0,050	-0,634	0,825	3,888
	0,5	0,091	-0,693	0,615	3,194
	1,0	0,157	-0,717	0,285	2,860
100	0,0	0,054	-0,575	0,825	3,817
	0,5	0,093	-0,646	0,617	3,057
	1,0	0,159	-0,682	0,285	2,797
200	0,0	0,056	-0,547	0,823	3,768
	0,5	0,095	-0,623	0,618	2,984
	1,0	0,160	-0,665	0,285	2,768
500	0,0	0,058	-0,530	0,826	3,747
	0,5	0,096	-0,610	0,618	2,997
	1,0	0,161	-0,655	0,285	2,746
1000	0,0	0,058	-0,525	0,826	3,730
	0,5	0,096	-0,600	0,618	2,988
	1,0	0,161	-0,651	0,286	2,732

TABLA 1. Resultados para el caso $\beta = 30^\circ$ (cono estándar).

Se ha estudiado la influencia del ángulo de apertura del cono, β , para un caso típico de suelo con un índice de rigidez de 100, que puede considerarse como un valor medio en suelos reales. Las

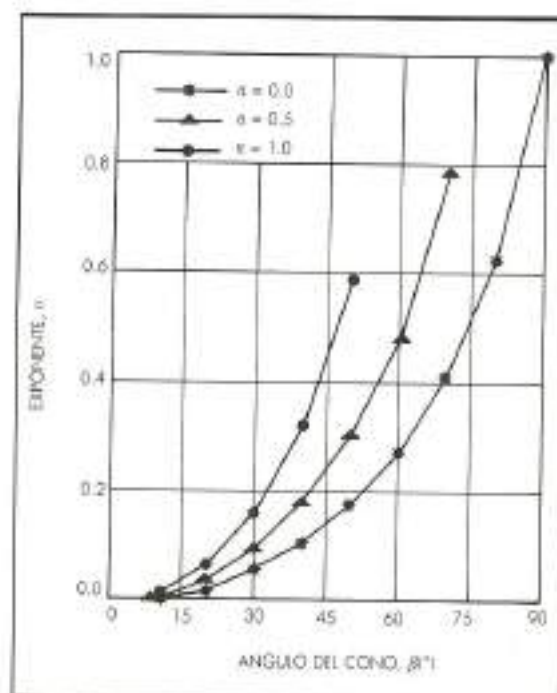


FIGURA 7. $I_p = 100$. Exponente « n ».

figuras 7 a 10 muestran los resultados para diversos valores del factor de rugosidad del cono.

El caso extremo de una placa plana lubricada ($\beta = 90^\circ$, $\alpha = 0$) tiene una solución analítica sencilla:

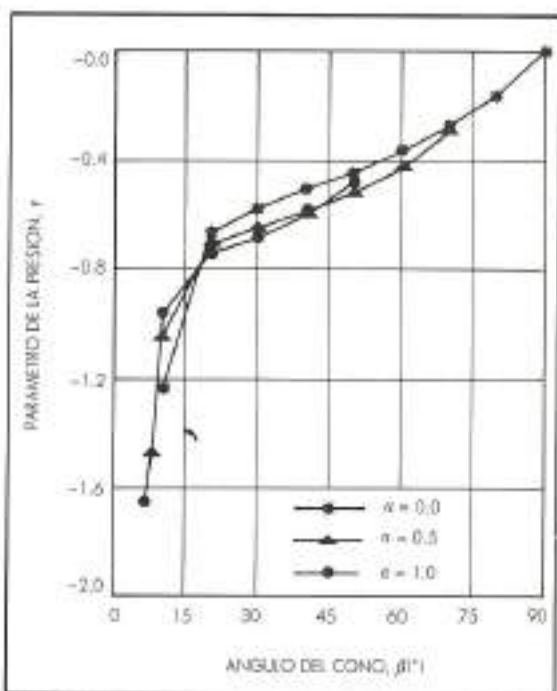


FIGURA 8. $I_p = 100$. Parámetro de la presión « ν ».

lla, para cualquier valor del índice de rigidez, pues corresponde a una deformación homogénea incompresible bajo compresión triaxial convencional ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$), viniendo dada la solución por $n = 1$, $\nu = 0$, $\bar{v}_r = 0.5$ y $\bar{p}_r = 0$. Este caso se ha incluido en las figuras y proporciona una comprobación de la solución numérica obtenida para los otros casos.

El exponente «n» aumenta con el ángulo del cono (β) y su rugosidad (α) (figura 7). Para cono lubricado ($\alpha = 0$), alcanza el valor $n = 1$ para $\beta = 90^\circ$, mientras que para cono rugoso ello ocurre a un ángulo de unos 50° .

El parámetro de presión «v» se muestra en la figura 8. La influencia de la rugosidad del cono es pequeña, y de sentido variable. Es interesante hacer notar que para conos abiertos rugosos ($\beta > 60^\circ$) llega a ser positivo, lo que implica la presencia de succiones infinitas en la punta (véase ecuación 9), en lugar de compresiones.

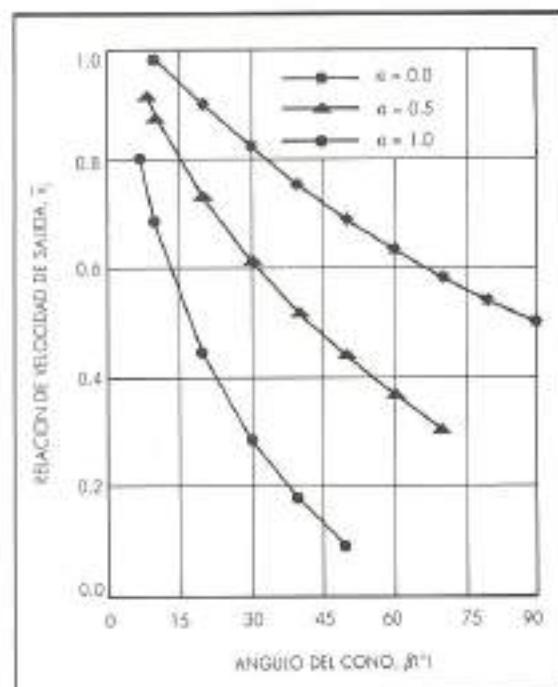


FIGURA 9. $L=100$. Relación de velocidades de salida, $\bar{v}_r$.

La relación de velocidad de salida (figura 9) disminuye con el ángulo del cono y la rugosidad. Para cono rugoso, llega a anularse para un ángulo de unos 60° . Esto implica que para conos más abiertos, la acción de la adhesión total en la cara del cono produciría una velocidad de salida negativa (es decir, dirigida hacia la punta), lo cual es físicamente imposible. El resultado es que para $\beta > 60^\circ$ la adhesión movilizada será sólo una fracción de la disponible, y el suelo se adherirá al cono

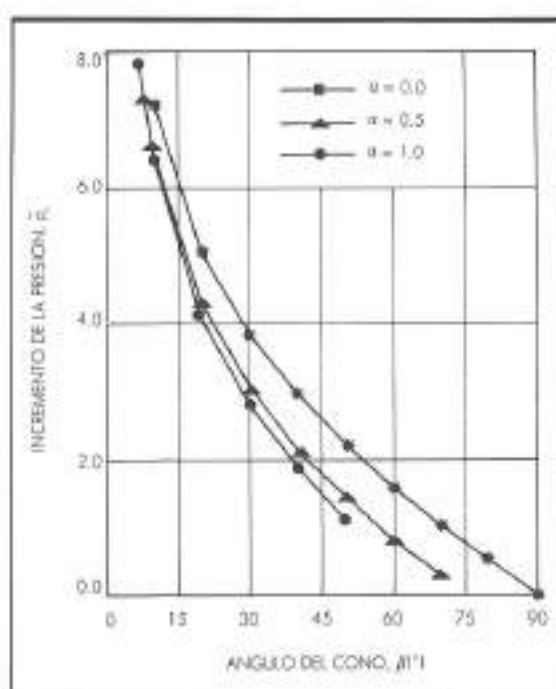


FIGURA 10. $L=100$. Incremento de presión, $\bar{p}$.

($\bar{v}_r = 0$). Por ejemplo, para una placa plana rugosa ($\beta = 90^\circ$, $\alpha = 1$), el límite para el factor de adhesión movilizado es aproximadamente de 0.3.

El incremento de presión (figura 10) decrece con el ángulo β . Para conos abiertos rugosos llega a ser negativo, implicando de nuevo la presencia de succiones cerca de la cara del cono.

4. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación completa del flujo elastoplástico incompresible alrededor de la punta de un cono. Se han resuelto las ecuaciones resultantes para un amplio conjunto de casos.

Se han identificado tres regímenes diferentes de flujo, lo que concuerda con análisis previos, numéricos y experimentales, de la penetración de conos.

Para conos muy agudos ($\beta < 5^\circ$ - 10°), existe una zona elástica por delante de la punta, y el cono actúa cortando el suelo y desplazándolo lateralmente.

El segundo régimen cubre el rango usual para penetrometros. Todo el suelo está plastificado y la punta es un punto de parada.

En ambos casos, la presión tiende logarítmicamente a una compresión infinita en la punta, con la única excepción de la placa plana lubricada ($\beta = 90^\circ$, $\alpha = 0$), en la cual la presión es constante en toda la región.

Para conos abiertos rugosos ($\beta > 60^\circ$), el suelo se adhiere a la cara del cono y la rugosidad se moviliza sólo parcialmente, produciendo a veces succiones infinitas en la punta en lugar de compresiones.

5. AGRADECIMIENTOS

El trabajo aquí presentado ha sido realizado en el Department of Engineering Science de la Universidad de Oxford, financiado por el British Science and Engineering Research Council, y una Acción integrada Hispano-Británica del British Council y el Ministerio de Educación y Ciencia español, subvencionando una visita del primer autor.

Los autores agradecen a J. Norbury y A. A. Wheeler sus valiosas discusiones sobre los aspectos matemáticos.

REFERENCIAS

BALIGH, M.M. 1985. «Strain Path Method». J. Geot. Eng. ASCE, 111,9:1108-1136.

HOULSBY, G.T., J. NORBURY y A.A. WHEELER 1985. «Analysis of undrained cone penetration as a steady flow problem». Vth. ICONMIG, Nagoya, Japan. 4:1767-1773.

LIPPMANN, H. 1962. «Principal line theory of axially symmetric plastic deformations». J. Mech. Phys. Solids 10:111-122.

LIPPMANN, H. 1965. «Statics and dynamics of axially-symmetric flows». J. Mech. Phys. Solids 13:29-39.

LOCKETT, F.J. 1963. «Indentation of a rigid/plastic material by a conical indenter». J. Mech. Phys. Solids. 11:345-355.

SHIELD, R.T. 1955. «On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry». Proc. Roy. Soc. A233:267-287.

SPENCER, A.J.M. 1984. «Plastic flow past a smooth cone». Acta Mechanica 54:63-74.

TORSTENSSON, B.A. 1975. «Pore pressure sounding instrument». Spec. Conf. In Situ Meas. Soil Prop. ASCE, Raleigh, USA, 2:48-54.

WIZZA, A.E.Z., R.T. MARTIN y J.E. Garfanger 1975. «The piezometer probe». Spec. Conf. In Situ Meas. Soil Prop. ASCE, Raleigh, USA, 1:536-545.



Un aliado
muy rentable.

Motobasculantes



14 Modelos de 1000 a 3000 Kgs.
Diferentes sistemas de descarga.
Tracción a 2 y 4 ruedas.



Carretillas Elevadoras

De 1000 a 2500 Kgs.



Pala Cargadora

Modelo standard: 400 litros.
Versiones con pinzas para troncos,
retro excavadora, etc.



Auto- hormigonera

Capacidad de amasada: 750 litros.



APART. P.O.B. 194
TEL. (93) 874 73 11
TELEX 53102 AUDU E
MANRESA (Barcelona) ESPAÑA
