

# Análisis lineal de la variabilidad a largo plazo del lecho en ríos de montaña

CRISTOBAL MATEOS (\*)

**RESUMEN.** Para ríos de fuerte pendiente, en avenidas concretas se presenta una aproximación lineal a las ecuaciones de evolución del cauce. Se discuten las condiciones para que sea aceptable la aproximación lineal y se aplica para estudiar las variaciones a largo plazo del lecho en ríos que reciben un afluente con una elevada proporción de arrastres sólidos.

**ABSTRACT.** A linear approximation to the bed evolution equations of a river with strong slope is presented for particular floods. The conditions that make acceptable this linear approximation are discussed. This linear approximation is applied to the study of the bed variation in the long term for rivers that receive a tributary with a high solid yield.

## INTRODUCCION

Ciertos ríos de montaña con cauces encajonados y de fuerte pendiente reciben algún afluente de fuerte aportación sólida y muy reducida aportación líquida (corrientes de barro) que se decanta en un delta. Si el delta es de algunos kilómetros de anchura y el afluente vaga erráticamente en el mismo esto se traduce en que el cauce experimenta a lo largo del tiempo fuertes variaciones de cota (eventualmente decenas de metros) en los puntos situados aguas arriba del extremo inferior del delta.

Se pretende presentar aquí un análisis simplificado de este tipo de situación, con vistas a estimar aproximadamente los parámetros estadísticos principales —media y desviación estándar— de los valores que trascurridos unos años podría alcanzar la cota del cauce.

## ECUACIONES DE EVOLUCION DEL CAUCE

Según se ha indicado, este análisis parte de ciertas simplificaciones que se irán explicitando, pero cuya adecuación a cada caso concreto deberá ser cuidadosamente valorada antes de aplicar el método.

Se pretende en este apartado indicar cómo se puede obtener para cada acontecimiento hidrológico concreto (avenida de 10 años, avenida de 50 años, etc.) unas ecuaciones lineales de transición del estado inicial al final.

Se considera la zona en estudio dividida en tramos de ancho constante y pendiente uniforme, numerados

de 1 a  $N$ . Los puntos de unión de tramos serán los nudos 1,2 ...  $N-1$  a los que se añaden los nudos 0, inicio del primer tramo y  $N$  terminación del último. Desde el punto de vista de evolución del cauce se entenderá que este nudo  $N$  se ha situado en un punto fijo, del que razonablemente se puede presumir que no va a ascender o descender en el futuro. Asimismo, se supone que en el nudo 0 es conocida la aportación de material sólido que lo atraviesa viniendo de aguas arriba. En la evolución del cauce se postula que los nudos pueden ascender o descender pero que (a los efectos del cálculo) cada uno de los tramos adquiere en tal caso una nueva pendiente uniforme.

Se admite también que la zona en estudio es lo suficientemente corta, la pendiente lo suficientemente fuerte y la aportación líquida del afluente lo suficientemente reducida como para poder aceptar que en una avenida el hidrograma es el mismo en todos los nudos. Esta última restricción no es esencial y puede ser evitada con algunos ajustes.

Para obtener unas ecuaciones de evolución durante un evento hidrológico consideraremos éste dividido en una serie de intervalos de tiempo,  $\Delta t$  (no necesariamente iguales) y lo suficientemente pequeños para que entre otras cosas se pueda considerar a los efectos prácticos que los cambios del lecho pueden ser despreciados durante cada uno de ellos. Los instantes principio y fin de cada intervalo los identificaremos por los índices 0,1,2 ...  $T$ . La ley de caudales se supone convertida a una forma escalonada de manera que el caudal  $Q(k)$  está fijo del instante  $k$  al  $k+1$ .

Indicaremos por  $z(i,k)$  la cota representativa del lecho en el nudo  $i$  en el instante  $k$  y por  $J(i,k)$  la pendiente del tramo  $i$  en el instante  $k$ . Claramente

(\*) Director del Laboratorio de Hidráulica, CEDEX, Catedrático ETSI. Caminos. UPM (Madrid).

$$J(i,k) = \frac{z(i,k) - z(i-1,k)}{L(i)} \quad (1)$$

Donde,  $L(i)$  es la longitud del tramo  $i$ .

Se acepta, en este análisis, que en avenidas naturales en cauces de fuerte pendiente es despreciable la aceleración local. Se aceptará, también, para este análisis que, supuestamente fijada la topografía en el intervalo en que fluye un caudal  $Q = Q(k)$  la longitud de los tramos es suficiente para poder aceptar que en cada uno de ellos el régimen es uniforme. Sobre esta base resultará que en cada tramo quedan determinados calado y velocidad (supuesta conocida la rugosidad) y también a partir de éstos es calculable con la fórmula que se estime más adecuada el caudal sólido en volumen  $G$ , que puede circular en el tramo (supuesta conocida la granulometría). En definitiva

$$G(i,k) = f(J,Q) = f(J(i,k),Q(k)) \quad (2)$$

En principio es factible acotar para cada tramo unos valores máximos  $J_m(i)$  y mínimos  $J_n(i)$  de la pendiente que se considera que no son físicamente sobrepuerables en un período largo de tiempo. Dentro de cada uno de estos intervalos la ecuación (2) se puede reemplazar que su mejor aproximación lineal en  $J$  y aceptar

$$G(i,k) = R(i,Q(k)) \cdot J(i,k) + S(i,Q(k)) \quad (3)$$

donde  $R(i,Q)$  y  $S(i,Q)$  son unas constantes que se pueden calcular de antemano en cada tramo para cada caudal. El error que la aproximación (3) introduce con respecto a los valores calculables por la (2) es por lo general muy reducido (normalmente inferior al 3%), desde luego acotable y previsiblemente no agrava el que tiene la fórmula (2) respecto de la realidad.

Utilizando la fórmula (1) puede ponerse:

$$G(i,k) = R(i,Q(k)) \cdot \frac{z(i,k) - z(i-1,k)}{L(i)} + S(i,Q(k))$$

Centrando la atención en un nudo  $i$  puede llegarle una aportación sólida lateral por medio del afluente en una cuantía instantánea  $\beta d(i)g(k)$ , donde  $\beta$  es un factor fijo para la avenida que refleja el grado en que la avenida en el afluente es más o menos excepcional que la del cauce principal,  $g(k)$  es la aportación sólida del afluente en el instante  $k$  de la avenida suponiendo que aportase la media de los valores posibles y  $d(i)$  es 1 ó 0 según que el afluente descargue o no justo en el nudo  $i$ . Si se hace un balance entre la aportación sólida que al nudo hace el tramo  $i$ , la que extrae el tramo  $i+1$  y lo que entrega el afluente refiriéndose al intervalo  $\Delta t$  que va entre  $k$  y  $k+1$  resulta un volumen sólido acumulado:

$$\Delta t(G(i,k) - G(i+1,k) + \beta d(i)g(k))$$

Con los criterios indicados este volumen deberá depositarse o extraerse en los tramos  $i$ ,  $i+1$  pero de forma que no se afecten las cotas de los nudos  $i-1$  e  $i+1$ , con lo que se concluye:

$$\begin{aligned} z(i,k+1) - z(i,k) = & \frac{2\Delta t}{w(i) + w(i+1)} \cdot \\ & \cdot R(i,Q(k)) \cdot \frac{z(i,k) - z(i-1,k)}{L(i)} + \\ & + S(i,Q(k)) - R(i+1,Q(k)) \cdot \frac{z(i+1,k) - z(i,k)}{L(i+1)} - \\ & - S(i+1,Q(k)) + a(i,k) \end{aligned} \quad (4)$$

Que es en diferencias finitas una ecuación de difusión, cuya estabilidad requiere unos valores suficientemente pequeños de  $\Delta t$ , usualmente horas, según el criterio de Von Neumann.

Con los oportunos cambios de notación la ecuación (4) puede ponerse

$$\begin{aligned} z(i,k+1) = & a(i,k) \cdot z(i-1,k) + \\ & + b(i,k)z(i,k) + c(i,k)z(i-1,k) + \\ & + \beta d(i) \cdot \frac{2g(k)}{w(i) + w(i+1)} + x(i,k) \end{aligned} \quad (5)$$

Donde  $a(i,k)$ ,  $b(i,k)$ ,  $c(i,k)$  dependen solamente del nudo de que se trate, del caudal circulante y del intervalo de tiempo considerado, mientras que  $x(i,k)$  depende solamente del nudo y del intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

Para el último nudo por ser punto fijo, se tendrá:

$$z(N,k+1) = z(N,k) \quad (6)$$

y para el primero valdrá una adaptación de la fórmula (5).

$$\begin{aligned} z(0,k+1) = & b(0,k) \cdot z(0,k) + \\ & + c(0,k) \cdot z(1,k) + x(0,k) + \\ & + \beta d(0) \cdot \frac{2g(k)}{w(1)} + ae(k) \end{aligned} \quad (7)$$

Donde no hay término en  $a(0,k)$  y en  $ae(k)$  se recoge la repercusión del caudal sólido que el río principal entrega a la zona en estudio.  $a$  refleja si la aportación sólida es mayor o menor que la esperable en condiciones medias para esa avenida.

Utilizando las matrices columna:

$$Z(K) = (z(0,k) \dots z(N,k))^T$$

$$D = (0 \ d(1) \ d(2) \dots d(N))^T$$

$$P = (1 \ 0 \dots 0)^T$$

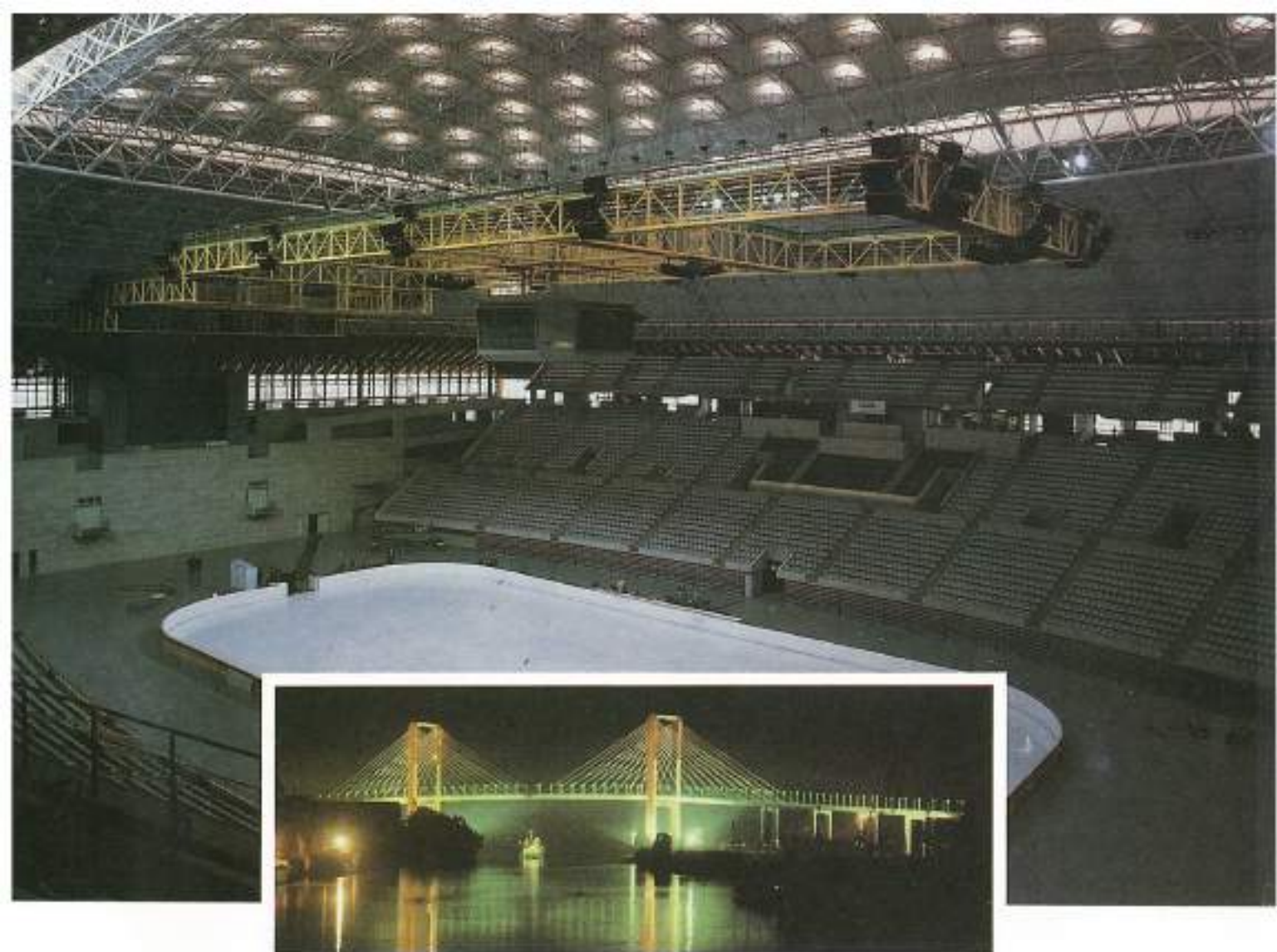
$$X(K) = (x(0,k) \ x(1,k) \dots x(N-1,k) \ 0)^T$$

y las matrices cuadradas:

$$I = \text{matriz unidad de orden } N+1 \ [M(k): \text{ ver figura 1.}]$$

y poniendo:

$$h(k) = \Delta t \cdot g(k)$$



# COMPROMETIDOS CON NUESTRO TIEMPO



Comprometidos en la vida diaria  
y en los acontecimientos que suponen un hito en la historia.  
Como los Juegos Olímpicos y  
la Exposición Universal de 1992.

En ambos está DRAGADOS. Colaborando con entusiasmo y compartiendo la labor de todos los que han hecho posible que, en 1992, el mundo se dé cita en Barcelona y Sevilla.

**DR**  
GRUPO  
**DRAGADOS**  
Y CONSTRUCCIONES



**Depuradora de Pontevedra y Marín.**



**CONSELLERÍA DE ORDENACIÓN  
DO TERRITORIO E OBRAS PÚBLICAS**  
Dirección Xeral de Obras Públicas.



**Depuradora de Santiago de Compostela.**

**POR  
NUESTRAS  
OBRAS  
NOS  
CONOCERAN**



**Colectores Generales de Elviña.**



**Ampliación Depuradora de Ferrol.**



**CUBIERTAS**

**Y MZOV, S.A. CIA. GRAL. DE CONSTRUCCIONES**

DELEGACIÓN PARA GALICIA:  
Juana de Vega, 2, 5º y 8º 15003 LA CORUÑA

|          |          |          |          |          |       |            |            |            |
|----------|----------|----------|----------|----------|-------|------------|------------|------------|
| $M(k) =$ | $b(0,k)$ | $c(0,k)$ | 0        | 0        | ..... | 0          | 0          | 0          |
|          | $a(1,k)$ | $b(1,k)$ | $c(1,k)$ | 0        | ..... | 0          | 0          | 0          |
|          | 0        | $a(2,k)$ | $b(2,k)$ | $c(2,k)$ | ..... | 0          | 0          | 0          |
|          | .....    | .....    | .....    | .....    | ..... | .....      | .....      | .....      |
|          | 0        | 0        | 0        | 0        | ..... | $a(n-1,k)$ | $b(n-1,k)$ | $c(n-1,k)$ |
|          | 0        | 0        | 0        | 0        | ..... | 0          | 0          | 1          |

FIGURA 1.

las ecuaciones (5), (6) y (7) se pueden resumir en la ecuación matricial

$$Z(k+1) = M(k) \cdot Z(k) + \beta h(k) \cdot Y \cdot D + \alpha e(k) \cdot F + X(k) \quad (8)$$

La aplicación reiterada de esta fórmula da:

$$\begin{aligned} Z(T) &= M(T-1)Z(T-1) + \\ &+ \beta h(T-1)Y \cdot D + \alpha e(T-1)F + X(T-1) = \\ &= M(T-1)M(T-2)Z(T-2) + \\ &+ \beta(M(T-1)h(T-2) + h(T-1))YD + \\ &+ (M(T-1)X(T-2) + X(T-1) + \\ &+ \alpha(M(T-1)e(T-2) + e(T-1))F = \dots = \\ &= \dots = M(T-1) \cdot M(T-2) \cdot M(T-3) \dots \\ &\dots M(0) \cdot Z(0) + \beta(M(T-1)M(T-2) \dots \\ &\dots M(1)h(0) + \dots + M(T-1)h(T-2) + \\ &+ h(T-1))YD + \alpha(M(T-1)M(T-2) \dots \\ &\dots M(1)e(0) + \dots + M(T-1)e(T-2) + \\ &+ e(T-1))F + M(T-1)M(T-2) \dots \\ &\dots M(1)X(0) + \dots + M(T-1)X(T-2) + \\ &+ X(T-1) \end{aligned}$$

Que con las oportunas simplificaciones de notación puede escribirse como:

$$Z(T) = AZ(0) + \alpha B + \beta CD + U \quad (9.0)$$

En esta expresión queda claro que las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $U$  dependen solamente de la ley de caudales líquidos considerados y de las correspondientes leyes de caudales sólidos medios,  $\alpha$  y  $\beta$  recogen para cada avenida la variación aleatoria supuesta en la cuantía de las aportaciones sólidas. Es decir, esta ecuación implica que a partir del estado inicial del cauce,  $Z(0)$  y del conocimiento de la boca de llegada del afluente, recogido en  $D$ , se calcula el estado final con una operación lineal fija característica de cada avenida.

### SUCESION ALEATORIA DE AVENIDAS

La gran variedad de posibles transcursores del año hidrológico admite en principio una cierta distribución de

probabilidad que a los efectos prácticos puede suplirse con la consideración de unos pocos años típicos  $H_i$ , a los que se asigna unas probabilidades,  $p_i$ , de manera que la distribución resultante sea lo más parecida posible a la de partida. Para cada uno de esos años representativos se pueden calcular los valores de las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $U$ . Asimismo los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  son aleatorios (de media 1).  $\alpha$  acusa las fluctuaciones de pendiente inmediatamente antes de la zona en estudio y  $\beta$  refleja el grado de concomitancia entre las lluvias en la cuenca del río principal y las de un afluente y su distribución se puede inferir a partir de esa correlación.

La matriz columna  $D$  que refleja la disposición de las bocas de salida va variando con el tiempo. A los efectos de cálculo admitiremos que los cambios se producen al cambiar el año hidrológico de una forma estocástica en función del estado anterior (cadena de Markov). Si con  $D_A$  se indica la variable aleatoria que recoge la probabilidad de las distintas bocas en el año cuyo efecto se está analizando y con  $D_N$  la correspondiente al año que le seguirá, recogiendo en una matriz  $P$  las probabilidades de transición podrá ponerse:

$$D_N = P \cdot D_A \quad (9.1)$$

Si ahora se designa con  $Z_A$  la variable aleatoria que representan las cotas del cauce al comienzo del año hidrológico y con  $Z_N$  la correspondiente al final del año la relación (9) permite escribir:

$$Z_N = AZ_A + \alpha BF + \beta CD_A + U \quad (9.2)$$

En las ecuaciones (9.1) y (9.2) que resumen la evolución esperable del cauce no solo  $Z_A$ ,  $D_A$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son variables aleatorias independientes sino que también son independientes de las variables aleatorias  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $U$  toda vez que a priori no se conoce las avenidas que van a llegar ni su orden.

### ESTIMACIONES ESTADISTICAS

El carácter lineal de las expresiones (9.1) y (9.2) y el hecho de que las distribuciones de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $U$  sean fijas así como la matriz de transiciones,  $P$ , permite encarar con relativa facilidad la obtención de la media y la desviación estándar de  $Z_A$  y  $D_N$  a partir de las de  $Z_A$  y  $D_A$ .

Si la media de una variable se indica poniendo una traza horizontal sobre ella tomando medias en (9.1) y (9.2) se tiene:

$$\overline{D_N} = P \overline{D_A} \quad (10.1)$$

$$\overline{Z_N} = \overline{A} \cdot \overline{Z_A} + \overline{B} + \overline{C} \overline{D_A} + \overline{U} \quad (10.2)$$

Para estimar cuál va a ser la evolución media en un plazo de  $m$  años, bastará entrar en las fórmulas (10.1) y (10.2) dando a  $\overline{Z_A}$  y  $\overline{D_A}$  los valores  $Z_i$  y  $D_i$  correspondientes al estado actual y luego aplicar  $n-1$  veces esas fórmulas utilizando como valores  $\overline{Z_A}$  y  $\overline{D_A}$  los  $\overline{Z_N}$  y  $\overline{D_N}$  resultado de la etapa anterior.

En las fórmulas (10.1) la matriz  $P$  se supone conocida y las matrices  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$ ,  $\overline{C}$  y  $\overline{U}$  se pueden calcular de una vez por todas calculando  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $U$  para cada uno de los años  $H_i$  y promediándolos con pesos  $p_i$ .

Para obtener las desviaciones estándar se comenzará por escribir las fórmulas (9.1) y (9.2) haciendo explícitas las componentes:

$$D_{n,i} = P_{ij} D_{A,i} \quad (9.1 \text{ bis})$$

$$Z_{n,i} = \alpha_i Z_{A,i} + \alpha_i b_{ij} f_j + \beta_i D_{A,i} + U_i \quad (9.2 \text{ bis})$$

Si cada una de estas fórmulas se multiplica por sí misma cambiando los índices  $i$  por  $j$  y  $l$  por  $m$  y se toman medias, resulta:

$$\overline{D_{n,i} D_{n,j}} = P_{ij} P_{jm} \overline{D_{A,i} D_{A,m}} \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} \overline{Z_{n,i} Z_{n,j}} = & \overline{\alpha_i \alpha_j P_{ij} Z_{A,i} Z_{A,j}} + \overline{\alpha_i b_{ij} Z_{A,i}} + \\ & + \overline{\alpha_i U_j Z_{A,i}} + \overline{b_{ij} U_j} + \overline{c_{ij} U_j D_{A,i}} + \\ & + \overline{b_{ij} P_{jm} Z_{A,i}} + \overline{\alpha_i c_{jm} Z_{A,i} D_{A,m}} + \overline{\alpha_j c_{jm} Z_{A,m} D_{A,i}} + \\ & + \overline{\alpha_j U_m Z_{A,i}} + \overline{b_{ij} U_m} + \overline{c_{jm} U_m} + \overline{c_{jm} U_m D_{A,m}} + \\ & + \overline{\alpha_i b_{ij} b_{jm}} + \overline{b_{ij} c_{jm} D_{A,i}} + \overline{\beta_i c_{jm} P_{jm} D_{A,i} D_{A,m}} + \overline{U_i U_j} \quad (11.2) \end{aligned}$$

Si además se sustituye en (9.1 bis)  $i$  por  $j$  y  $l$  por  $m$ , se multiplica por (9.2 bis) y se toman medias, resulta:

$$\begin{aligned} \overline{Z_{n,i} D_{n,j}} = & \overline{\alpha_i P_{jm} Z_{A,i} D_{A,m}} + \overline{b_{ij} P_{jm} D_{A,m}} + \\ & + \overline{c_{ij} P_{jm} D_{A,i} D_{A,m}} + \overline{U_i P_{jm} D_{A,m}} \quad (11.3) \end{aligned}$$

A partir de los datos de las avenidas representativas se calcula  $\overline{\alpha_i \alpha_j}$ ,  $\overline{\alpha_i b_{ij}}$ ,  $\overline{\alpha_i c_{jm}}$ ,  $\overline{b_{ij} b_{jm}}$ ,  $\overline{b_{ij} c_{jm}}$ ,  $\overline{c_{ij} c_{jm}}$ ,  $\overline{\alpha_i U_j}$ ,  $\overline{b_{ij} U_j}$ ,  $\overline{c_{ij} U_j}$  y  $\overline{U_i U_j}$ , y análogamente a como se indicó para las medias las fórmulas (11.1), (11.2) y (11.3) con el concurso de las (10.1) y (10.2) permiten obtener en forma iterativa los momentos de segundo orden  $\overline{Z_{n,i} Z_{n,j}}$ ,  $\overline{D_{n,i} D_{n,j}}$  y  $\overline{Z_{n,i} D_{n,j}}$  para los años sucesivos.

Obviamente, la desviación estándar en el nudo  $i$  para el año que interese vendrá dada por:

$$S_i = \sqrt{\overline{Z_{n,i} Z_{n,i}} - \overline{Z_{n,i}}^2} \quad (12)$$

## APLICACION DEL METODO

Un modelo matemático (FONDESTOC) se ha desarrollado siguiendo las ideas antes expuestas. El modelo se ha aplicado al río Grande en la confluencia con el torrente de barro conocido como Volcán. El afluente tiene un delta de unos 6 km de ancho y el río tiene un punto fijo en una presa situada 4 km aguas abajo. El río tiene fuertes pendientes que varían entre el 2% y el 5%.

En el modelo la zona se ha dividido en 10 tramos de 1 km de longitud.

Debido a la imposibilidad práctica de estimar la matriz  $P$  y de la falta de precisión que puede esperarse en  $\beta^2$ , se han considerado diversas posibilidades.

Como resultado cabe destacar que en un período inferior a 100 años la desviación estándar puede alcanzar los 50 m en el comienzo de la zona.

Este valor se puede esperar tanto más pronto cuanto más pequeños sean los valores de la diagonal de  $P$  y cuanto mayor sea  $\beta^2$ . La consecuencia práctica es que para reducir la variabilidad del lecho a valores aceptables, es necesario estabilizar la descarga del Volcán. Esto podría conseguirse confinándolo en el segundo tramo.

## CONCLUSIONES

A. En una avenida concreta, es posible aproximar con ecuaciones lineales las leyes de evolución del lecho si las pendientes son fuertes y se cumplen las restantes condiciones asumidas en el artículo.

B. Esta aproximación lineal es especialmente útil si no se pretende una estimación exacta. Así es adecuada para manejar una familia de avenidas con el fin de estimar los parámetros estadísticos de las fuertes variaciones de cota que pueden experimentar los ríos de montaña que tienen un afluente con un delta muy ancho y una fuerte aportación sólida.

C. La aplicación al río Grande muestra que el riesgo de variaciones fuertes de nivel puede ser evitado confinando la descarga de su afluente el Volcán.

## BIBLIOGRAFIA

- FELLER: An Introduction to Probability Theory and its Applications. WILEY.  
LEFEBVRE, B.: Simulation Physique de Laves Torrentielles. XXII I.A.H.R. Congress, Lausanne, págs. 71-76.  
LINSLEY; KOHLER; PAULUS: Hydrology for Engineers. Ed. MacGraw Hill.  
NOLASCO AGÜERO, P.: Comentarios acerca de la erosión hídrica en la quebrada de Humahuaca. Proyección, mayo-agosto 1986.  
TAKAHASHI, T.: Debris Flow on Prismatic Open Channel, Jour. Hyd. Div. Asce., núm. 3, 1980, págs. 331-336.