ONDAS INTERNAS LARGAS PLANAS EN UN FLUJO CON DOS ESTRATOS UNIFORMES

CRISTOBAL MATEOS IGUACEL (*)

RESUMEN. En el presente trabajo se analiza el flujo de dos estratos uniformes indefinidos desde el punto de vista de las ondas internas planas. Se obtiene: la condición necesaria para que el flujo sea estable, la celeridad de esas ondas para cualquier dirección y una condición necesaria y suficiente para que haya ondas estacionarias en alguna dirección, así como un método para determinar ésta.

ABSTRACT. *This work analyzes the flow of two undefined and uniform strata, from the point of view of the internal plane waves. The following is obtained: the condition required for the flow to be stable, the celerity of those waves for any direction and a condition which is necessary and sufficient for there to be stationary waves in one direction plus a method for determining this.*

INTRODUCCION

En los fluidos estratificados en dos capas de distinta densidad pueden aparecer ondas internas (o interfaciales) que a diferencia de otras ondas se caracterizan porque la amplitud de los movimientos en la interfaz es superior a la que se presenta en el resto del fluido. La estimación de la celeridad de estas ondas, en el caso de que el flujo pueda ser considerado como monodimensional, ha sido estudiado hace mucho tiempo en el caso de las ondas largas. Se pretende aquí estudiar las ondas planas análogas para dos estratos uniformes indefinidos con velocidades diferentes en magnitud y dirección. Se obtendrán la condición de estabilidad del flujo, las condiciones para la existencia de onda con celeridad nula y su orientación y se obtendrá también la rosa de celeridades haciendo patente su anisotropía esencial.

1. LA ECUACION DE ONDAS

Considérense dos estratos indefinidos de fluidos perfectos de espesores uniformes h_1 el superior y h_2 el inferior y con densidades respectivas d_1 y d_2. A la diferencia relativa $(d_2 - d_1)/d_2$ se le denotará por $\triangle d$ y en un primer momento se supondrá que los dos estratos están animados de velocidades u_1 y u_2, posiblemente distintas, pero en la misma dirección.

En estas condiciones del flujo es aplicable un análisis monodimensional a las ondas planas que se desplacen según la dirección de u_1 y u_2. Admitiendo que $\triangle d$ sea lo suficientemente pequeño como para que se puedan despreciar los términos de segundo orden, se obtiene la conocida ecuación para la celeridad de ondas largas:

$$\frac{(u_2 - c)^2}{g\, h_1} + \frac{(u_2 - c)^2}{g\, h_2} = \triangle d \qquad (1)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad y c la celeridad de las ondas que en principio puede tomar dos valores.

Si ahora se pretende estudiar una situación más general se puede suponer que las velocidades V_1 y V_2 de los estratos tengan direcciones distintas formando un ángulo Φ.

Si se considera una onda plana que avance formando un ángulo α con la corriente del estrato superior a una velocidad c desconocida (figura 1), es oportuno proyectar las fuerzas actuantes según la dirección de avance de onda y según la dirección *MM* de un frente, ambas obviamente perpendiculares.

Al proyectar según la dirección *MM* se advierte que como la interfaz es una superficie reglada con generatrices paralelas a *MM*, resulta en todo punto que la normal a la interfaz es perpendicular a *MM* y, por tanto, las fuerzas de presión (que son las únicas presentes en fluidos perfectos) que aplica un fluido al otro a través de la interfaz tienen proyección nula según *MM*; es decir, según esta dirección no hay intercambio de cantidad de movimiento entre los estratos y éstos mantienen sus respectivas componentes de la velocidad en esa dirección.

A sensu contrario las fuerzas con que actúan cada estrato sobre el otro se aplicarán a modificar exclusivamente la componente de las velocidades según la dirección de c.

En conclusión, para c será de aplicación la ecuación

(*) Catedrático E.T.S.I. Caminos, Director del Laboratorio de Hidráulica del C.E.H. (CEDEX).

SOMAVI ESPAÑOLA, S.A.

SEÑALIZACION HORIZONTAL Y VERTICAL

PARIS, 45-47
TEL. (93) 322 29 54*
FAX 410 66 80
08029 BARCELONA

EMPRESA LIDER EN ESPAÑA EN SEÑALIZACION Y BALIZAMIENTO DE LA RED VIARIA

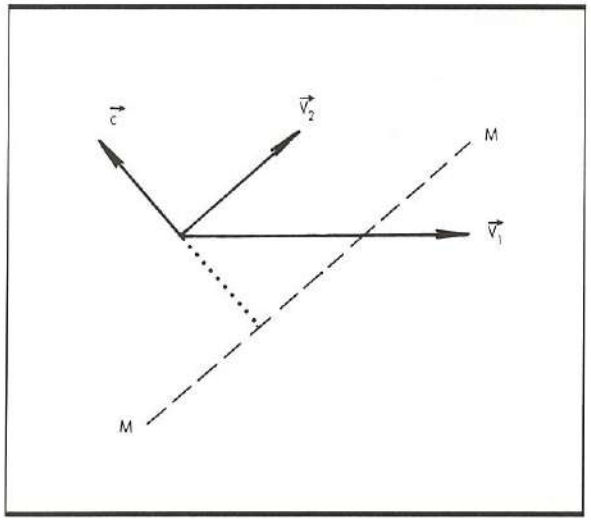

FIGURA 1.

(1) cuando en ella se sustituyan u_1 y u_2 por las citadas proyecciones, teniéndose:

$$\frac{(V_1 \cos\alpha - c)^2}{g\,h_1} + \frac{(V_2 \cos(\Phi - \alpha) - c)^2}{g\,h_2} = \triangle d \qquad (2)$$

Poniendo $1/gh_1 = r_1$ y $1/gh_2 = r_2$ y operando queda la ecuación de segundo grado en c:

$$(r_1 + r_2)\,c^2 - 2\,(r_1\,V_1 \cos\alpha + r_2\,V_2 \cos(\Phi - \alpha))\,c +$$

$$+ r_1\,V_1^2 \cos^2\alpha + r_2\,V_2^2 \cos^2(\Phi - \alpha) - \triangle d = 0 \qquad (3)$$

Para que esta ecuación tenga solución es preciso que no sea negativo el discriminante, por lo que operando se concluye que debe de ser:

$$\triangle d\,(r_1 + r_2) - r_1 r_2 (V_1 \cos\alpha - V_2 \cos(\Phi - \alpha))^2 \geq 0 \qquad (4)$$

Que puede ponerse en la forma:

$$|\,V_1 \cos\alpha - V_2 \cos(\Phi - \alpha)\,| \leq \sqrt{g \triangle d\,(h_1 + h_2)} \qquad (5)$$

Si esta relación no se cumpliera para algún valor de α, las ondas en la dirección correspondiente serían inestables y por tanto lo sería el flujo. Dicho de otra manera, para que el flujo sea estable es necesario que se cumpla la relación (5) para todos los valores de α.

El miembro de la derecha en (5) es fijo y el de la izquierda es igual a la longitud de la proyección de $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ sobre c. Esta proyección será máxima cuando la dirección de $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ coincide con la de c. Por tanto, la condición de estabilidad es:

$$|\vec{V}_1 - \vec{V}_2| \leq \sqrt{g \triangle d\,(h_1 + h_2)} \qquad (6)$$

que es una generalización de la condición de Helmholtz.

Otro punto de interés es la determinación de las condiciones necesarias para que pueda haber ondas inmóviles y en su caso las direcciones a las que corresponden esas celeridades de ondas nulas, direcciones que se conocerán como direcciones críticas.

La celeridad de onda será nula si se anula el término independiente de (3), es decir, hace falta que:

$$r_1\,V_1^2 \cos^2\alpha + r_2\,V_2^2 \cos^2(\Phi - \alpha) - \triangle d = 0 \qquad (7)$$

Si definimos los números de Froude densimétricos de cada estrato por las expresiones:

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g \cdot \triangle d \cdot h_1}} \qquad F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g \cdot \triangle d \cdot h_2}} \qquad (8)$$

La condición (7) puede ponerse como:

$$F_1^2 \cos^2\alpha + F_2^2 \cos^2(\Phi - \alpha) - 1 = 0$$

que se puede pasar a:

$$F_1^2\,(1 + \cos 2\alpha) + F_2^2\,(1 + \cos 2(\Phi - \alpha)) - 2 = 0$$

y por tanto a:

$$(F_1^2 + F_2^2 \cos 2\Phi)\cos 2\alpha + F_2^2 \operatorname{sen} 2\Phi \operatorname{sen} 2\alpha + F_1^2 + F_2^2 - 2 = 0$$

esta expresión puede ponerse como:

$$\sqrt{F_1^4 + F_2^4 + 2\,F_1^2 F_2^2 \cos 2\,\Phi} \cdot \cos(2\alpha - \tau)$$
$$+ F_1^2 + F_2^2 - 2 = 0 \qquad (9)$$

Donde τ representa un corrimiento de fase que viene dado por:

$$\cos\tau = \frac{F_1^2 + F_2^2 \cos 2\,\Phi}{\sqrt{F_1^4 + F_2^4 + 2\,F_1^2 F_2^2 \cos 2\,\Phi}} \qquad (10)$$

Para que exista $\cos(2\alpha - \tau)$ es necesario en (9) que se cumpla:

$$\sqrt{F_1^4 + F_2^4 + 2\,F_1^2 F_2^2 \cos^2\Phi} \geq F_1^2 + F_2^2 - 2$$

que equivale a:

$$F_1^2 + F_2^2 - F_1^2 F_2^2 \operatorname{sen}^2\Phi - 1 \geq 0 \qquad (11)$$

que es, en definitiva, la condición para la existencia de ondas estacionarias.

Si existen las ondas estacionarias su dirección se determina fácilmente, pues (9) da $2\alpha - \tau$ y (10) da τ, con lo que α es inmediato.

Finalmente, cabe señalar que la cuártica (3), que da la celeridad de onda en cada dirección, se puede convertir en una cónica si se emplea en lugar de c su inversa K, que puede interpretarse como tiempo empleado en recorrer la unidad de longitud, ya que con este cambio (3) queda en la forma:

$$r_1 + r_2 - 2\,(r_1\,V_1\cos a + r_2\,V_2\cos(\Phi - a))\,K +$$

$$+ (r_1\,V_1^2\cos^2 a + r_2\,V_2^2\cos^2(\Phi - a) - \triangle d)\,K^2 = 0 \qquad (12)$$

Si se toman unos ejes cartesianos con las direcciones de V_1 y V_2, resulta que $K\cos a$ y $K\cos(\Phi - a)$ son las coordenadas covariantes K_1 y K_2 respecto de estos ejes, con lo que (12) pasa a poder ponerse como:

$$r_1 + r_2 - 2r_1\,V_1\,K_1 - 2r_2\,V_2\,K_2 + 2r_1\,V_1^2\,K_1^2 + 2r_2\,V_2^2\,K_2^2 -$$

$$- (\triangle d/\mathrm{sen}^2\Phi)\,(K_1^2 + K_2^2 - 2K_1\,K_2\cos\Phi) = 0$$

o más explícitamente:

$$(r_1\,V_1^2\,\mathrm{sen}^2\Phi - \triangle d)\,K_1^2 + (r_2\,V_2^2\,\mathrm{sen}^2\Phi - \triangle d)\,K_2^2 +$$

$$+ 2\,\triangle d\cos\Phi\,K_1\,K_2 - 2r_1\,V_1\,\mathrm{sen}^2\Phi\,K_1 -$$

$$- 2r_2\,V_2\,\mathrm{sen}^2\Phi\,K_2 + (r_1 + r_2)\,\mathrm{sen}^2\Phi = 0 \qquad (13)$$

Ecuación que corresponde a una cónica pero que, en general, al no tratarse de una circunferencia muestra que ni aun descontando un arrastre se puede considerar al medio como isótropo a los efectos de propagación de ondas.

CONCLUSIONES

Se analizan en este trabajo las ondas interfaciales largas entre dos estratos de espesor uniforme que se mueven con velocidades constantes, y se obtiene:

A. La condición (6) de estabilidad del flujo.
B. La condición (11) para que puedan existir ondas estacionarias y la determinación de su orientación con las ecuaciones (9) y (10) (caso de existir).
C. La ecuación (3) que da la celeridad de onda en función de su orientación, demostrándose que hay una anisotropía que no queda compensada por un observador móvil.
D. Que la ecuación (13) para la inversa de la velocidad de onda es una cónica.

NOTACION

$\vec{c}$ celeridad de una onda interna.

c módulo de $\vec{c}$.

d_1, d_2 densidades de los estratos superior e inferior.

$F_1 = \dfrac{V_1}{\sqrt{g\,\triangle d h_1}}$; $F_2 = \dfrac{V_2}{\sqrt{g\,\triangle d h_2}}$; números de Froude densimétricos de los dos estratos.

g aceleración de la gravedad.

h_1, h_2 espesor de los estratos superior e inferior.

$\vec{K} = \dfrac{\vec{c}}{c^2}$ inversa orientada de la celeridad de onda.

K módulo de $\vec{K}$.

K_1, K_2 coordenadas covariantes de $\vec{K}$.

$r_1 = \dfrac{1}{g h_1}$; $r_2 = \dfrac{1}{g h_2}$

u_1, u_2 velocidades de los estratos superior e inferior cuando llevan la misma dirección.

$\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ velocidades de los estratos superior e inferior.

V_1, V_2 módulos de $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$.

$\triangle d = \dfrac{d_2 - d_1}{d_2}$ diferencia relativa de densidades.

a ángulo entre la celeridad de onda y la velocidad del estrato superior.

Φ ángulo entre las dos corrientes.

τ corrimiento de fase.

BIBLIOGRAFIA

ARMI, L. (1975). «The hydraulics of two Flowing Layers with Different Densities». Tesis doctoral. Berkeley.
CAÑIZO, L. (1984). «Estudio de Canales con dos corrientes superpuestas». Revista de Obras Públicas, junio.
GREENHILL (1887). «Wave Motion in Hydrodinamics». American Journal Math., IX.
C. MATEOS (1988). «Clasificación de flujos bicapa». Workshop of Physical Oceanography in the Strait of Gibraltar. Madrid.
YIH, C. S. «Dynamics of Nonhomogeneus Fluids». Editorial MacMillan.