

ONDAS LARGAS EN PUERTOS: ANÁLISIS NUMÉRICO

P. ORTIZ (*)
M. PASTOR (**)

RESUMEN. En este trabajo se estudia la aplicación de un modelo numérico, mediante el método de elementos finitos (MEF), de la ecuación aproximada de la onda para variaciones graduales de profundidad a problemas de ondas largas en puertos. El modelo incluye una nueva formulación de las condiciones de borde «mar afuera», presentada por los autores en un artículo previo (ver referencias). Además, se describen distintos aspectos prácticos del modelo y de la amplificación de ondas largas en puertos.

Finalmente, se analizan dos puertos de la Costa Cantábrica a fin de ilustrar la utilidad práctica del modelo.

ABSTRACT. *In this paper, the numerical solution by the finite element method (FEM) for the mild slope wave equation is applied to long wave problems in harbour. The new approach to the «open sea» boundary conditions, introduced by the authors in a previous paper (see references) is included and different practical aspects of the model and of the long waves amplification in harbours had been analysed.*

Finally, two cases of Cantabrian Sea harbours had been studied to show the practical application of the model.

INTRODUCCION

Para asegurar un correcto funcionamiento de los recintos portuarios es preciso conocer el efecto que las «excitaciones exteriores» provocan en ellos. En el caso de «ondas largas», consideradas como tales aquellas con períodos comprendidos entre 30 segundos y 5 minutos aproximadamente, estos efectos son, en muchas ocasiones, amplificaciones excesivas de movimientos horizontales [1].

Estos movimientos pueden provocar atrasos en las actividades portuarias, con las consiguientes pérdidas económicas y, a veces, accidentes por roturas de amarres y colisiones entre buques.

El fenómeno «resonante» se producirá cuando la respuesta del sistema, sometido a excitaciones como las citadas, presente una amplificación máxima. Este problema depende de la excitación exterior, de la geometría del recinto y de los mecanismos de disipación energética existentes.

El estudio de la propagación, refracción, difracción, reflexión y absorción simultáneas de ondas superficiales de gravedad posee soluciones analíticas en muy contados casos [3, 4, 5], por lo que es necesario recurrir a la modelización física [6] y numérica.

En el presente trabajo, enmarcado dentro de las técnicas numéricas de modelización, es empleada la formulación potencial [7] y, en particular, la aproximación lineal, mediante la discretización de la ecuación aproximada de ondas para variaciones graduales de profundidad [4].

Este proceso es efectuado mediante el método de elementos finitos, por las ventajas que otorga al tratar zonas acotadas de geometrías complejas.

El problema de amplificación de ondas largas está influido cuantitativamente por las diferentes pérdidas de energía, siendo la fundamental la disipación por radiación al exterior, definida matemáticamente en problemas armónicos mediante la condición de Sommerfeld [8].

La inclusión de este fenómeno en modelos numéricos ha sido tratada por diversos autores, proponiendo distintas soluciones de variada eficacia. Así, merecen citarse la aplicación de elementos infinitos [3], integrales de contorno [6], soluciones exteriores analíticas [9] y amortiguadores de distintos órdenes [10].

En este estudio se aplica la formulación presentada por los autores en un trabajo previo [11], basada en conceptos del método de las características extendidos al problema armónico, que permite englobar tanto la condición de radiación como la condición de bordes absorbentes de energía.

Al aplicar el modelo al caso de ondas largas, la condición propuesta implica dividir el dominio total en dos zonas: la primera, supuesta como «mar abierto», que no es incluida en el análisis, y la segunda que da lugar a la discretización.

Bajo la hipótesis de generación de ondas largas por

(*) División de Cálculo y Análisis Matemático del CEDEX (MOPU). Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.

(**) Jefe de la División de Cálculo y Análisis Matemático del CEDEX (MOPU). Profesor titular de Cálculo Numérico de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.

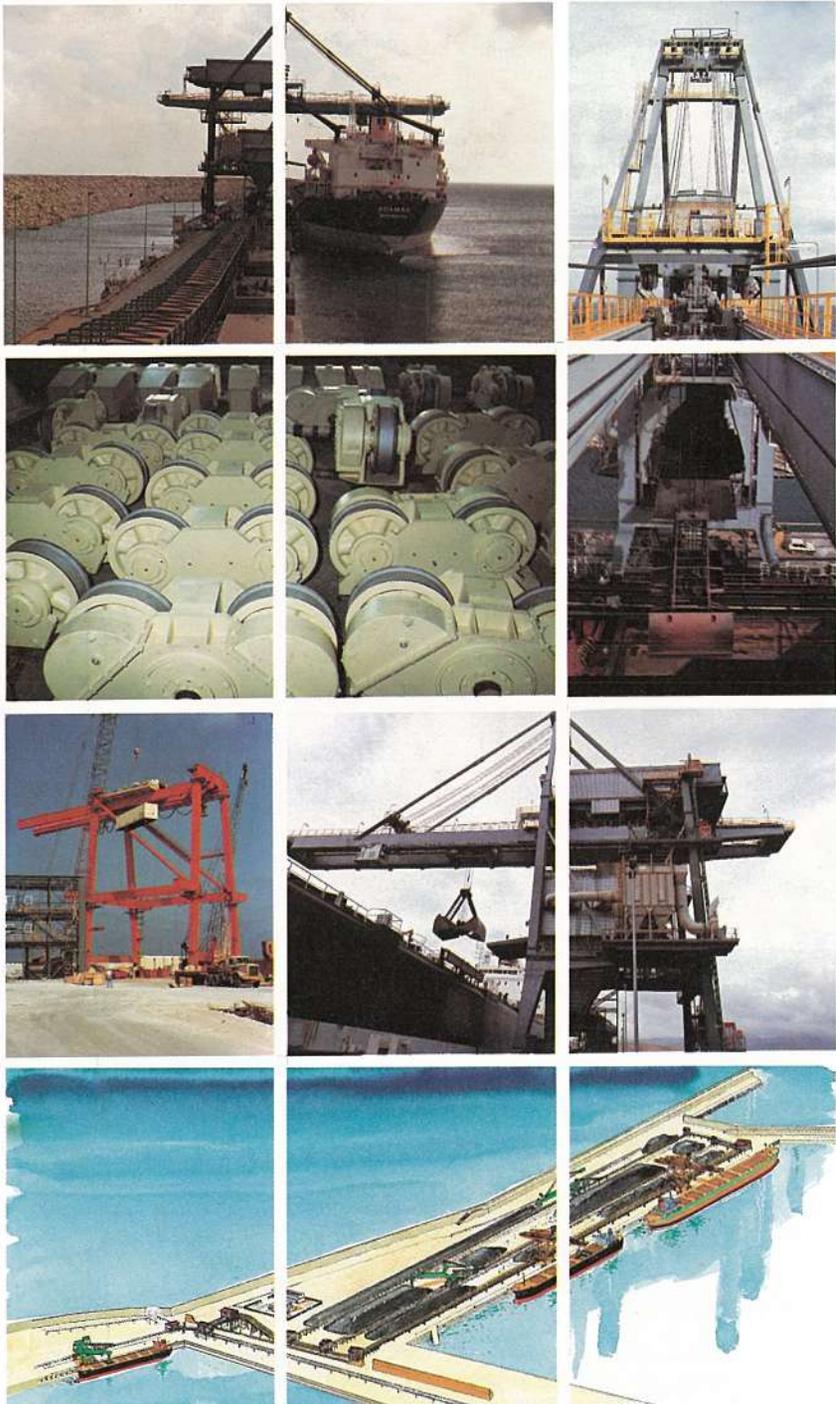


EQUIPAMIENTO DE PUERTOS

En equipamiento para puertos IMENOSA ofrece desde instalaciones completas y complejas como un puerto granelero a máquinas concretas como descargadoras de carbón o minerales.

Entre otros muchos equipos cabe destacar:

- Grúas descargadoras de mineral.
- Grúas para contenedores.
- Grúa de puerto.
- Instalaciones portuarias para descarga y almacenaje.
- Terminales de graneles.



INDUSTRIAS MECANICAS DEL NOROESTE, S.A.

GRUPO INI

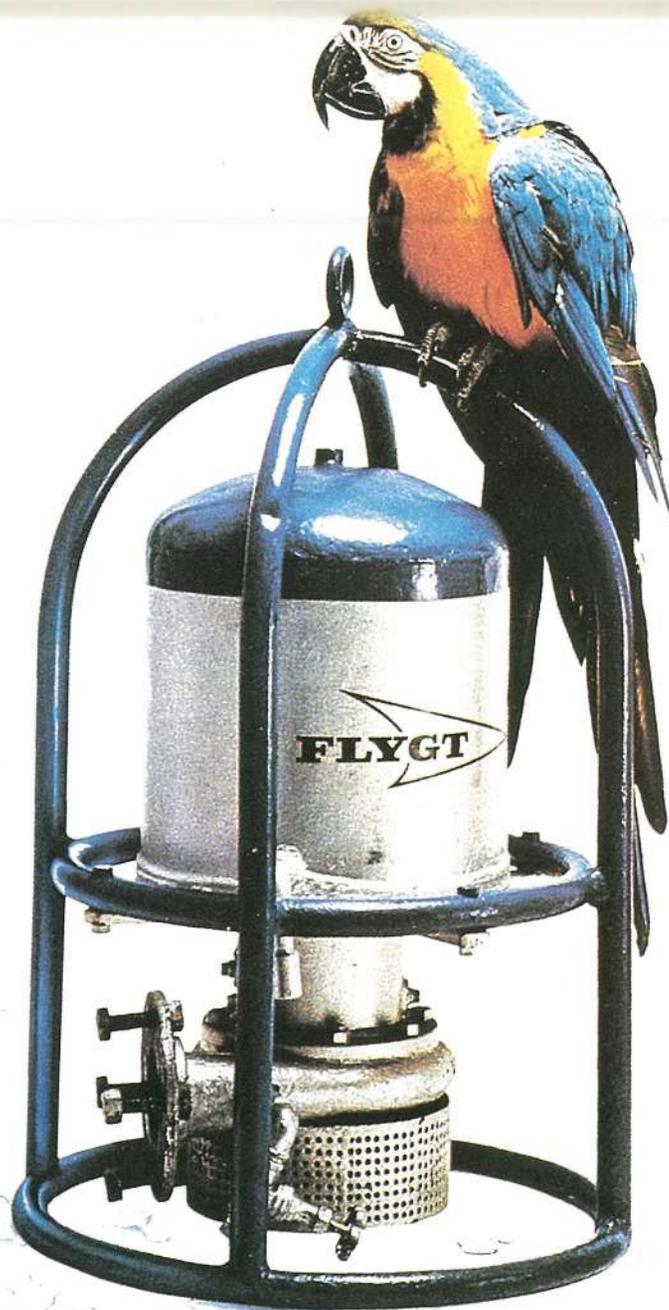
Apartado 397 - 15480 FERROL
Tel. (981) 34 30 11
Telex 85534 AIND-E
Telefax (981) 34 32 58

Zurbarán, 28 - 28010 MADRID
Tel. (91) 410 71 97
Telex 44749 IMENO-E
Telefax (91) 410 73 94

FLYGT

**25 años de
presencia
en España.**

**25 mil instalaciones
de bombeo, en perfecto
funcionamiento.**



* Esta es la primera bomba sumergible del mundo, inventada y fabricada por Flygt en la década de los 40 (y llamada familiarmente "la jaula del loro")...

RESIDUALES - OBRAS PUBLICAS - MINERIA - AGRICULTURA - ACHIQUES - FANGOS

**TECNICAS DE FILTRACION
Y BOMBEO, S.A.**

TFB

MADRID. Tel. (91) 233 35 08* — **BARCELONA.** Tel. (93) 232 47 61 — **BILBAO.** Tel. (94) 453 01 94

VALENCIA. Tel. (96) 154 63 15 — **SEVILLA.** Tel. (954) 67 30 00

CIUDAD REAL (926) 22 25 23 — **LA CORUÑA** (981) 23 78 49 — **HUESCA** (974) 22 59 16 — **LEON** (987) 25 23 75

MALAGA (952) 29 76 98 — **MURCIA** (968) 23 70 50 — **OVIEDO** (985) 24 39 43 — **P. DE MALLORCA** (971) 25 27 81 — **LAS PALMAS DE**

GRAN CANARIA (928) 31 36 17 — **SALAMANCA** (923) 21 58 54 — **SAN SEBASTIAN** (943) 37 07 86 **SANTANDER** (942) 34 76 49 —

VALLADOLID (983) 29 48 38 — **VIGO** (986) 27 15 07 — **ZARAGOZA** (976) 27 33 32

VENTA • ALQUILER • SERVICIO

transferencia de energía desde ondas de alta frecuencia (con un desarrollo suficiente), se supone, por lo tanto, que este proceso se produce en la primera región, considerada como de «generación» de ondas largas, mientras que en la segunda se admite que esta transferencia ha cesado o es despreciable.

Por otra parte, la discretización de la región interior depende de la longitud de onda «menor», pudiéndose verificar mediante experimentación numérica [7] que es necesario emplear un mínimo de 8 a 12 puntos por longitud de onda para aproximar la función solución con errores relativos menores a 0,1 %.

Esta condición es crítica en numerosos casos prácticos al generarse sistemas con elevado número de grados de libertad.

La resolución del sistema discreto puede efectuarse mediante métodos indirectos de solución, presentándose como muy competitivos en relación a los métodos directos tradicionales respecto a tiempos de ejecución siendo, en cambio, mucho más económicos en consumo de memoria central, lo que los hace especialmente aptos a sistemas con las condiciones antes comentadas.

La ecuación de ondas discreta lleva a matrices de coeficientes no definidas positivas siendo convergente en este caso, dentro de los métodos indirectos, el del Gradiente Conjugado Precondicionado (PCG), que posee además la ventaja de ser fácilmente vectorizable [12].

El PCG ha sido implementado en el presente modelo y utilizado en forma sistemática en todos los problemas estudiados, permitiendo su uso en equipos informáticos pequeños y en ordenadores personales.

A continuación se describe brevemente la teoría aplicada, para luego analizar el modelo numérico realizado y finalmente, los ejemplos prácticos, referidos a los puertos vascos de Ondárroa y Motrico.

TEORÍA DE ONDAS.

FORMULACION POTENCIAL

Las hipótesis que se admiten en la teoría adoptada se resumen en:

- Ondas de gravedad superficiales que se propagan en un medio homogéneo e isótropo.
- Fondo y bordes sólidos impermeables (excepto en contornos absorbentes).
- Fluido incomprensible y flujo no viscoso.
- Teoría lineal.
- Variaciones graduales de profundidad.
- Teoría Potencial (flujo irrotacional).
- Periodicidad de las variables.

Además se supone que la relación de dispersión y la solución al problema a profundidad constante tienen aún validez para variaciones graduales de profundidad, adoptándose los valores locales de k (número de onda) y h (profundidad). Puede, de esta forma, obtenerse, a partir de la condición de borde en el fondo impermeable y la condición de contorno a superficie libre linealizada, la ecuación de la onda [4]:

$$\nabla (c \cdot c_g \nabla \Phi) + \omega^2 \frac{c_g}{c} \Phi = 0 \quad (1)$$

donde Φ es la función potencial de velocidades, ω la frecuencia angular, c la celeridad de fase local, y c_g la velocidad de grupo.

Para el caso de profundidades reducidas, (1) se convierte en:

$$\nabla h \nabla \Phi + \frac{\omega^2}{g} \Phi = 0 \quad (2)$$

El problema es elíptico, por lo que deben especificarse condiciones de borde, las cuales son:

- Condición de Dirichlet: Cuando es conocido el valor de la sobreelevación, por ejemplo, por mediciones in situ.
- Condición de Cauchy: Pueden incluirse en este tipo las condiciones de reflexión perfecta, velocidades prescritas y absorción.

Además de las condiciones típicas citadas, debe tenerse en cuenta que parte del dominio es no definido o, a fines de su estudio, infinito. En esta zona debe imponerse la condición de que las ondas radiadas al exterior no retornen tendiendo a anularse cuando la distancia tiende a infinito, lo que supone una cantidad positiva de flujo de energía saliente en un período T .

La formulación propuesta por los autores [7, 11, 13], implementada en el presente modelo puede expresarse como:

$$-i \frac{\sqrt{n}}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} + \Phi \cos \beta = (n + 1) \Phi_I \cos \beta \text{ en } \Gamma_c \quad (3)$$

siendo, respectivamente, $n = c_g/c$, β el ángulo entre la dirección de incidencia y la normal al contorno (\hat{n}) y Φ_I el potencial de la onda incidente.

Esta condición se aplica en la porción de contorno Γ_c que «separa» la zona interior y exterior del recinto.

MODELO NUMÉRICO

La discretización, mediante la técnica de Boubnov-Galerkin, de la ecuación (1), junto con las condiciones de contorno lleva a la expresión final:

$$(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}) \cdot \Phi_j + R_{ij} \Phi_j = f_i \quad (4)$$

representando K_{ij} elementos de la matriz de rigidez y M_{ij} de la matriz de masa. R_{ij} contempla las condiciones de absorción y de contorno «cargado» (es decir, indirectamente, radiación), por lo que pueden concebirse como elementos de una matriz de «amortiguamiento».

El vector f_i adquiere el carácter de «cargas exteriores», donde están incluidos los términos en que interviene la onda incidente y el caudal unitario. Estas expresiones son, respectivamente

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &= \int \nabla N_i c c_g \nabla N_j d\Omega \\
 M_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{c_g}{c} N_i N_j d\Omega \\
 R_{ij} &= \int_{\Gamma_c} N_i N_j i \omega \sqrt{c c_g} \cdot \cos\beta \cdot d\Gamma - \\
 &\quad - \int_{\Gamma_a} N_i \sqrt{c c_g} i a \omega N_j d\Gamma \\
 f_i &= \int_{\Gamma_c} N_i \left(\frac{c_g}{c} + 1 \right) \omega \sqrt{c c_g} \cos\beta i \Phi_j d\Gamma + \\
 &\quad + \int_{\Gamma_q} N_i \cdot c c_g \bar{q} d\Gamma
 \end{aligned}$$

El programa desarrollado en base a los conceptos previos emplea elementos de ocho nodos (cuadriláteros), de la familia serendíptica y funciones de forma de continuidad C^0 . Se ha optado por 16 puntos de integración por elemento y 4 en el caso de integrales curvilíneas.

La solución del sistema lineal de ecuaciones, realizada mediante el método del gradiente conjugado, se presenta más desfavorable en tiempos de ejecución cuanto peor condicionada es la matriz de coeficientes, lo que ocurre cuanto más alta es la frecuencia de excitación.

Este inconveniente es mejorado mediante las técnicas de preconditionamiento, dependiendo esta vez de la velocidad de convergencia de la «matriz de preconditionamiento» elegida. El algoritmo así se convierte en el método del gradiente conjugado preconditionado (PCG) cuyo esquema básico es, para el sistema representado por:

$$A \cdot \Phi = f \quad (5)$$

el siguiente [7]:

- Inicialización
 - $r_0 = f - A\Phi_0$
 - $s_0 = C^{-1} r$
 - $p_0 = s_0$
- Iteración (k)
 - $a_{k+1} = r_k^T s_k / p_k^T A p_k$
 - $\Phi_{k+1} = \Phi_k + a_{k+1} \cdot p_k$
 - Control convergencia
 - $r_{k+1} = r_k - a_{k+1} A p_k$
 - $s_{k+1} = c^{-1} r_{k+1}$
 - $c = r_{k+1}^T s_{k+1} / r_k^T \cdot s_k$
 - $p_{k+1} = s_{k+1} + C \cdot p_k$

Siendo: A : matriz de coeficientes; r : vector residuos; f : vector «cargas»; Φ : vector incógnitas; a y c : escalares; s, p : vectores auxiliares, y C : matriz de preconditionado.

De las expresiones (6) y (7) se observa que la inversión de C debe ser expeditiva. La elección más simple y

eficiente, adoptada en este trabajo, es la variante Jacobi (JCG):

$$C = \text{diag}(A)$$

Por otra parte, en (6) y (7) se evidencia la economía de los métodos indirectos: la operación de ensamble MEF se efectúa en el producto $A \cdot \Phi_0$ y $A \cdot p_k$, evitando el almacenamiento de A .

Las estrategias posibles son:

1. Almacenar A ensamblada, efectuando $A \cdot p_k$, en cada iteración.
2. Almacenar las matrices elementales sin ensamblar, A^e , y efectuar:

$$\sum_{e=1}^E A^e \cdot p_k \quad (e = \text{núm. de elemento})$$

en cada iteración (E = número total de elementos) y

3. Calcular A^e en cada iteración y efectuar el producto de la misma forma que en la opción 2.

La primera alternativa es la de menor tiempo de ejecución y máxima memoria o entrada-salida, poseyendo escasas ventajas respecto a un método directo. La segunda alternativa es intermedia y la tercera es la de menor almacenamiento y mayor tiempo de proceso.

Como resultado de experimentación numérica, pueden compararse los órdenes del número de coeficientes necesarios de almacenamiento en cada caso (sin contar con los datos topológicos), siendo N el número de grados de libertad:

Caso 1: $N\sqrt{N}$

Caso 2: $10N$

Caso 3: 0

Estos órdenes se obtienen suponiendo que en el caso 1 ha sido optimizada la numeración, mientras que en el segundo se adopta una relación número de nodos/número de elementos de 3,5 (media de todos los casos estudiados), siendo conservada sólo la matriz triangular superior.

Además, se ha comprobado que para casos con grados de libertad entre 80 y 600, se obtienen tiempos de proceso de alrededor de 7 veces mayores en el caso 3 respecto al caso 2, lo que demuestra que, salvo en problemas críticos de capacidad, la opción práctica es la segunda.

El modelo numérico así resuelto proporciona como solución sobreelevaciones y función potencial en nodos, así como agitaciones medias en el área y velocidades y movimientos en puntos de integración.

La excitación exterior es impuesta especificando el contorno en «mar abierto», Γ_c , la frecuencia angular de la onda incidente, su dirección y su amplitud máxima.

APLICACIONES

El estudio genérico de un problema de amplificación puede efectuarse, con las técnicas analizadas en este

trabajo, siguiendo una metodología que depende, en cada caso, del detalle necesario en las predicciones deseadas.

En forma previa a la aplicación del modelo descrito, es posible realizar una primera aproximación, obteniendo las frecuencias propias principales del sistema no amortiguado.

Mediante este recurso, se pueden detectar las zonas en que se presentarán, para el espectro de frecuencias a estudiar, las máximas amplitudes de movimientos horizontales y verticales [1]. En el primer caso permite decidir emplazamientos para medidores de ondas largas, mientras que en el segundo indica sectores de atraque desfavorables.

Los modos propios pueden calcularse resolviendo la ecuación de autovalores generalizada, es decir, la expresión (5) siendo:

$$A = K - \omega^2 M$$

optándose en general por evaluar sólo las frecuencias más bajas.

La influencia del «mar abierto» a través de la bocana indica que en el modelo simple no amortiguado se presentan dos opciones: adoptar reflexión perfecta en la bocana (o máxima elevación vertical), lo que equivale a calcular los períodos propios de un cuerpo cerrado de agua, o suponer amplitud vertical nula prescribiendo los valores nodales en la bocana y, por tanto, suponiendo una línea nodal en ella.

Aunque en la realidad lo que ocurre es una situación intermedia, la hipótesis simplificativa que se presenta como más razonable es la segunda [14], lo que es confirmado al compararse con modelo físico [2].

Una forma alternativa de obtener la frecuencia propia fundamental de un recinto de agua semicerrado es mediante la utilización de la ecuación lineal de ondas largas.

Si el sistema es excitado mediante una función armónica, imponiendo condiciones iniciales nulas, en la respuesta aparecerán oscilaciones espúreas, mostrando un máximo de energía en la frecuencia propia del sistema [13].

Si la respuesta es tratada mediante una transformada discreta de Fourier, se obtiene el contenido en frecuencias surgiendo el pico citado en la frecuencia propia, además del correspondiente a la frecuencia de excitación, teniendo resuelto el problema pero con el inconveniente de no disponer de modos de oscilación de frecuencias más altas.

La parte final de un estudio es la aplicación del modelo disipativo, que permite evaluar respuestas cuantitativamente más acordes con la realidad.

En este estudio, los ejemplos prácticos que a continuación se describen se refieren en forma directa a esta última fase del estudio, obviando los pasos aproximados previos.

Los ejemplos que se incluyen son los de dos puertos

pesqueros de la costa vasca: Motrico y Ondárroa, cuyo comportamiento fue analizado junto con el de puertos de dimensiones mayores [7].

El interés de estos pequeños puertos reside en su respuesta totalmente opuesta frente a una excitación similar.

Los puertos de bajura del Mar Cantábrico, tales como los nombrados, poseen en algunos casos características geométricas que ocasionan problemas resonantes ante las excitaciones de períodos cercanos a 4 minutos.

Los primeros estudios sistemáticos de estos fenómenos se deben a Iribarren [15], cuya explicación intuitiva del fenómeno es validada por el modelo numérico.

El puerto de Motrico es el que presentaba el efecto resonante en forma más pronunciada, pues era suficiente cualquier marejada exterior para que la agitación interior fuese elevada. Así, en la figura 1, se representan las líneas de igual elevación para una excitación unidad en la situación resonante (245 seg.). Puede observarse el elevado gradiente en la zona de fondeo, indicada con A. En el modelo reducido [15] se define el factor de amplificación como el cociente entre velocidades en A y en la zona exterior, obteniéndose una curva de amplificación (figura 2) poco pronunciada. Esto puede deberse a la «ambigua» definición del coeficiente de amplificación, al ser las velocidades exteriores elegidas poco representativas de la excitación. Con el presente modelo se ha optado por definir el factor comparando sobreelevaciones en el extremo de la dársena interior con amplitud de excitación, otorgando la respuesta un pico más definido. En la figura puede observarse que la coincidencia de los picos entre modelo físico y numérico es buena.

Para el modelo se empleó una malla de 345 nodos y 92 elementos, habiéndose incluido una zona exterior B (figura 1) relativamente pequeña.

Los problemas fueron parcialmente resueltos eliminando la zona C (figura 1) y dragando, o sea, modificando la geometría general del recinto.

A pocos kilómetros al oeste de Motrico se encuentra Ondárroa, cuyo puerto consta de un antepuerto y una segunda dársena conectados por una bocana interior.

Los problemas del puerto de Motrico exigían en muchas ocasiones que los pesqueros allí fondeados tuviesen que trasladarse a Ondárroa, con las consiguientes pérdidas económicas y de capacidad de ambos puertos [15]. Pero ¿qué razón producía la calma en el puerto vecino al de Motrico cuando éste era impracticable para las actividades de los pesqueros? La contestación a esta situación surge de la curva de respuestas de Ondárroa (figura 3): para la banda crítica de 230 a 250 seg. (0,027 a 0,025 rad/seg de frecuencia angular) la amplificación es mínima, hecho detectado visualmente por los pescadores.

En la figura 3 se representa el barrido en frecuencias realizado para el intervalo 170-600 s. El factor de amplificación ha sido calculado por el cociente entre sobreelevaciones en el nodo de control P (figura 4), donde

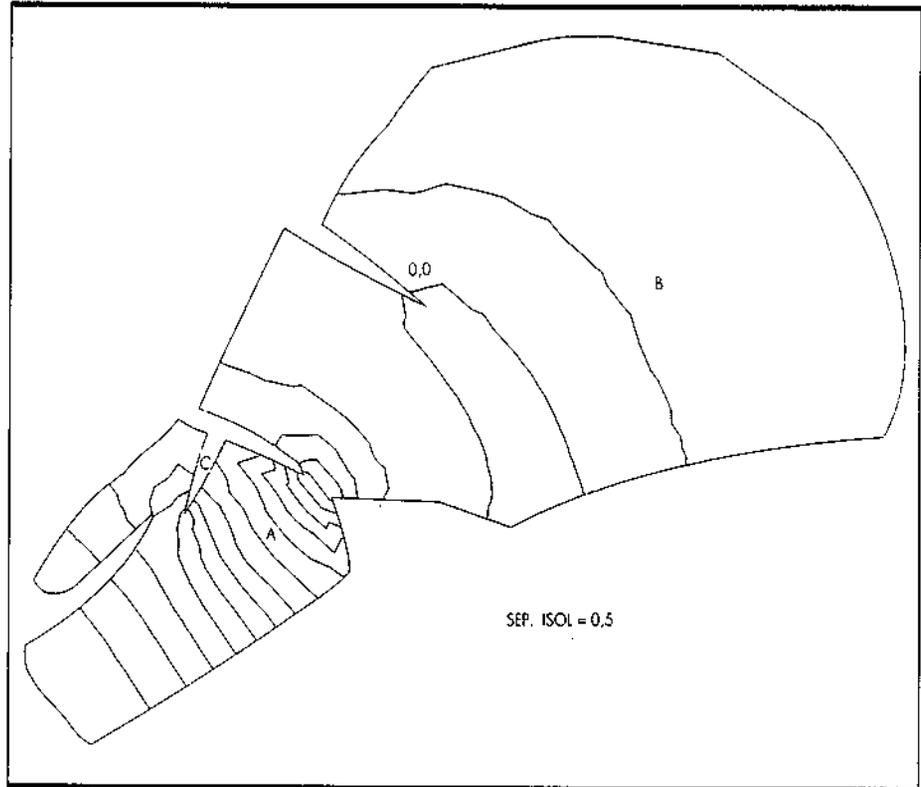


FIGURA 1. Puerto de Motrico. Líneas de igual elevación. $T = 245$ s.
A: Zona de fondeo; B: Zona exterior; C: Zona eliminada.

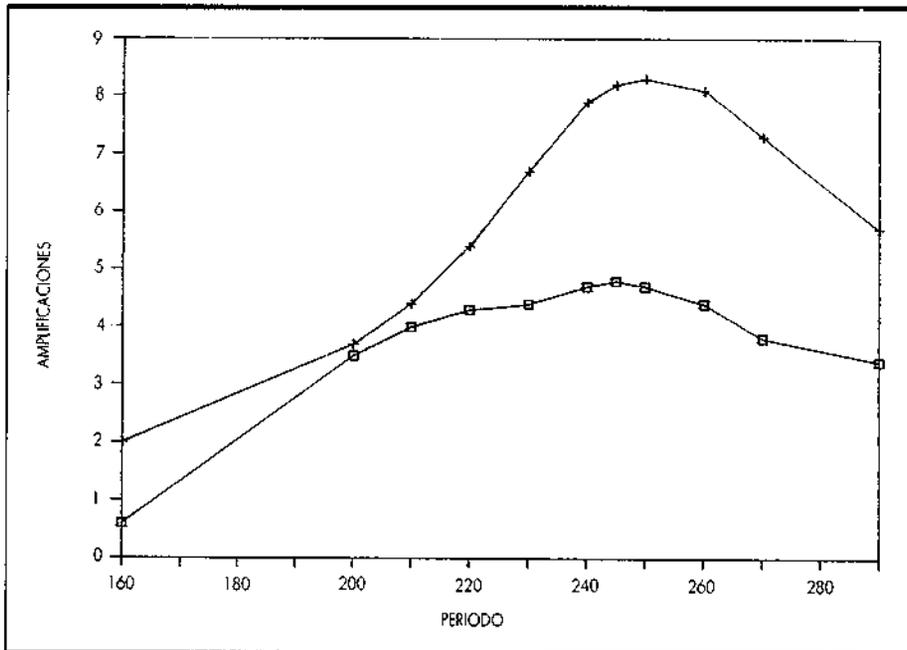


FIGURA 2. Puerto de Motrico. Factores de amplificación.
□ : Amplificación de velocidades [15].
+ : Modelo numérico (elevaciones).

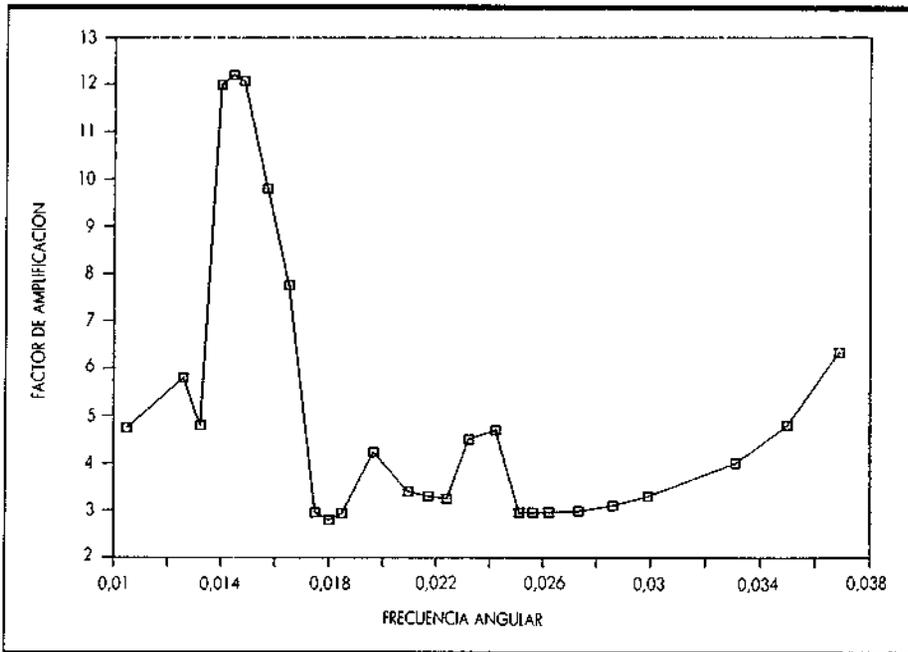


FIGURA 3. Puerto de Ondárroa. Curva de respuesta.

se producen máximas elevaciones para los dos primeros picos resonantes y la onda incidente unidad exterior. En la misma figura se representan las líneas de igual elevación para $T = 245$ seg, donde pueden observarse las condiciones favorables del puerto para esta frecuencia.

Para realizar el estudio se construyó una malla de 509 nodos y 142 elementos, contemplando en la discretización la zona exterior de playas (zona A en la figu-

ra 4) con contornos reflejantes a onda larga, dado que la absorción a éstas es muy baja.

CONCLUSIONES

El modelo numérico descrito se presenta como un serio competidor a los de similar potencia, en particular por su economía y eficiencia en relación al equipamiento informático requerido.

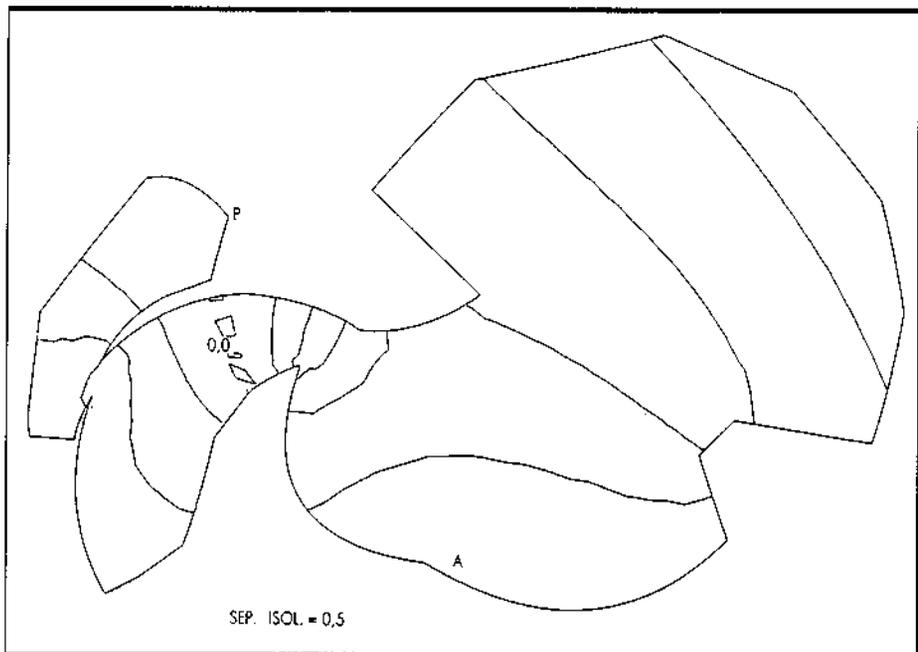


FIGURA 4. Puerto de Ondárroa. Líneas de igual elevación. $T = 245$ s; A: zona exterior de playas.

Su aplicación en casos prácticos, así como en casos teóricos de control [7] permite además demostrar resultados cuantitativamente acordes a la realidad, siendo, por lo tanto, una efectiva opción al uso de la modelización física en el estudio del fenómeno de propagación de ondas largas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a M. D. Azcárraga su ayuda, tanto en el proceso de textos como en numerosos y tediosos trabajos informáticos.

REFERENCIAS

- [1] PASTOR M., y ORTIZ, P. (1986). «Agitación y Ondas Largas en recintos portuarios». *II Simposium sobre aplicaciones del Método de Elementos Finitos en Ingeniería*. Barcelona, junio.
- [2] PASTOR, M.; ORTIZ, P., y GOMEZ, P. G. (1985). «Fenómenos de Resonancia en puertos españoles: Análisis numérico». *I Congreso Iberoamericano de Métodos Computacionales en Ingeniería*, vol. II, Madrid.
- [3] BETTES, P., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1977). «Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements». *Int. J. for Num. Meth. in Engineering*, vol. 11, pp. 1271-1290.
- [4] BERKHOFF, J. C. W. (1976). «Mathematical models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction». *D.H.L.*, publ. 163.
- [5] UNLUATA, V., y MEL, C. C. (1975). «Effects of entrance loss on harbor oscillations». *J. of Waterways, Harbors and Coastal Eng.*, ASCE, vol. 101, WW 2, may.
- [6] IRIBARREN, R.; OLANO, C. N., y FERNANDEZ, P. F. (1958). «Onda de resaca en los puertos. Ensayos de resonancia en modelos reducidos». *Revista de Obras Públicas*. Abril, Madrid.
- [7] ORTIZ, P. (1989). «Métodos numéricos en propagación de ondas superficiales. Teoría del Potencial». Tesis Doctoral. U. P. M.
- [8] COURANT, R., y HILBERT, D. (1953). «Methods of Mathematical Physics». *Interscience P.*, New York, vol. I y II.
- [9] MEL, C. C. (1983). «The applied dynamics of surface waves». *J. Wiley*.
- [10] BANDO, K.; BETTES, P., y EMSON, C. (1984). «The effectiveness of dampers for the analysis of exterior scalar wave diffraction by cylinders and ellipsoids». *I.J.N.M. in Fluids*, vol. 4, 599-617.
- [11] ORTIZ, P.; PASTOR, M., y PERAIRE, J. (1989). «Una aproximación a las condiciones de contorno exteriores en propagación de ondas». *Ingeniería Civil/69*.
- [12] PASTOR, M.; ORTIZ, P., y SANTAMARIA, J. (1986). «Iterative solvers for wave problems». *II International conference on Hydraulic Engineering Software*. Southampton UUK. Springer-Verlag.
- [13] PASTOR, M.; ORTIZ, P., y PERAIRE, J. (1987). «Long wave problems in harbours, numerical techniques and boundary conditions». In *Numerical Methods in Engineering. Theory and Applications*. Ed. by O. C. Zienkiewicz et al., Pineridge Press.
- [14] WILSON, B. (1972). «Seiches». *Advanced in Hydrosience*, vol. 8, pp. 1-94.
- [15] IRIBARREN, R. (1962). «Enseñanzas adquiridas en los Puertos del Grupo de Guipúzcoa. Puerto de Motrico». *Revista de Obras Públicas*.