

UNA APROXIMACION A LAS CONDICIONES DE CONTORNO EXTERIORES EN PROPAGACION DE ONDAS

P. ORTIZ (*)
M. PASTOR (**)
J. PERAIRE (***)

RESUMEN. Se presenta en este trabajo una nueva aproximación a las condiciones de contorno para onda incidente, aplicables a problemas de difracción y refracción de ondas superficiales. El presente modelo se muestra competitivo en relación al modelo en elementos infinitos, por su simplicidad y por obtener matrices del sistema mejor condicionadas, de gran importancia en la velocidad de convergencia de métodos indirectos de solución.

ABSTRACT. In this work a new approach to the boundary conditions for the incident wave, applicable to the diffraction and refraction of surface waves is presented. The model is very competitive in relation to the model of infinite elements, because of its simplicity and to obtain matrices of the system much better conditioned, of upmost importance in the convergence velocity of indirect methods of solution.

INTRODUCCION

Los problemas de tipo dinámico, que frecuentemente se presentan en ingeniería, pueden ser tratados numéricamente mediante dos metodologías. En la primera, se realiza el análisis en el dominio de la frecuencia, y se supone que el problema es lineal, superponiendo respuestas a distintas excitaciones. El segundo grupo de métodos se basa en el análisis en el dominio del tiempo, integrando las ecuaciones que describen el problema a lo largo del mismo.

En el caso más simple (una variable escalar en una dimensión), la ecuación en derivadas parciales que describe el fenómeno puede ser escrita como

$$c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1)$$

o bien

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

donde ξ es un vector.

Si se supone que tanto la excitación exterior como la respuesta son funciones armónicas, puede introducirse una variable compleja $\Phi_s(x,t)$ tal que

$$\Phi(x,t) = \text{Re}[\Phi_s(x,t)] \quad (3)$$

suponiendo además que

$$\Phi_s(x,t) = \Phi(x) \cdot \exp(i\omega t) \quad (4)$$

que, tras sustituir en (1) resulta

$$c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \omega^2 \Phi = 0 \quad (5)$$

A las ecuaciones (5) y (1) o (2), deben añadirse las condiciones de contorno e iniciales, en su caso, para que el problema esté bien planteado, y es precisamente en las condiciones de contorno donde radica una de las mayores dificultades del problema.

Considérese, por ejemplo, un tren de ondas conocido que incide sobre la bocana de un puerto. Debido a la radiación de energía hacia el exterior, se superponen dos campos de ondas, incidente y radiado, de los cuales tan sólo el primero es conocido. No es posible, pues, en esta frontera suponer condiciones de Dirichlet.

Este problema puede ser resuelto empleando elementos infinitos, como ha sido propuesto por Bettess y Zienkiewicz [1,2,3] para el análisis en frecuencias o bien mediante técnicas basadas en la integral de contorno o en la aproximación de la solución en el exterior por funciones analíticas [4].

(*) Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid. División de Cálculo y Análisis Matemático del CEDEX (MOPU).

(**) Profesor titular de Cálculo Numérico de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid. Jefe de la División de Cálculo y Análisis Matemático del CEDEX (MOPU).

(***) Institute for Numerical Methods in Engineering, Univ. Swansea IGBI.

Todas estas técnicas, sin embargo, dan lugar a sistemas de ecuaciones ya no simétricos, ya mal condicionados.

El objetivo de este trabajo es presentar condiciones de contorno de tipo «onda incidente conocida» que mejoren el condicionamiento de la matriz resultante.

Esto presenta un gran interés cuando el sistema de ecuaciones se debe resolver mediante métodos indirectos [5,6,7].

ONDAS SUPERFICIALES EN FLUIDOS

La propagación de ondas superficiales largas en fluidos está gobernada por la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & H \\ g & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde η es la sobrelevación, u la velocidad de las partículas, H la profundidad y g la aceleración de la gravedad.

Las hipótesis fundamentales en que se basa son las siguientes:

1. Aceleraciones verticales despreciables. La distribución de presiones en vertical es la hidrostática.
2. Pendientes pequeñas tanto en el fondo como en la superficie del fluido. Longitud de onda comparable a la profundidad.
3. La velocidad horizontal no varía con la profundidad.
4. No se han considerado términos disipativos, convectivos y fuentes.

Se puede comprobar fácilmente que la ecuación (6) es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (7)$$

la cual, para ondas armónicas se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \right) + \omega^2 \bar{\eta} = 0 \quad (8)$$

de forma análoga (3), (4) y (5).

La velocidad de propagación c viene dada por

$$c = \sqrt{gH} \quad (9)$$

Es de destacar que (6), (7) y (8) son equivalentes para ondas armónicas.

En el caso de ondas cortas (oleaje de viento, por ejemplo), la hipótesis de velocidad constante en la vertical no es válida, debiéndose emplear en vez de (8) la ecuación de Berkhoff.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \omega^2 \frac{c c_x}{c} \Phi = 0 \quad (10)$$

donde c y c_g son las velocidades de fase y de grupo, respectivamente.

El potencial complejo $\Phi(x)$, permite obtener tanto las velocidades como las sobreelevaciones.

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \left\{ Z(z) \cdot \frac{\partial \Phi(x)}{\partial z} \cdot \exp(i\omega t) \right\} \\ \eta &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega}{g} \Phi(x) \exp(i\omega t) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

La función $Z(z)$ da la distribución en profundidad de la velocidad, siendo:

$$Z(z) = \frac{\cos k(h+z)}{\cos kh} \quad (12)$$

En el caso de que los términos convectivos, de fricción o fuentes sean importantes, deben emplearse ecuaciones no lineales como las descritas por Péraire [8].

CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno más frecuentemente empleadas en problemas de propagación de ondas son:

1. **Sobrelevación conocida.** Corresponde al caso en que se haya medido en la frontera considerada la variación de la sobrelevación con el tiempo, como por ejemplo cuando se dispone de datos de mareógrafos en la desembocadura de una ría.
2. **Velocidad conocida.** Este es el caso de aquella parte del contorno que une un río al dominio del cálculo.
3. **Contorno perfectamente reflectante.** La velocidad normal al contorno es nula.
4. **Contorno parcial o totalmente absorbente.** En el segundo caso debe dejar pasar sin ninguna reflexión ondas que incidan sobre él.
5. **Onda incidente conocida,** como en el caso antes descrito en que la sobrelevación y la velocidad de la onda incidente sean conocidas, pero no las reflejadas por el dominio de cálculo.

A continuación se derivan condiciones de contorno aplicables en los casos 4. y 5. para la ecuación de Berkhoff [10].

El punto de partida es la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{c_x}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (13)$$

que se reduce a la ecuación de Berkhoff para ondas armónicas.

Para esta ecuación existen dos familias de líneas características, dadas por

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{c c_x} \quad (14)$$

PUERTO DE ALICANTE

El punto de embarque para sus mercancías



Dotado de una terminal de contenedores equipada con dos grúas pórtico de 35 y 30 toneladas.

Características: 38 metros de alcance lado mar, 22 metros lado tierra, 25 metros de altura de elevación y 22 metros de profundidad.

También cuenta con instalaciones para buques Roll-on/Roll-off y para la carga y descarga de mercancía general y graneles tanto líquidos como sólidos con los suficientes medios de trabajo.



Además tiene almacenes en régimen de depósito franco y para mercancías frigoríficas.

Seguimos mejorando

Muelle de Levante, s/n - 03002 ALICANTE

Teléfonos: (965) 20.23.16 - 20.22.55 - Télex: 66554 JPA E

**Creando
las condiciones
adecuadas**



**JUNTA
DEL PUERTO
Y RIA DE
AVILES**



a lo largo de las cuales se cumplen las ecuaciones características

$$d\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial t}\right) \pm \sqrt{c c_y} \cdot d\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial x}\right) = 0 \quad (15)$$

Suponiendo ahora que la profundidad es constante en un entorno del punto considerado de la frontera,

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} \pm \sqrt{c c_y} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} = \bar{r}_{1,2} \quad (16)$$

A continuación se supone que tanto Φ_s como $\bar{r}_{1,2}$ pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \Phi_s(x,t) &= \Phi(x) \exp(i\omega t) \\ \bar{r}_{1,2} &= r_{1,2} \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (17)$$

y, tras sustituir en (16) se llega a

$$\Phi \pm \frac{i\sqrt{c c_y}}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = r_{2,1} \quad (18)$$

los invariantes $r_{2,1}$ corresponden a ondas que viajan en sentidos opuestos. En el caso de que el punto considerado esté en el contorno, la onda incidente se caracteriza por

$$\Phi - \frac{i\sqrt{c c_y}}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = r_1 \quad (19)$$

Para ondas planas incidiendo sobre la frontera derecha del dominio de análisis $\Omega = [0, L]$, la onda incidente es

$$\Phi_i = A \exp(ikx) \quad (20)$$

donde k es el número de onda.

Suponiendo que se trate de una onda larga, r_1 viene dada por

$$\begin{aligned} r_1 &= A \exp(ikx) - \frac{ic}{\omega} \cdot (ik) \cdot A \exp(ikx) \\ r_1 &= 2A \exp(ikx) \end{aligned} \quad (21)$$

y la condición de contorno a aplicar, es, pues,

$$\Phi - \frac{ic}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 2A \exp(ikx) \quad (22)$$

En el caso de que en el extremo izquierdo la onda incidente se refleje, la solución al problema viene dada por

$$\Phi = A \exp(ikx) + A \exp(-ikx) \quad (23)$$

que cumple, tanto con la ecuación en derivadas parciales como con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0 & x &= 0 \\ (b) \quad \Phi - \frac{ic}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 2A \exp(ikx) & \text{en } x &= L \end{aligned} \quad (24)$$

Para generalizar estas condiciones a problemas bidimensionales, se supone que el campo de ondas consiste en trenes de ondas planas en las proximidades del punto del contorno considerado, y se aplica la condición (19) a lo largo de la dirección de incidencia, teniéndose

$$\Phi - \frac{i\sqrt{c c_y}}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = r_1 \quad (25)$$

siendo ξ la abscisa en la dirección de incidencia.

Si ahora se sustituye

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cos \beta \quad (26)$$

en (24), siendo β el ángulo entre la dirección normal y la de incidencia, se llega a

$$\Phi \cos \beta - \frac{i\sqrt{c c_y}}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = r_1 \cos \beta \quad (27)$$

que es la condición propuesta para problemas en dos dimensiones.

En el caso de contorno absorbente, el procedimiento a seguir es similar, y consiste en imponer la condición de que el invariante r de la onda que entra en el dominio es nulo, llegándose fácilmente a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{ik}{\sqrt{c/c_y}} \Phi = 0 \quad (28)$$

En el caso de absorción parcial, y denominando α al coeficiente de absorción, se llega a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{ik}{\sqrt{c/c_y}} \alpha \Phi = 0 \quad (29)$$

Debe llamarse la atención respecto de que estas dos ecuaciones son válidas únicamente para incidencia normal al contorno.

La discretización del problema expuesto se lleva a cabo mediante técnicas clásicas de Elementos Finitos [9], aproximando la solución $\Phi(x,y)$ mediante

$$\Phi = \sum N_j \phi_j \quad (30)$$

A continuación, se anula la suma de residuos

$$\int_{\Omega} N_i \cdot R_{\Omega} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{N}_i \cdot R_{\Gamma} \cdot d\Gamma = 0 \quad (31)$$

llegándose a una ecuación del tipo

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{R}) \cdot \hat{\Phi} = \mathbf{f} \quad (32)$$

donde los términos $\mathbf{R}$ y $\mathbf{f}$ son originados por las condiciones de onda incidente y absorción en el contorno.

El sistema resultante puede llegar, en ocasiones, a tener un gran número de grados de libertad, siendo conveniente resolverlo mediante métodos indirectos. En las referencias [5-7] y [10] se dan detalles de los problemas que se plantean así como de las posibles soluciones.

EJEMPLOS

ROMPEOLAS CIRCULAR

Esta prueba consiste en una planta ideal formada por una costa recta infinita donde, adyacente a ella, se emplace un rompeolas semicircular con dos aberturas, haciendo incidir sobre la región por él limitada una onda unidad paralela a la costa. La malla utilizada (figura 1) consta de 24 elementos y 79 nodos siendo la profundidad constante.

Este test, al ser usado en el modelo de elementos infinitos [1], exigía contemplar una región exterior como transición al ensamble de elementos infinitos, lo que implica mayor número de grados de libertad.

Los resultados, comparados con el estudio citado y con la solución analítica se exponen en la figura 2, donde se reproduce la respuesta en función de la longitud de onda relativa kr , que esta vez relaciona la longitud de onda y

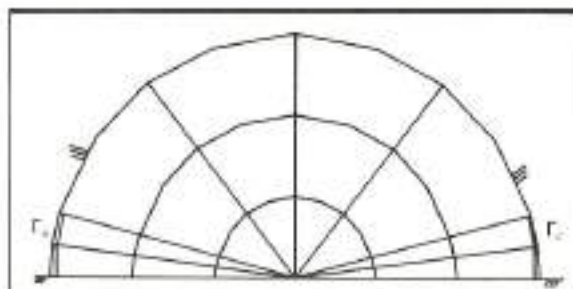


FIGURA 1. Rompeolas Circular. Γ_0 : Contorno exterior. Γ_1 : Contorno interior.

el radio de la planta semicircular. Por otra parte, la respuesta de la dársena es evaluada mediante:

$$\bar{\eta} = \frac{\int |\eta| dA}{\int dA}$$

siendo A el área total encerrada por el rompeolas. Luego, en la figura 2 se representa el cociente entre esta sobre-elevación «media» y la de la bocana orientada hacia la dirección de incidencia de la onda.

La coincidencia con los valores analíticos es buena, incluso en zonas alejadas del segundo pico, a pesar de la gruesa de la malla. La distribución de sobre-elevaciones también posee un buen ajuste, como puede verse en la figura 3 ($kr = 3.0$).

Por las características geométricas que presenta este ejemplo, la influencia que puede tener el optar por con-

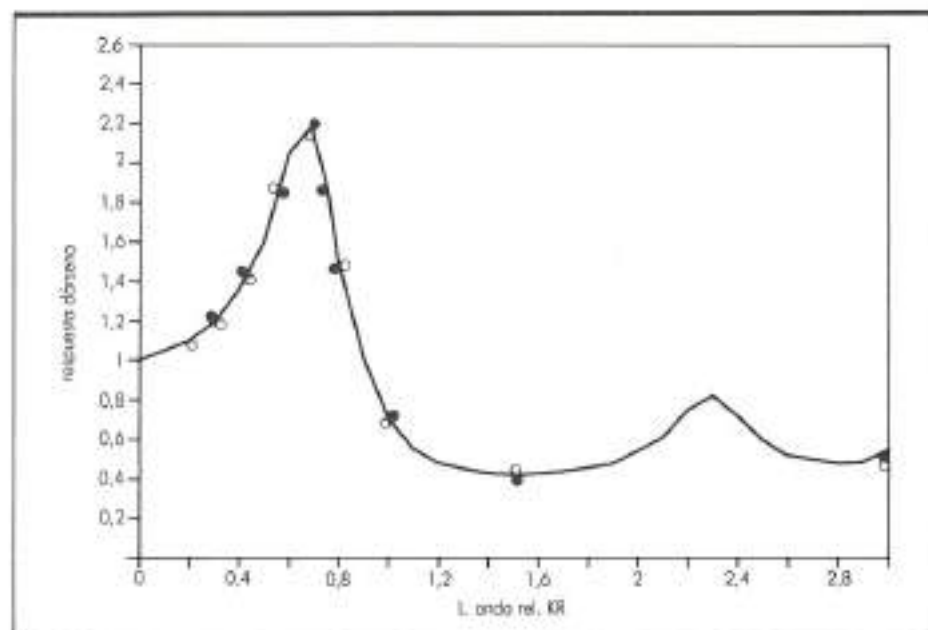


FIGURA 2. Rompeolas Circular. Respuesta. —: Solución Analítica. ○: Elementos infinitos. ●: Modelo actual.