

COMPORTAMIENTO ESTÁTICO Y DINÁMICO DE SUELOS: UN ENFOQUE RACIONAL DE LAS SOLUCIONES CUANTITATIVAS

I. Suelos Saturados

Olgierd C. ZIENKIEWICZ (*)
F. R. S., Andrew H. C. CHAN (**)
Manuel PASTOR (***)
D. K. PAUL (****)
Tadahiko SHIOMI (*****)

RESUMEN. El comportamiento de todos los geomateriales y en particular de los suelos se rige por su interacción con el fluido intersticial. El modelo mecánico combinado con una descripción constitutiva adecuada de la fase sólida y con métodos de cálculo discretos y eficientes permite resolver la mayor parte de los problemas dinámicos y estáticos que incluyan deformaciones. Este artículo describe los procedimientos básicos y el desarrollo de un programa de ordenador de tipo general (SWANDYNE-X). Los resultados de los cálculos han sido comprobados mediante la comparación con resultados experimentales obtenidos con modelos físicos ensayados en la máquina centrífuga de Cambridge.

ABSTRACT. *The behaviour of all geomaterials, and in particular of soils, is governed by their interaction with the pore fluid. The mechanical model of this interaction when combined with suitable constitutive description of the solid phase and with efficient, discrete, computation procedures, allows most transient and static problems involving deformations to be solved. This paper describes the basic procedures and the development of a general purpose computer program (SWANDYNE-X). The results of the computations are validated by comparison with experimental results obtained on physical models tested in the Cambridge Centrifuge.*

1. INTRODUCCION

El comportamiento mecánico de geomateriales saturados en general, se rige fundamentalmente por la interacción de la matriz sólida con el fluido presente en la estructura porosa, normalmente agua. Esta interacción es particularmente fuerte en problemas dinámicos y puede causar un reblandecimiento catastrófico del ma-

terial, conocido como licuefacción, que frecuentemente se produce bajo cargas sísmicas. La figura 1 de la parte I ilustra un problema típico de terremotos. A pesar de que este ejemplo es más bien dramático, la interacción se presenta en circunstancias más normales, cuasi-estáticas, típicas del comportamiento de las cimentaciones de la mayor parte de las estructuras de ingeniería, y se hace necesaria la predicción cuantitativa de fenómenos que den lugar a deformaciones permanentes (o aumentos inaceptables de las presiones intersticiales) si se quiere garantizar un comportamiento fiable de tales estructuras. Además, estos fenómenos son, por supuesto, de interés para geofísicos (y geógrafos) que estudien el comportamiento de sedimentos superficiales.

El comportamiento bifásico previamente descrito es fundamental, y aunque entendido en su concepto desde hace bastante tiempo, sólo se puede predecir cuantitativamente mediante complicados cálculos numéricos, que afortunadamente son posibles hoy en día gracias al de-

(*) Instituto para Métodos Numéricos en Ingeniería, University College, Swansea, U.K.

(**) Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Glasgow, U.K.

(***) Sector Ingeniería Computacional - CETA, CEDEX.

(****) Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Roorkee, U.P. India.

(*****). Instituto Takenaka de Investigación Técnica, Tokio, Japón.

Proceeding presentada a la Royal Society of London. Traducido del inglés por Pablo Nira McWilliams.

sarrollo de potentes ordenadores. El objetivo de este artículo es presentar una descripción completa de tales métodos numéricos y comparar los resultados con modelos experimentales con el objetivo de validarlos. Tal validación es, por supuesto, esencial para convencer a los escépticos y para poner de manifiesto que en la actualidad son posibles todas las etapas de modelización matemática. Esto es necesario para crear unos métodos de predicción que, en general, debido a la escala de los fenómenos, no pueden ser ensayados en laboratorio. Para su modelización completa son necesarias varias etapas, cada una de las cuales requiere a su vez un cierto grado de aproximación. Estas etapas son:

- a) Establecimiento de un marco matemático que describa adecuadamente los fenómenos.
- b) Establecimiento de métodos numéricos (discretos) de aproximación.
- c) Establecimiento de modelos constitutivos de comportamiento de los componentes.

Dedicaremos una sección de este artículo a cada una de estas etapas, indicando el estado del arte en la actualidad y presentando los métodos, generalmente nuevos, utilizados en este artículo.

Se dará la formulación en un contexto totalmente dinámico, que presenta la situación más difícil. Sin embargo, fenómenos tales como la consolidación lenta o

incluso el comportamiento puramente estático, se podrán obtener de forma inmediata como soluciones de casos particulares.

La aplicación del procedimiento general y de los métodos computacionales descritos, varía ampliamente desde problemas de ingeniería civil hasta ingeniería de depósitos petrolíferos e hidrología. Incluso los procesos de bio-ingeniería, relacionados con el comportamiento de huesos porosos y fluidos intersticiales, tienen la misma formulación (aunque el detalle del modelo constitutivo sea distinto) como muestran Simon *et al.* (1985) y Urban y Maroudas (1980).

En este artículo sólo se considera el comportamiento bifásico, pero, evidentemente, es posible la generalización al comportamiento trifásico como el que tiene lugar en suelos no saturados (siendo, generalmente, el aire la tercera fase) o en interacción petróleo-gas-suelo. Para facilitar tales generalizaciones incluiremos en la formulación términos de interacción, tales como expansión volumétrica de las fases fluidas, que puede ser causada por un campo externo de temperaturas. Mientras que en estos ejemplos el campo de temperaturas se da por supuesto, es conocido o despreciado, la interacción total con las ecuaciones de transmisión de calor, es por supuesto posible, y constituye la piedra angular de las formulaciones de comportamiento multifásico.

La solución completa del complejo problema aquí



FIGURA 1. Uvicelación de suelo y colapso de edificios en Niigata, Japón, 1964.

presentado es, probablemente, la primera en su género que se conoce en literatura técnica, aunque se sabe de intentos de resolver partes de este problema bajo hipótesis bastante restrictivas (Prevost, 1982; Zienkiewicz *et al.*, 1982; Zienkiewicz y Shiomi, 1984; Smith y Hobbs, 1976; Sweet y otros, 1980).

2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL COMPORTAMIENTO DE MEDIOS POROSOS SATURADOS

Los fundamentos de la teoría matemática que rige el comportamiento de los medios porosos de una única fase fluida fueron establecidos por primera vez por Biot (1941, 1955, 1956) para materiales elásticos y lineales, mediante un enfoque eminentemente físico. Posteriormente, la teoría de mezclas, utilizando variables más complicadas, confirmó esencialmente la corrección de sus resultados (Green & Adkin, 1960; Green, 1969; Bowen, 1976).

La teoría de Biot fue ampliada para tratar el comportamiento no lineal de materiales y los efectos debidos a grandes deformaciones por Zienkiewicz (1982) y Zienkiewicz y Shiomi (1984), y a continuación se resumen sus fundamentos junto con la obtención de las ecuaciones fundamentales que rigen estos fenómenos.

La mecánica de todos los geomateriales e incluso de otros medios porosos se representa adecuadamente a escala macroscópica, haciendo la hipótesis de que el tamaño de los granos sólidos y los poros es pequeño en comparación con las dimensiones consideradas. Esto permite utilizar valores medios de las variables de las que a continuación mencionamos las más importantes:

Tensión total σ_p . Se define considerando, como de costumbre, las resultantes de las fuerzas que actúan sobre secciones unitarias del conjunto sólido-fluido. Esta definición se aplicará al estado actual deformado, escribiendo la tensión de Cauchy como σ_{ij} con la notación usual de subíndices para coordenadas cartesianas. Se tomará signo positivo para la tensión.

Desplazamiento de la fase sólida u_p . Se define como el desplazamiento medio de las partículas que constituyen la fase sólida.

Presión intersticial p . Caracteriza la presión media en la fase fluida. Evidentemente, existen tensiones desviadoras en el fluido a escala microscópica, pero este efecto global se puede representar mediante fuerzas de arrastre viscosas ejercidas por el fluido sobre la fase sólida, que se tendrán en cuenta posteriormente mediante la conocida expresión de Darcy (1856). La presión se tomará como positiva a compresión.

Velocidad media del fluido relativa a la fase sólida w_p . Se define como la razón entre el caudal de fluido y el área de la sección bruta deformada. Es importante observar que la velocidad media relativa de las partículas fluidas es, de hecho, w_p/α donde α es la porosidad del sólido.

Una vez hechas las anteriores definiciones, pasamos a presentar cada una de las ecuaciones básicas que rigen el análisis del problema.

2.1. EL CONCEPTO DE TENSION EFECTIVA

Está claro intuitivamente, e incluso se puede observar mediante experimentos, que cuando una muestra de un medio sólido poroso se somete a un incremento uniforme de presión (externa e interna) mediante un fluido, sólo una pequeña parte de la deformación es debida a la compresión elástica de la fase sólida. En mecánica de fluidos esto da lugar al concepto de presión efectiva introducido por Terzaghi (1943) y Skempton (1961). La tensión efectiva se define como:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij}p \quad [1]$$

considerándose que a σ'_{ij} se deben todas las grandes deformaciones y la rotura de la matriz de suelo. Para incluir pequeñas deformaciones (volumétricas) se puede introducir una modificación en la anterior definición como explican Biot y Willis (1957) y Zienkiewicz (1982), es decir:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha \delta_{ij}p \quad [2]$$

donde:

$$\alpha = 1 - K_T/K_S \leq 1 \quad [3]$$

y K_T y K_S son los módulos volumétricos del medio poroso y la fase sólida, respectivamente. Mientras que para suelos la razón entre las dos deformabilidades es tal que $\alpha \rightarrow 1$ y la definición original de tensión efectiva resulta útil, para rocas y hormigón se han registrado valores del coeficiente tan bajos como 0,5 por lo que la segunda definición es preferible (Zienkiewicz, 1982; Zienkiewicz y Shiomi, 1984).

A partir de ahora utilizaremos la segunda definición de tensión efectiva y escribiremos todas las ecuaciones constitutivas de forma incremental respecto a ella. Presentaremos dichas ecuaciones como:

$$d\sigma'_{ij} = D_{ijkl}(d\epsilon_{kl} - d\epsilon^0_{kl}) + \sigma^*_{ik} d\omega_{kj} + \sigma^*_{jk} d\omega_{ki} \quad [4]$$

donde los dos últimos términos representan los cambios de tensión rotacional de Zarembka-Jaumann (generalmente despreciables cuando se trata de pequeñas deformaciones) y D_{ijkl} es una matriz tangencial definida mediante variables de estado adecuadas y la dirección del incremento.

Los incrementos de deformación ($d\epsilon_{ij}$) y rotación ($d\omega_{ij}$) se definen de la forma usual mediante el desplazamiento de la fase sólida:

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}) \\ d\omega_{ij} &= \frac{1}{2}(du_{j,i} - du_{i,j}) \end{aligned} \quad [5]$$

refiriéndose ϵ^0_{ij} a deformaciones causadas por acciones externas tales como cambios de temperatura, fluencia, etc.

2.2. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y CONTINUIDAD

Comenzamos por escribir las ecuaciones de equilibrio de fuerzas totales para el conjunto sólido-fluido. Para la unidad de volumen podemos escribir, a partir de la definición de tensión total:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i - \rho_f(\dot{\omega}_i + \omega_j \omega_{ij}) + \rho b_i = 0, \quad [6]$$

donde $\dot{\omega}_i \equiv d\omega_i/dt$, etc.

En la ecuación anterior hemos supuesto que el sistema de coordenadas se mueve con la fase sólida (coordenadas materiales) y por tanto la aceleración convectiva en función de la velocidad relativa es aplicable únicamente a la fase fluida. La densidad ρ_f es la correspondiente al fluido y ρ es la densidad de la mezcla que responde a:

$$\rho = n\rho_f + (1-n)\rho_s, \quad [7]$$

donde ρ_s es la densidad de la fase sólida y b_i es la fuerza unitaria.

En la ecuación [6] hemos subrayado los términos que en una teoría aproximada podrían ser omitidos para mayor sencillez y continuaremos con esa notación a lo largo del presente apartado.

La segunda de las ecuaciones que rigen el fenómeno es la que establece el equilibrio de fuerzas para la fase fluida. Una vez más, para un volumen unitario de control (supuesto solidario a la fase sólida y moviéndose con ésta), podemos escribir:

$$-p_{,i} - R_i - \rho_f \ddot{u}_i - \rho_f(\dot{\omega}_i + \omega_j \omega_{ij})/n + \rho_f b_i = 0. \quad [8]$$

En la ecuación anterior, R_i representa la fuerza de arrastre viscoso, que suponiendo la validez de la Ley de D'Arey (D'Arey, 1956) viene dada por:

$$k_{ij} R_j = \omega_i, \quad [9]$$

donde k_{ij} son los coeficientes de permeabilidad, generalmente anisótropos. Para el caso de isotropía pueden sustituirse por un único valor k .

Hemos de recordar que, en general, la permeabilidad puede ser función de la deformación (a través de cambios de porosidad) y de temperatura externa, es decir:

$$k_{ij} = k_{ij}(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^0, T). \quad [10]$$

La última ecuación, complementaria de la anterior, es la de conservación de flujo para la fase fluida. Se puede escribir como:

$$\dot{p}/Q + \dot{\omega}_{i,i} + (\dot{\rho}_f/\rho)\dot{\omega}_i + \dot{s}_0 = 0. \quad [11]$$

En la ecuación anterior, Q representa la compresibilidad conjunta de las fases sólida y fluida, que se puede expresar en función de los módulos volumétricos de cada una de las componentes (Blot & Willis, 1957; Zienkiewicz, 1982):

$$1/Q = n/K_f + (\alpha - n)/K_s \quad [12]$$

El último término $\dot{s}_0$ representa la velocidad de deformación volumétrica de la fase fluida, como la que pueden causar los campos de temperatura, etc.

Las ecuaciones anteriores, válidas en el dominio saturado del problema, rigen el comportamiento de fenómenos tanto estáticos como dinámicos. Una vez establecidos los parámetros constitutivos, se pueden resolver estas ecuaciones como se expondrá posteriormente, mediante un algoritmo numérico adecuado, siempre que se impongan correctamente las condiciones iniciales y de contorno.

Las condiciones iniciales, generalmente, especificarán el campo completo de u_i , ω_i y p mientras que las condiciones de contorno deberán establecer (i). Los valores de u_i o de las componentes correspondientes de tracción total y (ii) los valores de la presión p o los de las velocidades de flujo ω_i correspondientes (en la dirección normal al contorno).

La solución de las ecuaciones en su forma general, donde u_i , ω_i y p permanecen como variables es, costosa y sólo necesaria cuando se trata de fenómenos de alta frecuencia. Para la mayoría de los problemas geomecánicos se pueden omitir los términos subrayados en las distintas ecuaciones y llegar a un sistema reducido, que da lugar a una mayor economía de cálculo. Este sistema simplificado se describe en el próximo apartado.

2.3. LAS ECUACIONES FUNDAMENTALES SIMPLIFICADAS

Las tres ecuaciones fundamentales [6], [8] y [11], junto con las definiciones complementarias [2], [4], [5] y [9], constituyen un problema bien definido, cuya solución numérica ha sido estudiada por Zienkiewicz y Shiomi (1984). Cuando las frecuencias de las aceleraciones son bajas, como en el caso de movimientos sísmicos, los términos subrayados en [6], [8] y [11] en los que interviene la aceleración relativa del fluido no son importantes y pueden omitirse como muestran Zienkiewicz y Bettess (1982) y Zienkiewicz y otros (1980).

La omisión de tales términos permite eliminar ω_i del sistema de ecuaciones conservando únicamente u_i y p como variables principales. A partir de ahora usaremos un término medio escribiendo r_i para los términos subrayados en la ecuación [6] y i para los de la ecuación [8], omitiendo el término subrayado de la ecuación [11], que es siempre insignificante. Esto permite una corrección iterativa (o por lo menos una evaluación del error) en cualquier fase de los cálculos numéricos posteriores.

Con esta simplificación podemos escribir el sistema de ecuaciones fundamentales como:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + \rho b_i - r_i = 0, \quad [13]$$

y utilizando las ecuaciones [8] y [9] para eliminar ω_i de la ecuación [11]:

$$\dot{\omega}_{i,i} - (k_{ij} \dot{p}_{,j})_{,i} + \dot{p}/Q + (k_{ij} \dot{p}_{,j})_{,i} + \dot{s}_0 - [k_{ij}(\dot{p}_{,j} \dot{u}_i + \dot{u}_i \dot{p}_{,j})]_{,i} = 0 \quad [14]$$

El sistema anterior, junto con las definiciones complementarias que relacionan tensiones y deformaciones

con los desplazamientos u_i (a saber [1]-[5]), y las condiciones de contorno, pueden discretizarse y resolverse numéricamente utilizando únicamente dos conjuntos de variables principales u_i y p .

3. LA APROXIMACION DISCRETA Y SU SOLUCION

Para obtener una solución numérica es necesario un proceso de discretización adecuado. Aquí utilizaremos procedimientos de elementos finitos para la discretización, tanto en el espacio como en el tiempo. La notación general se ajusta al texto de Zienkiewicz y Taylor (1989), en el que por razones de concisión se utiliza rotación vectorial en lugar de índices, sustituyendo por tanto u_i por $\mathbf{u}$, σ_{ij} por $\boldsymbol{\sigma}$, etc. (Esta no es necesariamente la forma óptima para el cálculo, en el que de hecho hemos conservado la notación de índices.)

En primer lugar, introduciremos la aproximación espacial de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}(t) = \mathbf{N}^u \bar{\mathbf{u}}(t) \quad [15a]$$

$$y \quad p \approx p(t) = \mathbf{N}^p \bar{p}(t) \quad [15b]$$

donde $\mathbf{N}^u$ y $\mathbf{N}^p$ son funciones de forma o de base aproximadas y $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{p}$ constituyen un conjunto finito de parámetros. Tales parámetros pueden (pero no deben necesariamente) corresponder a los valores nodales de las variables apropiadas.

Las ecuaciones fundamentales [13] y [14] pueden ahora transformarse en un conjunto de ecuaciones algebraicas en el espacio, en las que mediante un planteamiento adecuado de tipo Galerkin (o de residuos ponderados) las únicas derivadas que quedan son respecto al tiempo. Esto permite, mediante esta aproximación, satisfacer las ecuaciones en un sentido integral (o global) medio.

Por tanto, premultiplicando la ecuación [13] por $\mathbf{N}^{uT}$ e integrando en el dominio del espacio se obtiene (tras aplicar el teorema de Green e imponer las condiciones de contorno):

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{uT} \rho \mathbf{N}^u d\Omega \right] \ddot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{f}^{(1)}, \quad [16]$$

donde $\mathbf{B}$ es la conocida matriz de deformación que relaciona, mediante el uso de la ecuación [5], los incrementos de deformación con los de desplazamientos, es decir:

$$d\epsilon = \mathbf{B} d\bar{\mathbf{u}}. \quad [17]$$

El vector de cargas $\mathbf{f}^{(1)}$, de la misma dimensión que el vector $\mathbf{u}$, contiene las fuerzas de masa, tracciones del contorno, términos omitidos de error, $\mathbf{r}$, y valores de contorno prescritos, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{f}^{(1)} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{uT} \rho \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^{uT} \mathbf{r} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}^{uT} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma, \quad [18]$$

donde $\bar{\mathbf{t}}$ es la tracción prescrita en parte del contorno Γ_1 .

Utilizando la definición de tensiones efectivas (ecuación [2]) e introduciendo ciertas abreviaturas, la ecuación [16] puede reescribirse como:

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega - \mathbf{Q} \bar{p} - \mathbf{f}^{(1)} = 0, \quad [19]$$

donde:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{uT} \rho \mathbf{N}^u d\Omega \quad [20a]$$

es la conocida matriz de masa y:

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{a} m \mathbf{N}^p d\Omega \quad [20b]$$

es una matriz de acoplamiento, siendo $\mathbf{m}$ un vector equivalente a la δ_{ij} de Kronecker. Ambas matrices son independientes de los parámetros físicos del problema (suponiendo constantes los valores de $\mathbf{a}$ y ρ).

La anterior ecuación fundamental discreta sólo contiene implícitamente los dos parámetros incógnita $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{p}$, puesto que los incrementos de tensiones vienen dados por la relación constitutiva en función de los incrementos de desplazamiento. Esa relación puede reescribirse en notación vectorial como:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathbf{B} d\bar{\mathbf{u}} - d\epsilon^0) + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{A} B d\bar{\mathbf{u}}, \quad [21]$$

donde $\mathbf{A}$ es un operador matricial convenientemente definido. La ecuación anterior permite integrar $\boldsymbol{\sigma}^*$ de forma continua a partir de los valores iniciales conocidos del problema.

La segunda de las ecuaciones fundamentales [14] y sus condiciones de contorno pueden discretizarse de manera similar utilizando ahora $\mathbf{N}^{pT}$ como funciones de ponderación, dando lugar a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo:

$$\mathbf{Q}^T \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{H} \bar{p} + \mathbf{S} \dot{\bar{p}} - \mathbf{f}^{(2)} = 0, \quad [22]$$

donde $\mathbf{Q}$ es una matriz anteriormente definida en la ecuación [20b], representando $\mathbf{f}^{(2)}$ un vector fuerza, que incluye fuerzas de masa, términos de error, el término $\mathbf{s}_0$ y condiciones de contorno.

Las matrices restantes se definen a continuación:

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}^p)^T \mathbf{k} \nabla \mathbf{N}^p d\Omega \quad [23a]$$

como la matriz de permeabilidad en la que $\mathbf{k}$ es la matriz de coeficientes definida en [9].

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{pT} \frac{1}{Q} \mathbf{N}^p d\Omega \quad [23b]$$

es la matriz de compresibilidad (frecuentemente tomada como nula) y:

$$\mathbf{f}^{(2)} = \int_{\Gamma_{w_x}} \mathbf{N}^{pT} \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{N}^{pT} k p_j b d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} N^T k t \, d\Omega + \left[\int_{\Omega} N^T k p_s N^T \, d\Omega \right] \ddot{u} + \int_{\Omega} N^T \ddot{z}_0 \, d\Omega \quad [24]$$

Para completar la solución numérica es necesario integrar las ecuaciones diferenciales ordinarias [19], [21] y [22] en el tiempo mediante uno de los muchos métodos disponibles. Algunos de ellos utilizan el concepto de elemento finito en el dominio del tiempo, pero aquí utilizaremos los métodos disponibles más sencillos de un paso (Newmark, 1959; Katona y Zienkiewicz, 1985).

Con todos estos métodos escribiremos una relación de recurrencia que exprese los valores dados de $\ddot{u}_n$, $\ddot{u}_n$ y $\ddot{p}$ disponibles para el tiempo t_n en función de valores $\ddot{u}_{n+1}$, $\ddot{u}_{n+1}$ y $\ddot{p}_{n+1}$, que son válidos para el tiempo $t_n + \Delta t$ y que son las incógnitas. Si suponemos que las ecuaciones [19] y [22] han de ser satisfechas en cada tiempo discreto y se suman $\ddot{u}$ y $\ddot{p}$ a las condiciones dadas para el tiempo t_n , permaneciendo $\ddot{u}_{n+1}$ y $\ddot{p}_{n+1}$ como incógnitas, impondremos que:

$$M \ddot{u}_{n+1} + \left(\int_{\Omega} B^T \sigma^* \, d\Omega \right)_{n+1} - Q \ddot{p}_{n+1} - F_{n+1}^{(1)} = 0, \quad [25a]$$

$$Q^T \ddot{u}_{n+1} + H_{n+1} \ddot{p}_{n+1} + S_{n+1} \ddot{p}_{n+1} - F_{n+1}^{(2)} = 0, \quad [25b]$$

y que se satisfaga la ecuación [21].

La relación entre valores sucesivos se obtiene a través de un desarrollo en serie truncado, que en el caso más sencillo será:

$$\ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}_n + \ddot{u}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_n \beta_1 \Delta t^2, \quad [26a]$$

$$\ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}_n + \ddot{u}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_n \Delta t^2 + \frac{1}{2} \ddot{u}_n \beta_2 \Delta t^2, \quad [26b]$$

$$\ddot{p}_{n+1} = \ddot{p}_n + \ddot{p}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{p}_n \theta \Delta t^2, \quad [26c]$$

donde:

$$\ddot{u}_n = \ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n \text{ y } \ddot{p}_n = \ddot{p}_{n+1} - \ddot{p}_n$$

son, de momento, valores desconocidos. Los parámetros β_1 , β_2 y θ se escogerían comprendidos entre 0 y 1, pero para que el método de recurrencia sea incondicionalmente estable se ha de cumplir (Zienkiewicz y Taylor, 1985; Chan, 1988):

$$\beta_2 \geq \beta_1 \geq \frac{1}{2} \text{ y } \theta \geq \frac{1}{2},$$

siendo la elección óptima una cuestión de conveniencia de cálculo, cuyos detalles se pueden consultar en la literatura científica.

La sustitución de las ecuaciones [26] en las ecuaciones [25] da lugar a un sistema de ecuaciones no lineales de tipo general en el que las únicas incógnitas son $\ddot{u}_n$ y $\ddot{p}_n$.

Esto puede expresarse como:

$$\psi_{n+1}^{(1)} = M_{n+1} \ddot{u}_{n+1} + P(u_{n+1}) - Q_{n+1} \ddot{p}_{n+1} - F_{n+1}^{(1)} = 0, \quad [27a]$$

$$\psi_{n+1}^{(2)} = Q_{n+1}^T \beta_1 \Delta t \ddot{u}_{n+1} + H_{n+1} \ddot{p}_{n+1} + S_{n+1} \ddot{p}_{n+1} - F_{n+1}^{(2)} = 0, \quad [27b]$$

donde $F_{n+1}^{(1)}$ y $F_{n+1}^{(2)}$ pueden evaluarse explícitamente a partir de la información correspondiente al tiempo n y:

$$P(u_{n+1}) = \int_{\Omega} B_{n+1}^T \sigma_{n+1}^* \, d\Omega = \int_{\Omega} B^T \Delta \sigma_n^* \, d\Omega + P(u_n), \quad [28]$$

$\Delta \sigma_n^*$ se obtiene mediante la integración de [21] y $\ddot{u}_{n+1}$ se define a través de [26b].

Las ecuaciones habrán de ser resueltas generalmente mediante un procedimiento convergente e iterativo, utilizando alguna forma del método de Newton, que en general se puede expresar como:

$$J \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{u}_n \\ \Delta \ddot{p}_n \end{Bmatrix}^{i+1} = - \begin{Bmatrix} \psi_{n+1}^{(1)} \\ \psi_{n+1}^{(2)} \end{Bmatrix}^i, \quad [29]$$

donde i es el número de iteración.

La matriz jacobiana se puede escribir como:

$$J = \begin{bmatrix} \partial \psi^{(1)} / \partial (\Delta \ddot{u}_n), & \partial \psi^{(1)} / \partial (\Delta \ddot{p}_n) \\ \partial \psi^{(2)} / \partial (\Delta \ddot{u}_n), & \partial \psi^{(2)} / \partial (\Delta \ddot{p}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + K_T \beta_2 \Delta t^2, & -Q^T \Delta t \\ Q^T \beta_1 \Delta t, & H_{n+1} \theta \Delta t + S_{n+1} \end{bmatrix}, \quad [30]$$

donde:

$$K_T = \int_{\Omega} B^T D_T B \, d\Omega + \int_{\Omega} B^T A^T \sigma^* A B \, d\Omega, \quad [31]$$

que son las conocidas expresiones de las matrices de rigidez tangencial y «tensiones iniciales» evaluadas en la configuración actual.

A continuación se ha de llamar la atención sobre dos puntos: (a) en el caso lineal una sola iteración resuelve el problema exactamente; (b) la matriz J puede transformarse fácilmente en simétrica mediante una sencilla multiplicación escalar de la segunda fila (siempre que K_T sea simétrica).

En la práctica, se sabe que hay varias aproximaciones de la matriz J que resultan ventajosas tales como, por ejemplo, la actualización secante, etc.

Una forma de cálculo que resulta particularmente económica es aquella dada por el valor de 0 para β_2 y la representación de M en forma diagonal. Este procedimiento explícito, utilizado por primera vez por Leung (1984) y Zienkiewicz *et al.* (1980a) es, sin embargo,

sólo condicionalmente estable, siendo eficiente únicamente para fenómenos de corta duración.

El procedimiento iterativo permite determinar el efecto de los términos despreciados en la aproximación $u-p$, y por tanto, la evaluación de su precisión.

El proceso de solución en el dominio del tiempo puede transformarse en el de soluciones sucesivas y separadas de [27a y b] para las variables Δu e Δp , respectivamente, utilizando una aproximación para la variable restante.

Estos procedimientos escalonados, en caso de ser estables pueden ser muy económicos, como demuestran Park y Fellip (1983), pero para el caso particular aquí presentado, requieren estabilización. Esto fue conseguido por primera vez por Park (1983) y más tarde una forma más efectiva fue presentada por Zienkiewicz *et al.* (1988). Pueden incorporarse casos especiales de solución al procedimiento general, sin pérdida de eficacia de cálculo.

Por tanto, para problemas estáticos o quasi-estáticos no hay más que tomar:

$$M = 0$$

y obtenemos de manera inmediata la ecuación transitoria de consolidación. En este caso el tiempo sigue siendo real y hemos omitido los efectos puramente inerciales (aunque con procedimientos explícitos, esta hipótesis no es necesaria y los efectos inerciales simplemente aparecerán como despreciables sin un incremento sustancial de cálculo). En el caso estático se mantiene la variable tiempo, pero como una variable artificial que permite el incremento de carga.

En análisis estático o dinámico no drenado las matrices de permeabilidad (y compresibilidad) se toman como nulas, es decir:

$$H, C^{(2)} = 0 \text{ y normalmente } S = 0,$$

dando lugar a un término nulo en la diagonal de la matriz jacobiana de la ecuación [30].

la matriz que hay que resolver en ese caso tan particular es idéntica a la utilizada frecuentemente en la solución de problemas de elasticidad incompresible o mecánica de fluidos y en tales estudios impone restricciones a las funciones de aproximación N^u y N^p usadas en [15] si se quieren satisfacer las condiciones de convergencia de Babuska-Brezzi (Babuska, 1971, 1973; Brezzi, 1974). Hasta ahora no nos hemos referido a ningún tipo concreto de elemento, y realmente hay múltiples posibilidades de elección disponibles para el usuario, siempre que no se imponga la restricción (caso no drenado). Debido a la presencia de derivadas especiales primeras en todas las ecuaciones, es necesario utilizar funciones de interpolación de tipo C_0 (Zienkiewicz & Taylor, 1989); la figura 2 presenta algunos de los elementos incorporados a esta formulación. El tipo de elementos utilizados satisface los criterios de convergencia necesarios para la condición de no drenado (Zienkiewicz, 1984).

4. MODELOS CONSTITUTIVOS DE SUELOS

La modelización constitutiva del suelo (u otros geomateriales) es claramente una de las piedras angulares para la solución adecuada de problemas cuantitativos. Sin un modelo constitutivo adecuado los cálculos no tienen ninguna validez, y un buen modelo constitutivo sin un procedimiento de cálculo en el que poder usarlo es únicamente un ejercicio académico.

No es sorprendente, por tanto, que se haya dedicado un gran esfuerzo de investigación a la determinación de dichos modelos en el último cuarto de siglo paralelamente al desarrollo de procedimientos de cálculo (análisis numérico). Estos trabajos son demasiado extensos para ser presentados aquí, pero recientemente se ha progresado de tal modo que es posible describir el comportamiento tanto de suelos cohesivos como no cohesivos, rocas y hormigón, con un grado razonable de precisión, para la mayor parte de los caminos de carga. Por

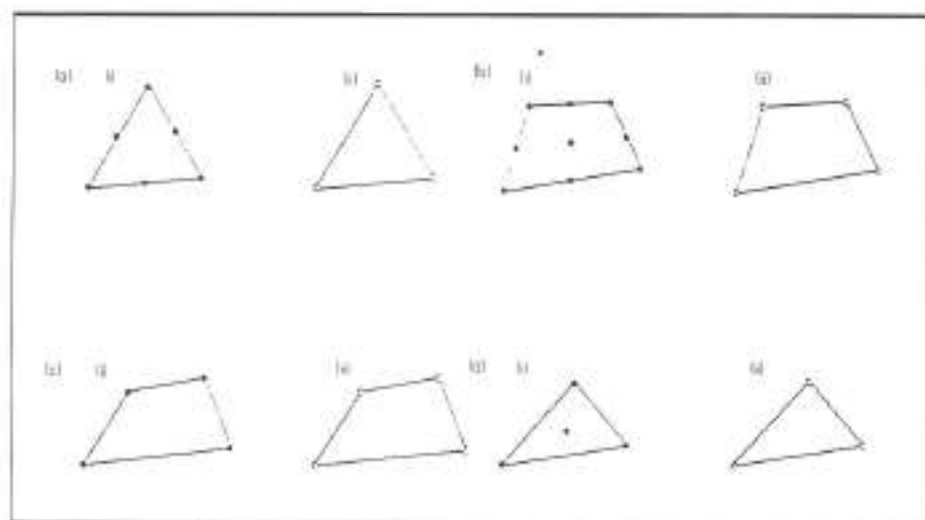


FIGURA 2. Elementos utilizados en la formulación de análisis acoplado, desplazamiento (u) y presión (p). (a) (b) cuadrático para u; (c) lineal para p; (d) (e) bicuadrático para u; (f) bilineal para p; (g) (h) lineal para u; (i) lineal para p; (j) (k) lineal con burbuja cúbica para u; (l) lineal para p. El elemento (c) no es totalmente aceptable en los límites de incompresibilidad y no drenado.

supuesto, la investigación continua y cada año se añaden nuevos modelos constitutivos al repertorio.

La mayor parte de la deformación del suelo es independiente del tiempo y, por tanto, se puede expresar mediante ecuaciones del tipo [4] o [21], donde la matriz D se define mediante el estado actual de tensión y deformación, su historia y, de manera especialmente im-

portante, la dirección de los incrementos de tensión o deformación. Esta última es esencial si se producen deformaciones plásticas (o irreversibles) como ocurre inevitablemente con la mayor parte de los suelos. La primera contribución importante a la obtención de modelos constitutivos estaba basada en la teoría clásica de plasticidad y en este caso el trabajo del grupo de Cambrid-

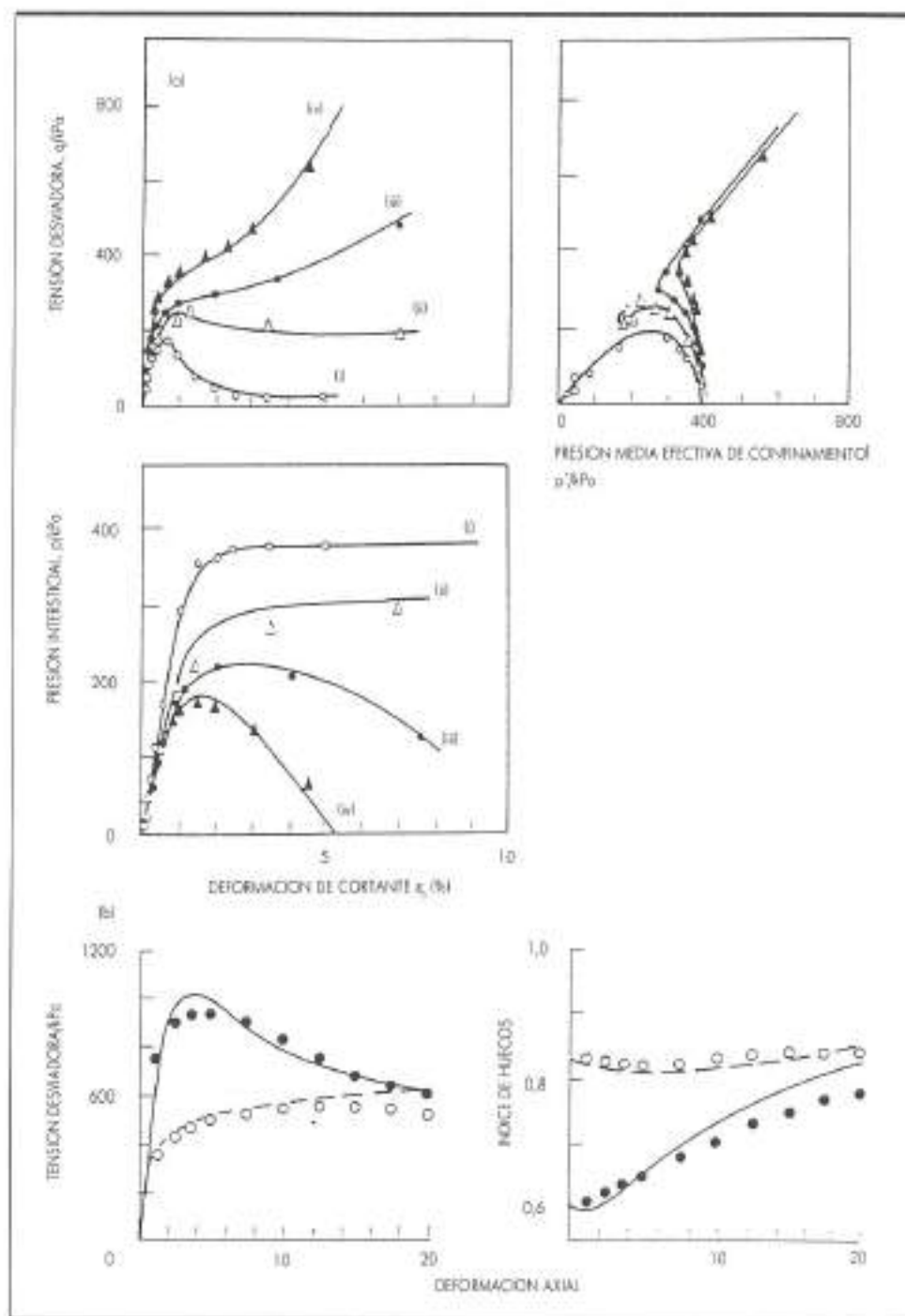


FIGURA 3a,b. Descripción en figura 3c.

ge, a principios de los sesenta, abrió el camino para las bases de la obtención de modelos de suelos cohesivos (arcillas). El trabajo de Roscoe *et al.* (1958) y Schofield & Wroth (1968) es ahora clásico en este tema.

Recientemente se ha descubierto que este tipo de modelos puede incluirse sencillamente en una teoría de plasticidad generalizada (Mroz & Zienkiewicz, 1984; Zienkiewicz & Morz, 1984) y que esta nueva formulación permite definir leyes plásticas de una manera muy sencilla, sin necesidades de definir superficies de fluencia. Esta teoría ha permitido, recientemente, modelizar de manera efectiva el comportamiento de arenas y materiales similares mediante un número relativamente pequeño de parámetros experimentales. Pastor y Zienkiewicz (1986) y Pastor *et al.* (1985) examinan los detalles de esta formulación, y las figuras 3a-d muestran lo bien que se puede reproducir el comportamiento típico de la arena bajo cargas complejas, mediante la identi-

cación de unas pocas constantes físicas (de ocho a diez son suficientes para la mayor parte de las arenas). Reservamos la descripción de las características generales de esta teoría para el apéndice y los detalles para los artículos pertinentes, pero cuatro aspectos importantes han de ser mencionados:

1. La definición de D es tal que:

$$D = D_{\text{carga}} \quad \text{cuando } n^T d\sigma \geq 0$$

$$D = D_{\text{descarga}} \quad \text{cuando } n^T d\sigma < 0,$$

siendo $d\sigma = D^T dt$ y σ la parte elástica de las tensiones efectivas. Las matrices de carga y descarga son distintas, permitiendo, por tanto, que se produzcan deformaciones permanentes a lo largo de un ciclo de carga.

2. El modelo incluye deformaciones plásticas tanto en carga como en descarga. Para las arenas, esta deforma-

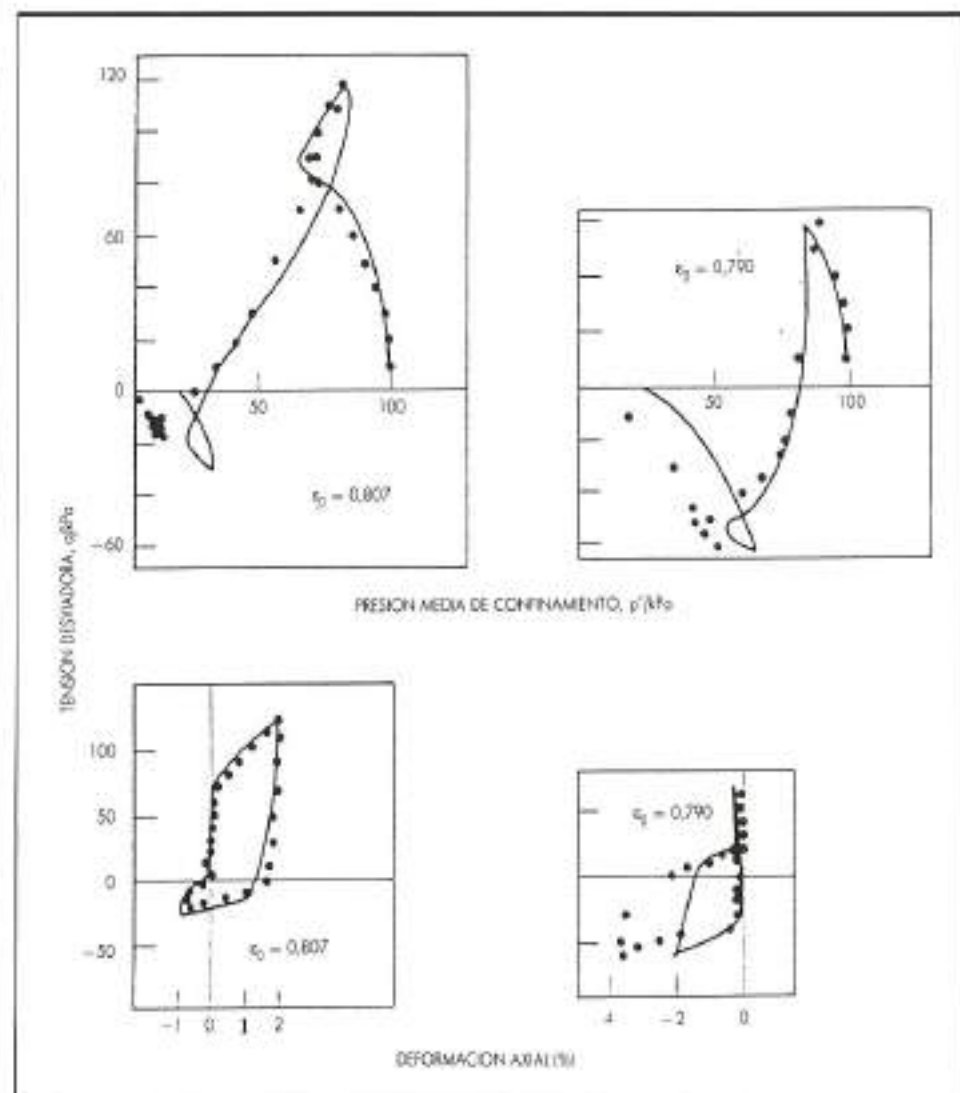


FIGURA 3. (a) Triaxial no drenado. Ensayo de carga monótona para arenas de varias densidades (Castaño, 1969). (b) Triaxial no drenado. Ensayo de carga monótona. Arenas sueltas y densas (Taylor, 1984). Para D_r = 100 % ●, experimental; — modelo numérico. Para D_r = 20 % ○, experimental; — modelo numérico. (c) Comportamiento sin drenaje de arenas sueltas bajo cambio de signo de las tensiones (Ishihara y Okada, 1978). ●, experimental; — modelo numérico. (d) Carga cíclica de uso vía sin drenaje de arenas sueltas (Castaño, 1969). D_r = 33 %. (i) Experimental, (ii) Modelo numérico. (e) Carga cíclica de uso vía sin drenaje. (i) Experimental, (ii) Modelo numérico.

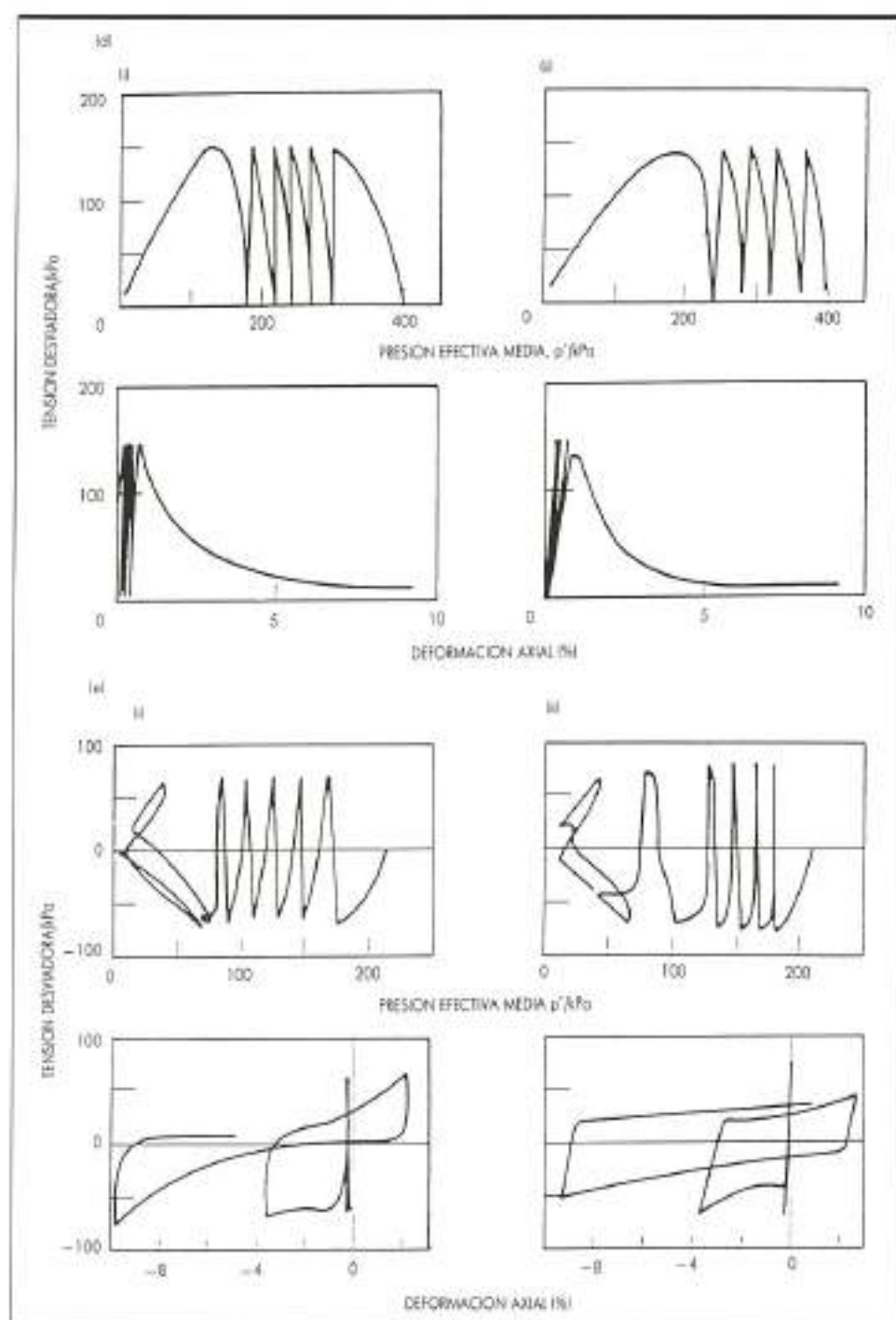


FIGURA 3d,e. Descripción en figura 3c.

ción causa una disminución de la deformación volumétrica en ambas direcciones al ensayar una muestra drenada, y cuando la muestra es no drenada se observa un incremento de la presión intersticial tendiente a la licuefacción del suelo o por lo menos la llamada «movilidad cíclica». Este es un fenómeno de gran importancia que causa colapsos tales como el ilustrado en la figura 1.

3. El modelo utilizado no tiene en cuenta posibles deformaciones causadas por la rotación pura de los ejes principales de tensión, que se sabe es capaz de causar licuefacción. Sin embargo, la evidencia experimental de lo anterior está sólo cuantitativamente confirmada hasta la fecha, y en las aplicaciones prácticas presentadas dicho efecto puede ser probablemente ignorado. La po-

sible ampliación del modelo para tratar este fenómeno es examinada por Pastor *et al.* (1990) y puede ponerse a punto cuando haya datos cuantitativos disponibles.

4. Los modelos utilizados en este artículo usan su capacidad predictiva para suelos no cohesivos. La modificación para arcillas y suelos similares es relativamente sencilla y se describe en la última referencia.

Antes de cerrar esta sección, hemos de hacer notar que ninguno de los modelos de suelos disponibles es

ideal en el sentido de ser capaz de reproducir con precisión todas las características observadas del comportamiento experimental de los suelos.

El que nos ocupa es actualmente óptimo, pero sin duda otros nuevos serán desarrollados y en el caso de ser satisfactorios pueden introducirse en el programa. Sin embargo, la búsqueda de precisión debe estar atemperada por la evidencia de que los ensayos de laboratorio están sujetos a un error considerable a través de la

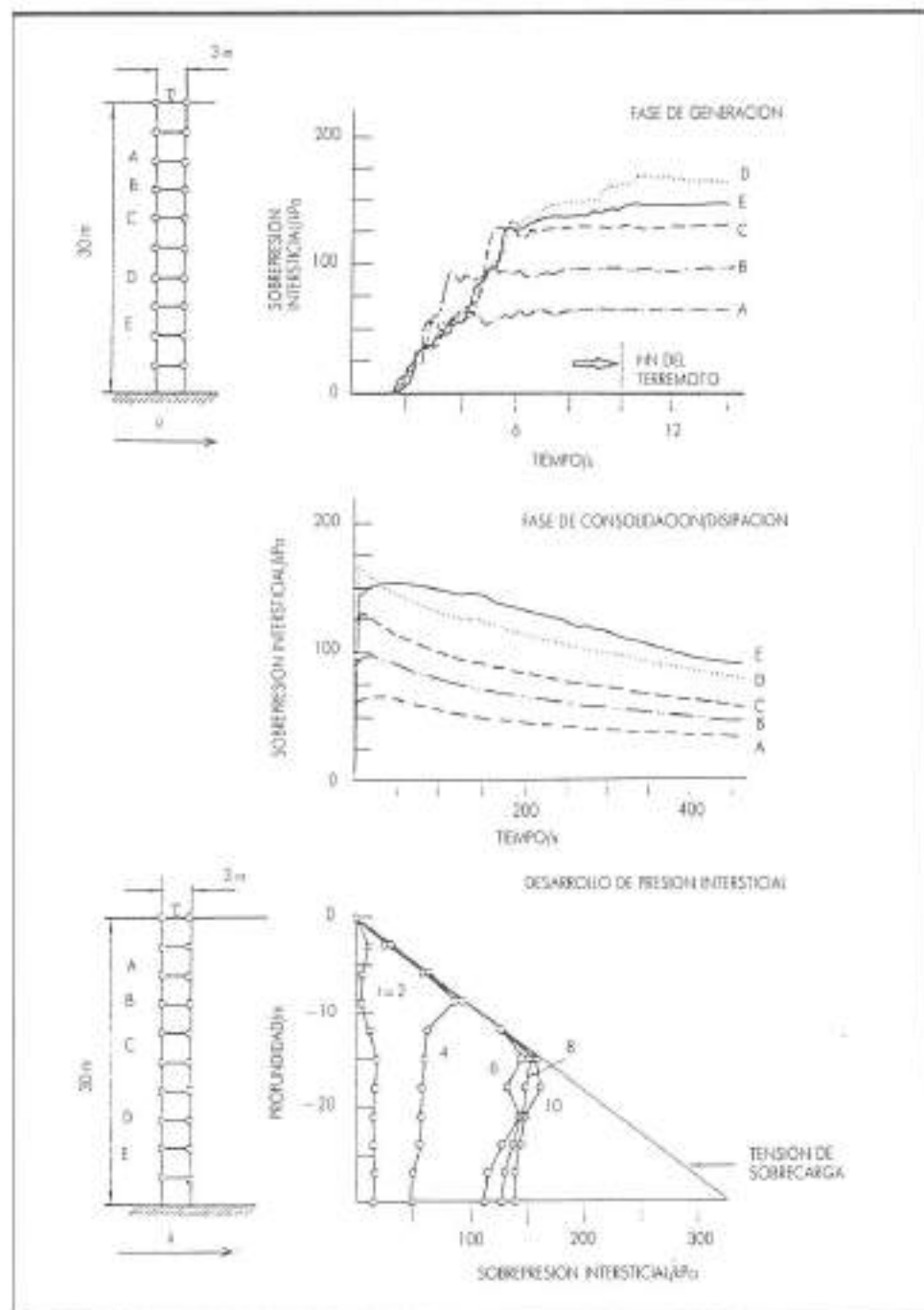


FIGURA 4. Cálculo que muestra el desarrollo de la presión intersticial hasta licuación y posterior consolidación en una capa típica de suelo.

aplicación de tensiones o deformaciones prescritas e incluso que los suelos in situ muestran una considerable variabilidad en su comportamiento, y los parámetros elegidos para cada caso particular requieren un enfoque estadístico.

5. VERIFICACION

Dada la existencia de una aproximación en el procedimiento numérico, y lo que es más importante, la posibilidad de que las leyes constitutivas no sean adecuadas y la variabilidad de los parámetros cuantitativos que las definen, es esencial que se puedan verificar las predicciones en un prototipo o mediante cálculos en un modelo a escala, habiéndose comprobado mediante cálculos previos que los fenómenos esenciales han sido correctamente modelizados.

El primer ejemplo representa un ensayo cuantitativo para demostrar que los efectos observados en la licuefacción de la capa de suelo de Nilgata en la figura 1 pueden reproducirse. En la figura 4 se modeliza dicha capa sometida a una excitación sísmica horizontal en la base (utilizando parámetros del suelo y de la excitación sísmica contrastados con observaciones en la medida de lo posible) y se muestra la evolución de las presiones intersticiales calculadas, de los desplazamientos y de la aceleración. Se demuestra la existencia de licuefacción, o al menos el desarrollo de presiones intersticiales, hasta el punto de contrarrestar las tensiones del suelo debidas a peso propio, dando lugar a tensiones efectivas medias nulas.

De especial interés es la evolución de la consolidación post-terremoto que en las sobrepresiones intersticiales descienden hasta anularse. La relativamente rápida reducción de dichas presiones en puntos situados a una considerable profundidad y el casi constante exceso de presiones que se mantiene durante un largo período, cerca de la superficie, constituyen a primera vista una contradicción. Sin embargo, este fenómeno se ha observado en muchos ensayos de laboratorio que simulaban este problema y se puede explicar sencillamente teniendo en cuenta que cerca de la superficie la apreciable expansión volumétrica que sigue al incremento inicial de presión intersticial requiere más tiempo para restablecer el contacto suelo partícula que en puntos a mayor profundidad.

El primer ejemplo es cualitativo debido a la relativamente obvia razón de que cualquier reconstrucción a posteriori de los acontecimientos que tienen lugar en la Naturaleza no tendrá suficiente información cuantitativa sobre los fenómenos y los materiales de la estructura.

Por esta razón, una serie de experimentos controlados fueron llevados a cabo por el profesor Schofield en la Universidad de Cambridge, para obtener medidas precisas de la carga dinámica, y la evolución de los desplazamientos y las presiones intersticiales en algunas situaciones típicas.

Dos de estos experimentos se muestran en las figu-

ras 5 y 6, respectivamente, junto con los cálculos correspondientes. Las dificultades para registrar desplazamientos en el experimento limitan ese conjunto de datos, pero los observados junto con la presión intersticial muestran una concordancia razonable con los resultados del cálculo.

Los ensayos llevados a cabo en Cambridge fueron registrados por Venter (1987), que también realizó ensayos que permitieron identificar al menos algunos de los parámetros del suelo. Otros tuvieron que ser «adivinados» a partir de otros datos.

No se muestran en este artículo resultados de cálculos estáticos, aunque la validación de la consolidación quasi-estática está bien documentada en observaciones realizadas en máquina centrífuga a una mayor escala de tiempos.

Los ejemplos examinados no incluyen estudios de fenómenos tales como el colapso de terraplenes o presas en las que exista capa freática. Este tipo de comportamiento será examinado en la segunda parte de este artículo en la que se incluirán los efectos de semi-saturación. Dicha semi-saturación produce presiones intersticiales negativas y es esencial para el aumento de resistencia del material situado por encima del nivel freático.

6. CONCLUSIONES

Este artículo pretende, y creemos que con éxito, mostrar que el cálculo numérico y la modelización pueden reproducir cuantitativamente muchos de los fenómenos para los que hasta ahora sólo había disponibles bastas reglas experimentales. Muchos trabajos han sido presentados por Zienkiewicz y otros en los últimos 15 años sobre las posibilidades de cálculo en el campo de la geomecánica, pero por razones bastante plausibles dichos cálculos todavía no se utilizan asiduamente. Esperamos que las predicciones aquí probadas, y la posibilidad de modelizar todas las fases del comportamiento mecánico del suelo de una manera unificada, resulten atractivas para el proyectista y el investigador.

A. H. C. C. está agradecido a la Fundación Croucher por haberle proporcionado medios para sus estudios. M. P. agradece la ayuda del British Council. Otros agradecen la ayuda recibida del proyecto cooperativo DINA con Industrias Japonesas.

APENDICE. MODELO DE PLASTICIDAD GENERALIZADA

En elasto-plasticidad, las deformaciones permanentes pueden tener lugar durante un ciclo de carga y todas las teorías correspondientes distinguen entre carga y descarga. En la formulación de plasticidad generalizada, se define en todo punto del espacio de tensiones σ_{ij} un tensor direccional w_{ij} que sirve para distinguir entre carga y descarga. Por tanto, si D^*_{ij} corresponde a la matriz modular elástica e independiente de la dirección, tendremos:

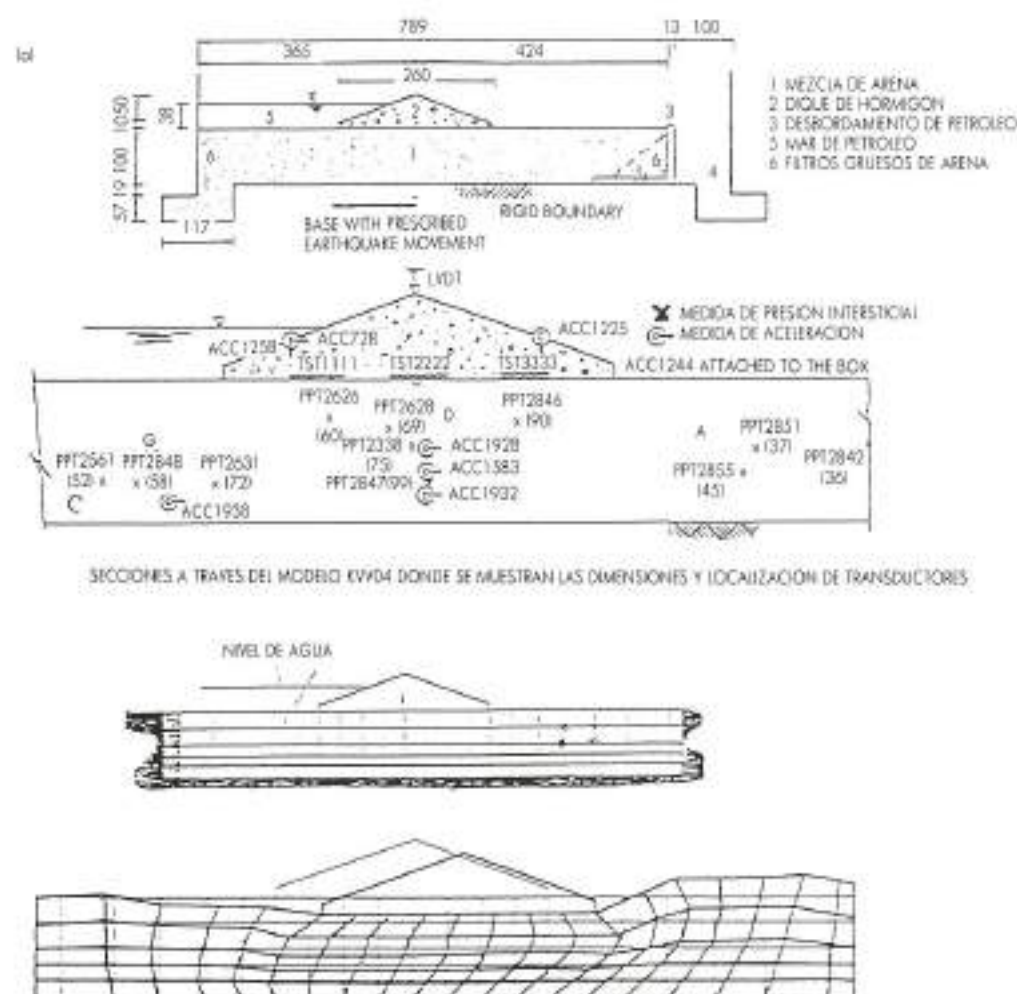


FIGURA 5. (a) Modelo centrífugo de un dique, malla de cálculo (elementos bilineales) y deformado tras el terremoto. (Factor de ampliación 10). (b) Presión intersticial y cálculo de desplazamientos laterales frente a resultados experimentales izquierdal. Sobrepresión intersticial en (i) G, (ii) D, (iii) A, (iv) C. (c) Desplazamiento vertical del dique. El dispositivo tipo es un transductor de 6 presiones. Número de dispositivo (i) 2561, (ii) 2338, (iii) 2851, (iv) 2848, (v) 873. Intervalo $0 < t < 0,1$ s. (d) Como la figura 5b con intervalo $0 < t < 2,5$ s.

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^L d\epsilon_{kl} \quad \text{si} \quad n_{ij} D_{ijkl}^L d\epsilon_{kl} \geq 0 \text{ (carga),}$$

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^U d\epsilon_{kl} \quad \text{si} \quad n_{ij} D_{ijkl}^U d\epsilon_{kl} \leq 0 \text{ (descarga o carga revertida),}$$

Para obtener unicidad en los cambios de deformación correspondientes a un cambio de tensión dado, es necesario que a lo largo de la dirección de carga neutra:

$$(D_{ijkl}^L)^{-1} = (D_{ijkl}^U)^{-1}.$$

Esto se puede obtener fácilmente escribiendo:

$$(D_{ijkl}^L)^{-1} = (D_{ijkl}^U)^{-1} + n_{ij}^L n_{kl} / H^L,$$

$$(D_{ijkl}^U)^{-1} = (D_{ijkl}^L)^{-1} + n_{ij}^U n_{kl} / H^U,$$

donde n_{ij}^L y n_{ij}^U son tensores arbitrarios unitarios y H^L y H^U son módulos plásticos escalares. La anterior definición da lugar a deformaciones permanentes elásticas y por tanto únicas en carga neutra, siendo $n_{ij} D_{ijkl}^L d\epsilon_{kl}$ y $n_{ij} d\sigma_{ij}$ nulos. Nótese que en la anterior definición se entiende por inverso de un tensor:

$$D_{ijkl}(D_{mnpq})^{-1} = \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kp} \delta_{lq}.$$

La deformación plástica completa que satisfaga todas las reglas de consistencia puede obtenerse definiendo el tensor n_{ij} (dirección de carga) n_{ij}^L y n_{ij}^U permi-

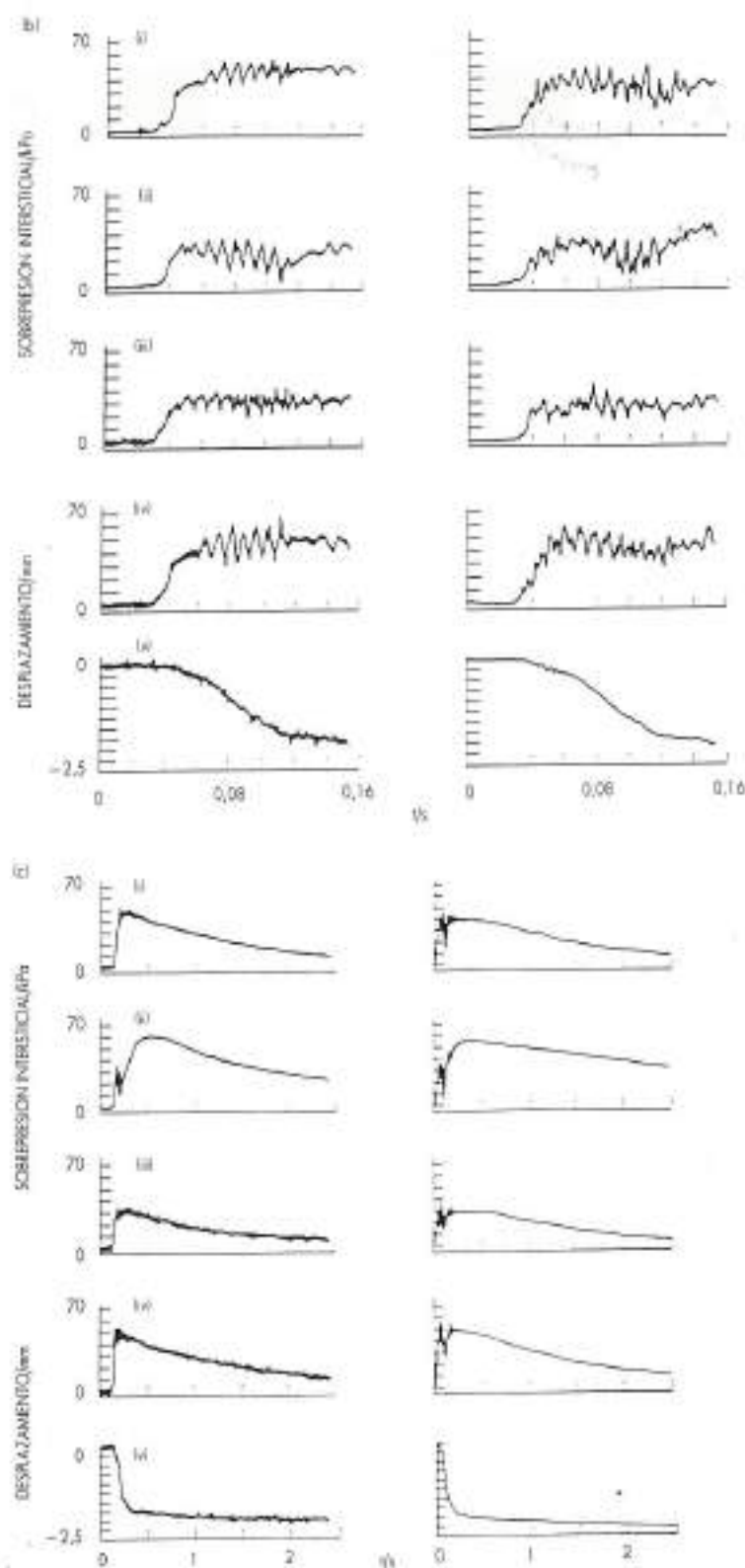


FIGURA 5b,c. Para descripción, ver figura 5a.

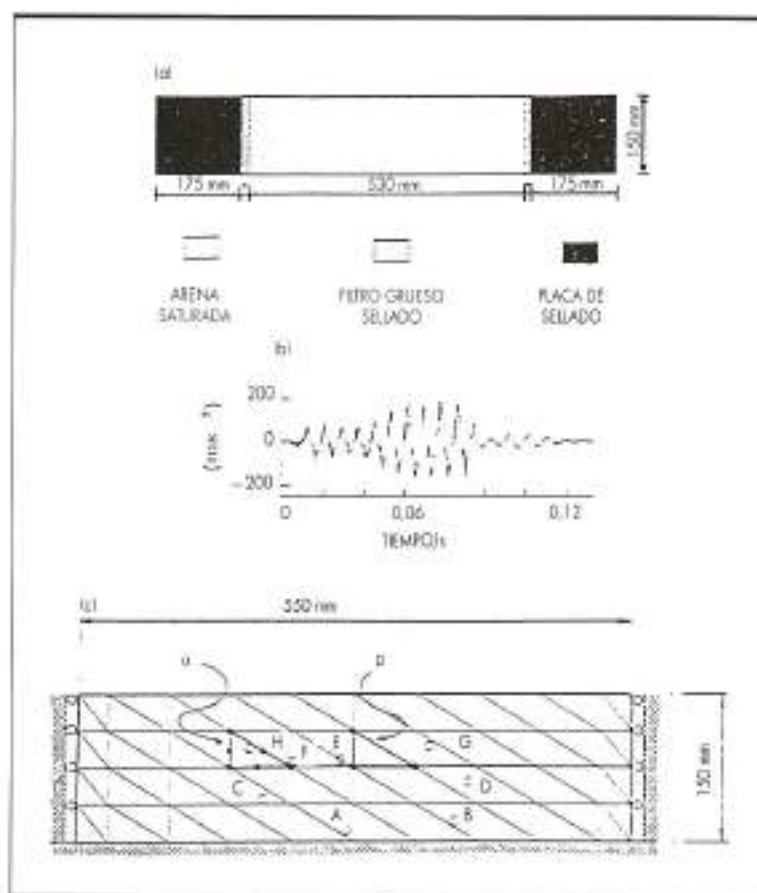


FIGURA 6a-c. Descripción en figura 6a.

tiendo los tensores de flujo plástico que la plasticidad tenga lugar tanto en carga como en descarga, mientras que los módulos plásticos H^L y H^U y D_{ij}^L proporcionan las constantes elásticas básicas. Estas cantidades pueden definirse directamente sin definir potenciales plásticos o de agotamiento, aunque, por supuesto, las definiciones clásicas proporcionan una referencia útil. Los detalles sobre el modelo utilizado en este artículo para las arenas pueden encontrarse en Pastor y Zienkiewicz (1986) y Pastor *et al.* (1988, 1990).

El modelo está expresado en función de los tres invariantes de tensiones: p' , la tensión efectiva media; q , la tensión desviadora; θ , el ángulo de Lode. Se utiliza convección vectorial al definir las direcciones n y m y la transformación al sistema cartesiano sigue el procedimiento detallado por Chan *et al.* (1988).

Las definiciones y los parámetros que hay que determinar se dan a continuación:

Vector direccional de carga

$$n_p = (1 + a_p) (M_f - \eta), \quad n_q = 1, \quad n_\theta = -\frac{1}{3} q M_g \cos 3\theta,$$

donde a_p , M_f son parámetros modales y η es el factor de tensiones definido como q/p' .

Vector de flujo plástico

Carga:

$$n_p^{gL} = (1 + a_p) (M_g - \eta), \quad n_q^{gL} = 1,$$

$$n_\theta^{gL} = -\frac{1}{3} q M_g \cos 3\theta,$$

donde a_p es un parámetro del material y M_g es la pendiente de la línea del estado crítico (Roscoe *et al.*, 1958) y está relacionada con el ángulo de rozamiento regional mediante:

$$M_g = 6 \sin \phi' / (3 - \sin \phi' \sin 3\theta).$$

Descarga:

$$n_p^{gU} = -|n_p^{gL}|, \quad n_q^{gU} = n_q^{gL}, \quad n_\theta^{gU} = n_\theta^{gL}.$$

Este se escoge para asegurar que tiene lugar la densificación durante la descarga.

Módulos plásticos

Carga:

$$H_1 = H_0 p' (1 - \eta/\eta_p)^4 (H_v + H_u) (\eta/\eta_{max})^{-1/DN},$$

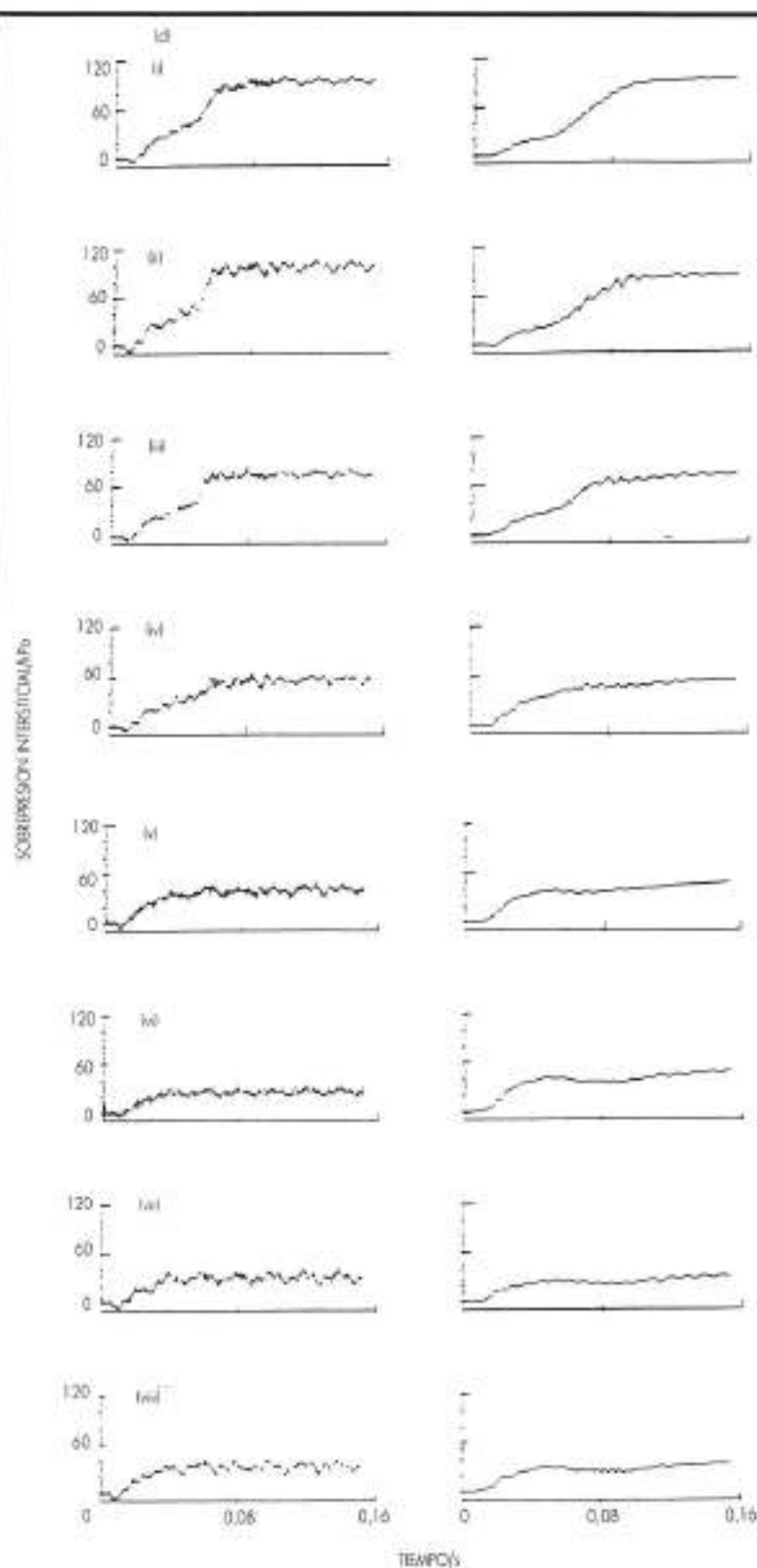


FIGURA 6d. Descripción en figura 6e.

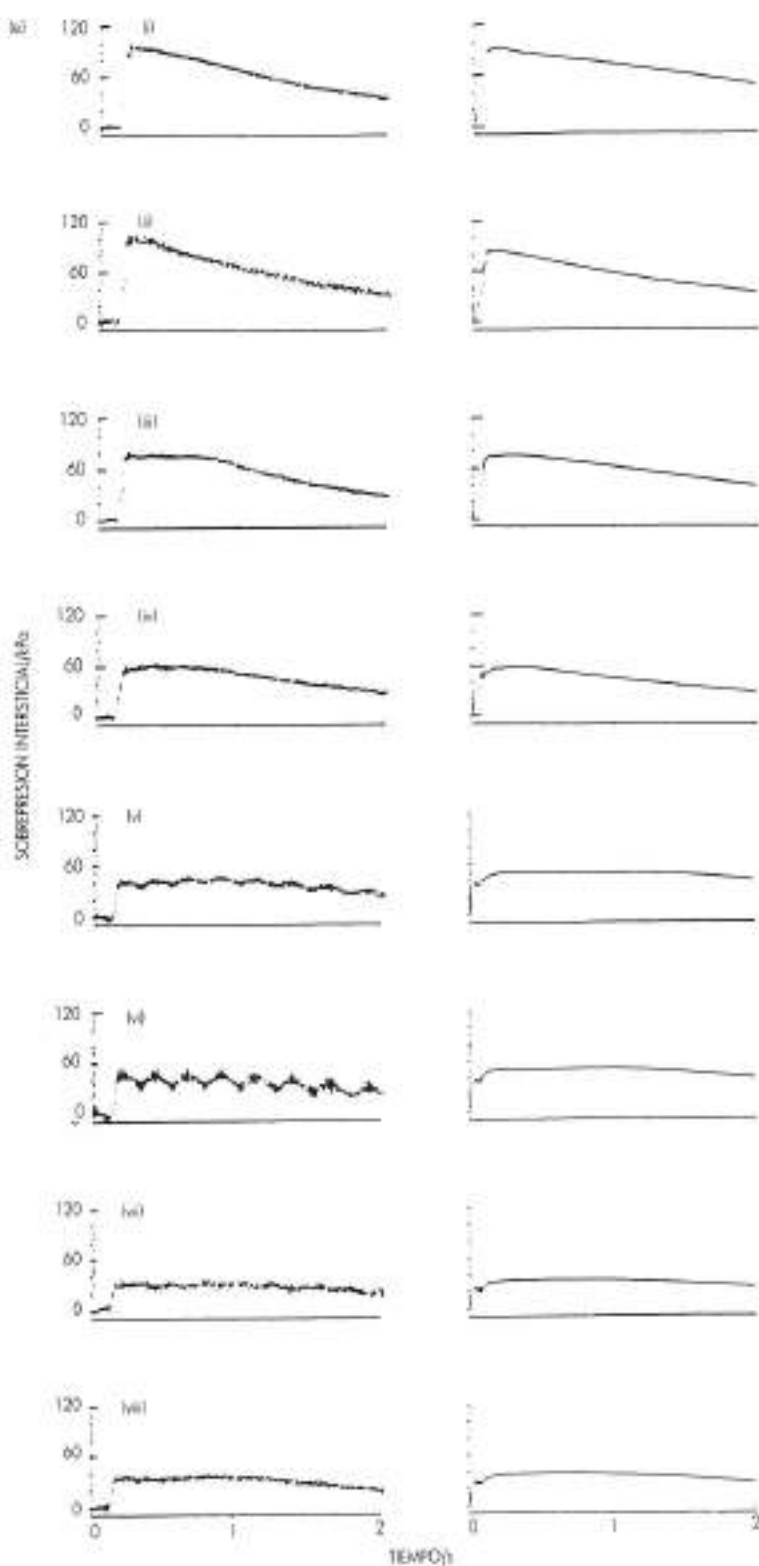


FIGURA 6. Modelo centrífugo y cálculo de una base de arena. (a) Modelo con base de arena saturada. (b) Aceleración de excitación. (c) Modelo de cálculo con localización de transductores de presión en el experimento. (d) solución numérica de las presiones nodales se ha interpolado en los mismos puntos. (e) Sobrepresión intersticial en respuesta de corta duración, a la izquierda se muestran los resultados experimentales, a la derecha los calculados. (f)-(h) corresponden a los puntos A-H, respectivamente. (i) igual que (a) pero con sobrepresión intersticial en respuesta de larga duración.

$$\eta_f = (1 + 1/\alpha_f)M_f$$

$$H_f = 1 - \eta_f/M_f, \quad H_s = \beta_0 \beta_1 \exp(-\beta_0 \xi)$$

$$\xi = \int |d\epsilon_p|$$

donde H_0 , γ_{DM} , β_0 , β_1 son parámetros del modelo, η_{max} es el máximo factor de tensiones alcanzado y ξ es la deformación plástica desviadora acumulada.

Descarga:

$$H_u = H_{u0} (\eta_u/M_u)^{-\gamma_u}$$

donde H_{u0} y γ_u son parámetros del modelo y η_u es el factor de tensiones donde comenzó la descarga.

Constantes elásticas

El módulo volumétrico es $K = H_{comp} p'$ y el módulo tangencial es $G = \frac{1}{2} H_{comp} p'$ donde tanto H_{comp} como H_{comp} son constantes del modelo.

Para realizar los cálculos, los vectores se transformarán utilizando las transformaciones adecuadas (Chan et al., 1988) al espacio cartesiano.

BIBLIOGRAFIA

- RABUSKA, I. (1971). Error bounds for finite element methods. *Nucl. Math.* 16, 322-333.
- RABUSKA, I. (1973). The finite element method with Lagrange multipliers. *Nucl. Math.* 20, 179-192.
- BIOT, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *J. appl. Phys.* 12, 155-164.
- BIOT, M. A. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. appl. Phys.* 26, 182-185.
- BIOT, M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, part I - low-frequency range; part II - higher frequency range. *J. acoust. Soc. Am.* 28, 168-191.
- BIOT, M. A., y WILLIS, P. G. (1957). The elastic coefficients of the theory of consolidation. *J. appl. Mech.* 24, 594-601.
- BOWEN, R. M. (1976). In *Theory of mixtures in continuum physics*, vol. III (ed. A. C. Eringen). New York: Academic Press.
- BREZZI, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers. *R.I.A.C.D.* 8, 129-151.
- CASTRO, G. (1969). Liquefaction of sands. Ph. D. thesis, Harvard University, U.S.A.
- CHAN, A. H. C. (1988). A unified finite element solution to static and dynamic problems in geomechanics. Ph. D. thesis, University College of Swansea, U.K.
- CHAN, A. H. C.; ZIENKIEWICZ, O. C., y PASTOR, M. (1988). Transformation of incremental plasticity relation from defining space to general Cartesian stress space. *Commun. appl. Num. Meth.* 4, 577-581.
- DAREY, H. (1856). *Les fontaines*. Publiques de la ville de Dijon, Delmont, Paris.
- GREEN, A. E., y ADKIN, J. E. (1960). Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics. London: Oxford University Press.
- GREEN, A. E. (1969). On basic equations for mixtures. *Q. J. Mech. appl. Math.* 22, 428-438.
- ISHIHARA, K., y OKADA, S. (1973). Yielding of overconsolidated sand and liquefaction model under cyclic stresses. *Soil Fils* 18, 57-72.
- KATONA, M. G., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1985). A unified set of single step algorithms. Part 3: The Beta-m method, a generalization of the Newmark scheme. *Int. J. Num. Meth. Engng* 21, 1845-1859.
- LEUNG, K. H. (1984). Earthquake response of saturated soils and liquefaction. Ph. D. Thesis, University College of Swansea, U.K.
- MROZ, Z., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1984). Uniform formulation of constitutive equations for clays and sands. *Mechanics of engineering materials* (ed. C. S. Desai & R. H. Gallagher), ch. 22. New York: Wiley.
- NEWMARK, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Proc. Am. Soc. civ. Engrs* 8, 67-94.
- PARK, K. C., y FELIPPA, C. A. (1983). Partitioned analysis of coupled systems. In *Computational methods for transient analysis* (ed. T. Belytschko & T. J. R. Hughes), ch. 3. Elsevier.
- PARK, K. C. (1983). Stabilization of partitioned solution procedure for a pore fluid-soil interaction analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng* 19, 1669-1673.
- PASTOR, M., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1986). A generalized plasticity, hierarchical model for sand under monotonic and cyclic loading. In *Numerical methods in geomechanics* (ed. G. N. Pande & W. F. van Impe), pp. 131-150. London: Jackson & Sons.
- PASTOR, M.; ZIENKIEWICZ, O. C., y CHAN, A. H. C. (1988). Simple models for soil behaviour and applications to problems of soil liquefaction. In *Numerical methods in geomechanics* (ed. G. Swoboda), pp. 169-180. A. A. Balkema.
- PASTOR, M.; ZIENKIEWICZ, O. C., y CHAN, A. H. C. (1990). Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour. *Int. J. num. Analyt. Meth. Geomech.* (In the press).
- PASTOR, M.; ZIENKIEWICZ, O. C., y LEUNG, K. H. (1985). Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. Part II. Non associative models for sands. *Int. J. Num. Analyt. Meth. Geomech.* 9, 477-498.
- PREVOST, J. L. H. (1982). Nonlinear transient phenomena in saturated porous media. *Comp. Meth. appl. Mech. Engng* 20, 3-8.
- ROSCOE, K. H.; SCHOFIELD, A. N., y WROTH, C. P. (1958). On the yielding of soils. *Géotechnique* 8, 22-53.
- SCHOFIELD, A. N., y WROTH, C. P. (1968). *Critical state soil mechanics*. New York: McGraw-Hill.
- SIMON, B. R.; WU, J. S. S.; CARLTON, M. W.; KAZARIAN, L. E.; FRANCE, E. P.; EVANS, J. H., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1985). Porous elastic dynamic structural models of rhesus spinal motion segments. *SPINE* 10, 494-507.
- SKEMPTON, A. W. (1961). Effective stress in soils, concrete and rocks, pore pressure and suction in soils. *Edn The British National Soc. Int. soc. Soil Mech. Fdn Engng*, 4-16.
- SMITH, I. M., y HOBBS, R. (1976). Biot analysis of consolidation beneath embankments. *Géotechnique* 26, 149-171.
- SWEET, J.; BARENTS, F. B. J.; VAN LOON-ENGLES, C. H., y VAN DER KOGEL, H. (1980). A method for dynamic soil-structure interaction problems. In *Proc. Num. Meth. for Non-linear Problems* (ed. C. Taylor, E. Hinton & D. R. J. Owen), pp. 197-207.
- TATSUOKA, T., y ISHIHARA, K. (1974). Yielding of sand in triaxial compression. *Soil Fils* 14, 63-76.
- TAYLOR, D. (1984). *Fundamentals of soil mechanics*. New York: Wiley.
- TERZAGHI, K. (1943). *Theoretical soil mechanics*. New York: Wiley.

URBAN, J., y MAROUDAS, A. (1986). Measurement of swelling pressure and fluid flow in the intervertebral disc with reference to creep. *Int. Mech. Engrs Publ.* 2, 63-69.

VENTER, K. V. (1987). Modelling the response of sand to cyclic loads. Ph. D. thesis, Department of Engineering, Cambridge University, U.K.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1982). Basic formulation of static and dynamic behaviour of soil and other porous material. In *Numerical methods in geomechanics* (ed. J. B. Martins). Boston and London: D. Reidel.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1984). Coupled problems and their numerical solution. In *Numerical methods in coupled systems* (ed. R. W. Lewis, P. Bettess & E. Hinton), ch. 1, pp. 35-38.

ZIENKIEWICZ, O. C., y BETTESS, P. (1982). Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions: general formulation and the validity of various simplifying assumptions. In *Soil mechanics-transient and cyclic loads* (ed. G. N. Pande & O. C. Zienkiewicz), ch. 1. New York: Wiley.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHANG, C. T., y BETTESS, P. (1980). Drained, undrained, consolidating dynamic behaviour assumptions in soils. *Géotechnique* 30, 385-395.

ZIENKIEWICZ, O. C.; HINTON, E.; LEUNG, K. H., y TAYLOR, R. L. (1980). Staggered, time marching schemes in dynamic soil analysis and selective explicit extrapolation algo-

ritms. In *Proc. 2nd Symp. on Innovative Numerical Analysis for the Engineering Sciences* (ed. R. Shaw et al.). University of Virginia Press.

ZIENKIEWICZ, O. C.; LEUNG, K. H., y HINTON, E. (1982). Earthquake response behaviour of soils with drainage. III. *Proc. 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics*, pp. 983-1002. Edmonton, Canada.

ZIENKIEWICZ, O. C., y MROZ, Z. (1984). Generalised plasticity formulation and applications to geomechanics. In *Mechanics of engineering materials* (ed. C. S. Desai & R. H. Gallagher), ch. 33. New York: Wiley.

ZIENKIEWICZ, O. C.; PAUL, D. K., y CHAN, A. H. C. (1988). Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems. *Int. J. num. Meth. Engrg* 26, 1039-1055.

ZIENKIEWICZ, O. C., y SHIOMI, T. (1984). Dynamic behaviour of saturated porous media: The generalised Biot formulation and its numerical solution. *Int. J. num. Anal. Meth. Geomech.* 8, 71-96.

ZIENKIEWICZ, O. C., y TAYLOR, R. L. (1985). Coupled problems - a simple time-stepping procedure. *Continuum appl. num. Meth.* 1, 233-239.

ZIENKIEWICZ, O. C., y TAYLOR, R. L. (1989) *The finite element method*, 4th edn. New York: McGraw-Hill.

BRIDON ROPES SUMINISTRARA 3.750 TONELADAS DE CABLE PARA UN PUENTE EN DINAMARCA

BRIDON ROPES LTD. ha conseguido un sustancioso contrato para el suministro de cable pretensado para el Puente «Storebaelt Western» de Dinamarca.

Los 6 kilómetros de longitud de este puente incorporarán 3.750 toneladas de cable BRIDON tipo «Super» de 15,7 mm y del tipo «Dyform» de 125,2 mm. El valor total del contrato asciende a 2 millones de libras esterlinas.

El «Storebaelt» [Gran Cinturón] es un canal de 18 km de ancho entre Fyn al oeste y Sjælland al este. El canal está dividido por las pequeñas islas de Sprogø. El puente Oeste cruzará desde Nyborg hasta la isla de Sprogø.

La segunda parte del «Storebaelt», el puente

Este, se construirá a continuación, mediante un puente suspendido que unirá la isla de Sprogø con Sjælland.

A finales de los años 60 BRIDON ROPES (antes British Ropes) suministró más de 4.000 toneladas de cordón espiroidal para el Puente Lillebaelt (Pequeño Cinturón), un puente colgante entre Jylland y Fyn.

Este es el tercer gran contrato que consigue BRIDON ROPES en los últimos cuatro meses. A éste le antecidieron los firmados en Estados Unidos con Simplex Wire & Cable Co. y Shell Offshore. Ello demuestra la capacidad de BRIDON, que en nuestro país está presente a través de su filial BRIDON ESPAÑA, S. A., para afrontar grandes proyectos.

CONSTRUIMOS SOLUCIONES



Obras que identifican nuestra forma de trabajar y califican la larga trayectoria de nuestra empresa.

Construimos grandes realidades que son el fruto de la técnica y la experiencia acumulada a lo largo de los años.

Así somos y así seguiremos:

construyendo futuro.



I.CO.S.



Ingeniería y Construcciones del Subsuelo, S. A.



Nudo Super-Sur, Autovía M-40 Madrid.

- Pilotes de pequeño y gran diámetro.
- Pantallas continuas, prefabricadas o plásticas.
- Elementos portantes.
- Hinca y extracción de tablas.

OFICINAS CENTRALES
Alcalá, 65 - 4º - 28014 Madrid
Teléfs.: 577 71 40 - 577 71 50
Telefax: 22038 GROUT E. Telefax: 576 88 58