

Transmisión bajo una placa vertical rígida de ondas con incidencia oblicua

IÑIGO J. LOSADA (*)
MIGUEL A. LOSADA (**)
ANTONIO ROLDAN (*)

RESUMEN. En este artículo se analiza los coeficientes de reflexión y transmisión de un tren de ondas incidiendo oblicuamente sobre una placa vertical rígida aplicando el método de desarrollo en serie de autofunciones (EEM). Para comprobar la validez de esta técnica comparamos los resultados numéricos con los datos experimentales de Wiegel, 1960. El ajuste entre la presente solución y los datos experimentales de Wiegel y la teoría aproximada basada en el Boundary Integral Equation, método BIEM, usado por Liu y Abbaspour, 1982, es bueno. Como en otras soluciones teóricas, las mayores discrepancias se producen para períodos muy cortos y barreras extendidas hasta posiciones cercanas a la superficie y al fondo. El coeficiente de transmisión decrece monótonamente con el ángulo de incidencia. Este comportamiento cambia con las barreras anchas.

ABSTRACT. The interaction of oblique incidence water waves with a vertical rigid thin barrier is analyzed to determine the reflection and transmission coefficients by an eigenfunction expansion method (EEM). The accuracy of this technique is shown by comparing computed results with experimental data by Wiegel, 1960. The agreement between present solution and experimental data, Wiegel's approximate theory and the boundary integral equation, method BIEM used by Liu and Abbaspour, 1982, is good. As for other theoretical solutions discrepancies become apparent for very short periods and for barriers extending close to the bottom or to the surface. Further, the transmission coefficient increases monotonously with the angle of incidence. This behaviour changes with barrier's width.

1. INTRODUCCION

En lugares donde la energía no es excesiva, se usa como diques placas verticales extendiéndose desde la superficie hasta el fondo. La efectividad de este tipo de soluciones ha sido examinada, evaluando los coeficientes de reflexión y transmisión, tanto experimentalmente por Wiegel, 1960, y Jones et al., 1979, entre otros, como teóricamente Ursell, 1947, para aguas profundas; Wiegel, 1960, para aguas intermedias, y recientemente por Liu y Abbaspour, 1982, utilizando el Boundary Integral Equation Method (BIEM).

La solución de Ursell es aplicable solamente en aguas profundas, mientras que Wiegel, 1960, usando la teoría de ondas de pequeña amplitud, obtuvo una solución aproximada, la cual asume que la energía transmi-

tida es igual a la energía bajo la placa vertical, obteniendo para el modo progresivo:

$$T_r = \sqrt{((2k(h-d) + \sin^2 \alpha)(2k(h-d) + \sin^2 \alpha)) / (2kh + \sin^2 \alpha)} \quad (1)$$

donde:

T_r = Coeficiente de transmisión.

k = Número de onda de las olas incidentes.

h = Profundidad.

d = Longitud sumergida del dique.

En este artículo aplicamos el Método de Desarrollo en Serie de Autofunciones (EEM) para examinar la propagación de ondas incidiendo tanto oblicua como normalmente sobre una placa vertical. El EEM se ha usado profusamente para analizar la dispersión de ondas por diferentes clases de estructuras, tales como áreas circulares de cilindros, Dalrymple et al., 1988, y Dalrymple y Martin, 1990. Los coeficientes de reflexión y transmisión para diferentes longitudes de placa sumergida se ajustan bien a los datos experimentales de Wiegel, al menos, tan bien como los calculados por BIEM. Finalmente, se muestra que el coeficiente de transmisión crece monótonamente con el ángulo de incidencia. Este

(*) Becario, Grupo de Ingeniería Oceanográfica y Costera, Departamento de Ciencias y Técnicas del Agua, Universidad de Cantabria, Santander.

(**) Catedrático, Miembro del Center for Applied Coastal Research, Grupo de Ingeniería Oceanográfica y Costera, Departamento de Ciencias y Técnicas del Agua, Universidad de Cantabria, Santander.

comportamiento difiere del caso de ondas propagándose por barreras anchas. Para este caso, la variación del coeficiente de transmisión con el ángulo de incidencia depende de las características del tren de ondas incidente y la geometría de la barrera (Losada et al., 1990).

FORMULACION DEL PROBLEMA

El problema que planteamos consiste en una placa que se extiende a lo largo del eje y en $x = 0$, sumergida una longitud, d , en agua de profundidad constante, h . El tren de ondas que incide oblicuamente sobre la placa se propaga por la región $x < 0$ (llamada región 1) hacia la región $x > 0$ (llamada región 2), formando un ángulo θ con la normal n a la barrera, figura 1.

Assumiendo que el fluido es incompresible y no viscoso, el movimiento es irrotacional y las condiciones de contorno de superficie libre pueden ser linealizadas, el potencial de velocidades se puede expresar como la parte real de:

$$\Phi(x, y, z) = (ig/\sigma) \cdot a \cdot \Phi(x, z) \cdot e^{-i\lambda y - \sigma t} \quad (2)$$

donde a = amplitud de la onda, g = la aceleración de la gravedad, λ = parámetro que relaciona el modo progresivo del número de onda k_0 con el ángulo de incidencia, θ , $\lambda = k_0 \sin \theta$, y σ = la frecuencia angular de la onda. La ecuación que gobierna el problema para el potencial reducido $\Phi(x, z)$ es la ecuación de Helmholtz:

$$(\partial^2 \Phi / \partial x^2) + (\partial^2 \Phi / \partial z^2) - \lambda^2 \Phi = 0 \quad -h \leq z \leq 0 \quad (3)$$

Las siguientes condiciones de contorno son necesarias:

$$(\partial \Phi / \partial z) - ((I/h)\Phi) = 0, \quad z = 0 \quad (4)$$

donde $I = (\sigma^2 h / g)$

$$\partial \Phi / \partial z = 0, \quad z = -h \quad (5)$$

$$\partial \Phi / \partial n = \partial \Phi / \partial x = 0, \quad -d \leq z \leq 0 \quad (6)$$

En el infinito, se tiene que cumplir la condición de radiación de Sommerfeld que requiere que las ondas no se reflejen del infinito. Además, las soluciones en $x < 0$

y $x > 0$ deben ser continuas en la interfase de separación, con lo que debe cumplirse la igualdad de presiones y flujos en el hueco en $x = 0$.

SOLUCION COMPLETA

En la región 1, $x < 0$, la función Φ , en variables separadas es:

$$\Phi_1(x, y) = I_1(z) \cdot e^{-i\lambda_1 x} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n I_n(z) \cdot e^{i\lambda_n x} \quad (7)$$

donde el primer término representa el tren de ondas progresivo que incide oblicuamente a la placa, mientras el sumatorio representa, para $n = 1$, el modo progresivo reflejado y para $n > 1$, los modos evanescentes. k_1 es el coeficiente de reflexión, siendo además una cantidad compleja. El parámetro q_n viene dado por:

$$q_n = \sqrt{(k^2 - \lambda^2)} \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

La dependencia con la profundidad del problema viene dada por el término $I_n(z)$, el cual se puede representar por:

$$I_n(z) = (ig/\sigma) \cdot ((\cos k_n(h+z))/\cos k_n \cdot k_0 \cdot h) \quad n=1,2,3,\dots \quad (9)$$

$$I = k_n \cdot h \cdot \tan k_n \cdot k_0 \cdot h \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Esta ecuación tiene una raíz real $\pm k_1$ y un número infinito de raíces imaginarias. Se elige las raíces cuadradas de modo que satisfagan:

$$\text{Re} \{ \sqrt{(k^2 - \lambda^2)} \} \geq 0 \text{ y } \text{Im} \{ \sqrt{(k^2 - \lambda^2)} \} \leq 0 \quad (11)$$

Es de notar que el tren de ondas incidente, por conveniencia, es de amplitud unidad. Aguas abajo de la barrera $x < 0$, región 2, el potencial es:

$$\Phi_2(x, z) = I_1(z) \cdot e^{-i\lambda_1 x} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(z) \cdot e^{-i\lambda_n x} \quad (12)$$

donde los coeficientes A_n dan el tren de ondas propagado.

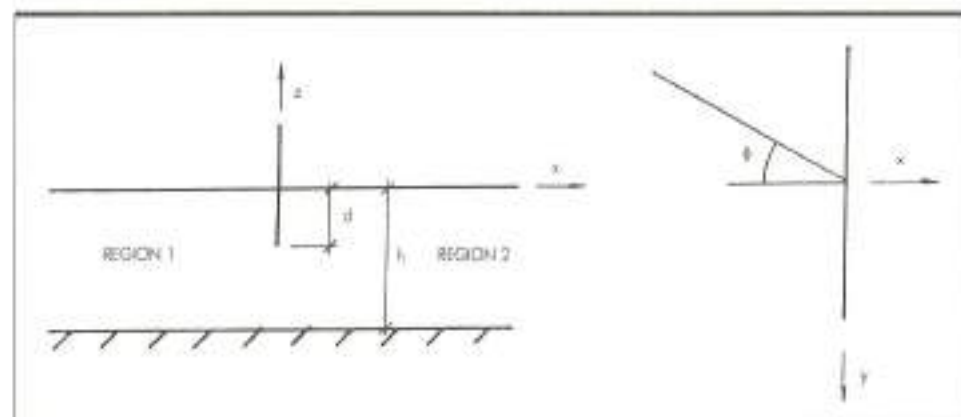


FIGURA 1. Sistema coordinado y definiciones de regiones y parámetros.

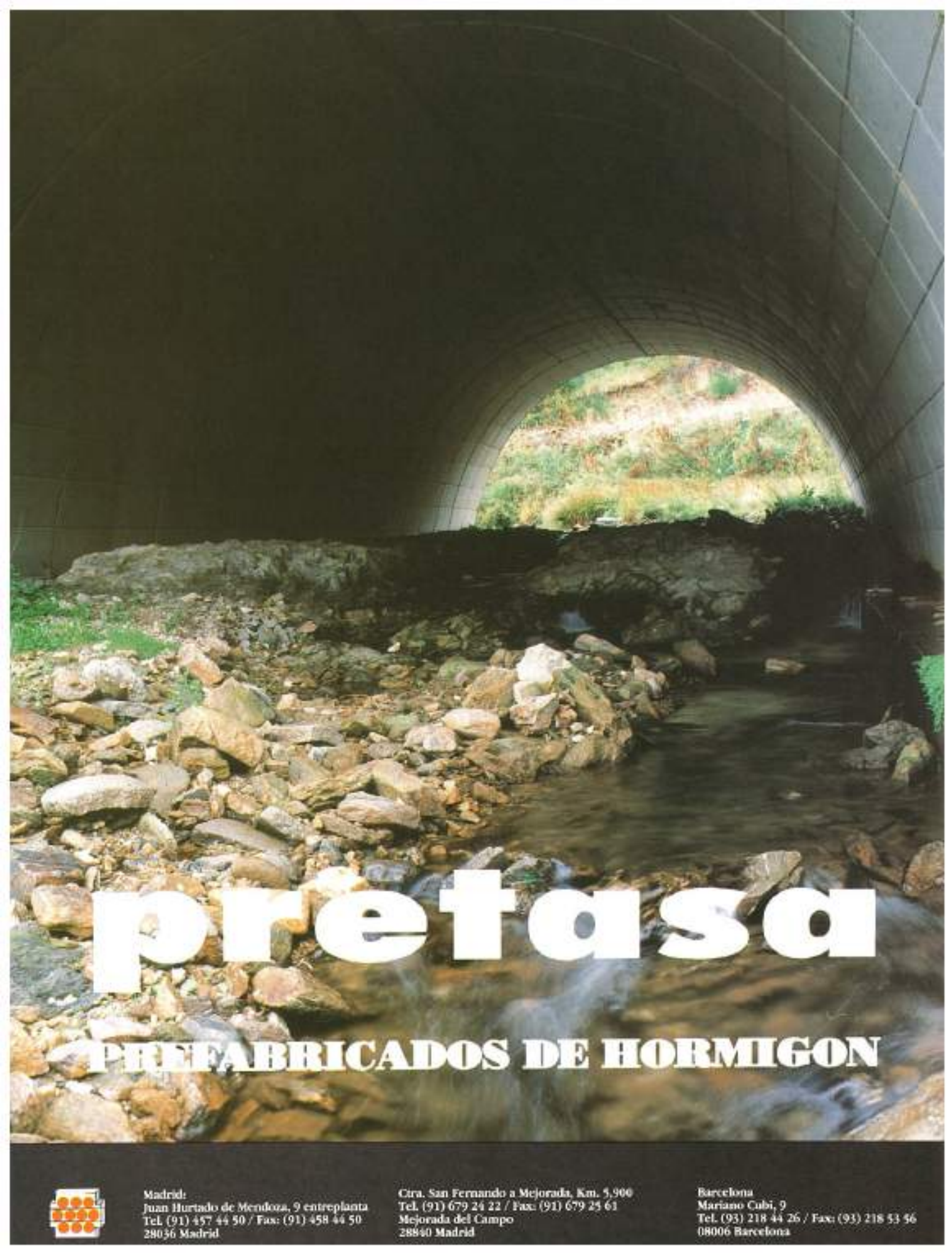
Algunas de las obras más bellas no son nuestras.



Nuestra admiración por la obra bien hecha, sea por la mano del hombre o por la Naturaleza, nos obliga a ser especialmente exigentes con nuestro propio trabajo. Porque nos gusta la belleza del Monument Valley tanto como la precisión de una pirámide o la majestad del Partenón. Son verdaderas lecciones magistrales que un ingeniero, o un arquitecto, debe registrar en su sensibilidad, para que influyan en su juicio a la hora de crear y construir cada nuevo proyecto.

Con lecciones tan magníficas, en **OCISA** nos sentimos obligados a dar lo mejor de nosotros mismos, tal y como se espera de quien tiene la misión de poner en sus obras los cinco sentidos de su criterio profesional. Y los otros cinco de su criterio humano.





pretasa

PREFABRICADOS DE HORMIGON



Madrid:
Juan Hurtado de Mendoza, 9 entreplanta
Tel. (91) 457 44 50 / Fax: (91) 458 44 50
28036 Madrid

Ctra. San Fernando a Mejorada, Km. 5,900
Tel. (91) 679 24 22 / Fax: (91) 679 25 61
Mejorada del Campo
28840 Madrid

Barcelona
Mariano Cubi, 9
Tel. (93) 218 44 26 / Fax: (93) 218 53 56
08006 Barcelona

Para conseguir el acuerdo de las soluciones en $z = 0$, aplicamos en primer lugar la condición de flujo (en la dirección x). La velocidad en el agujero $-h < z < -d$ puede representarse por $iF(z)$. Aguas arriba de la placa, la velocidad viene dada por:

$$-iq_1 I_1(z) + i \sum R_n q_n I_n(z) = \begin{cases} iF(z) & -h \leq z \leq -d \\ 0 & -d < z < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Es bien conocido que el conjunto de eigen-funciones $\{\cos h \cdot k_n (h+z), n = 1, 2, \dots\}$ es un conjunto completo de funciones ortogonales, con:

$$\int_{-h}^0 \cos h \cdot k_n (h+z) \cdot \cos h \cdot k_m (h+z) \cdot dz = \delta_{nm} \cdot P^2 \quad (14)$$

$$\delta_{nm} = 0, \quad n \neq m; \quad \delta_{nn} = 1$$

$$P^2(k_n) = (\sin h \cdot 2k_n h + 2k_n h) / 4k_n \quad (15)$$

Multiplicando cada lado de la ecuación 13 por $I_m(z)$ e integrando entre $-h < z < 0$, obtenemos una ecuación para R_m :

$$R_m = (1/(q_m N^2(k_m))) \cdot \int_{-h}^{-d} F(z) \cdot \cos h \cdot k_m (h+z) \cdot dz \quad n > 1 \quad (16)$$

$$-1 + R_1 (1/q_1 N^2(k_1)) \cdot \int_{-h}^{-d} F(z) \cdot \cos h \cdot k_1 (h+z) \cdot dz \quad (17)$$

Igualmente, la velocidad a través del agujero $-h < z < -d$ puede darse en términos del potencial aguas abajo:

$$A_m = (1/(q_m N^2(k_m))) \cdot \int_{-h}^{-d} F(z) \cdot \cos h \cdot k_m (h+z) \cdot dz \quad n > 1 \quad (18)$$

$$-1 + A_1 = (1/q_1 N^2(k_1)) \cdot \int_{-h}^{-d} F(z) \cdot \cos h \cdot k_1 (h+z) \cdot dz \quad (19)$$

Por ello, con $A_n = R_n$ se cumple la continuidad de las velocidades en $z = 0$ para cualquier valor de z . Como ya han mencionado Dalrymple y Martín, 1990, hay tres importantes aplicaciones fruto de la igualdad de estos coeficientes:

(1) Hay tanta reflexión como transmisión.

(2) Como se ha demostrado anteriormente, la condición de flujo en la interfase $z = 0$ se satisface automáticamente.

(3) Definiendo el coeficiente de transmisión como $T_r = 1 - A_1$, la relación entre los coeficientes de transmisión y reflexión es:

$$T_r + R = 1 \quad (20)$$

Partiendo de las dos condiciones de acuerdo, flujo de masa cero en $z = 0$ para $-d \leq z \leq 0$ e igualdad de presiones en $z = 0$ para $-h \leq z \leq -d$, se puede definir series duales debido al hecho de que solamente una expansión en eigenfunciones es posible. Dalrymple y

Martín, 1990, aplicaron este procedimiento para obtener las condiciones de acuerdo de un problema en la dirección y .

Usando la definición del potencial ϕ_1 , la condición de flujo de masa queda:

$$-iq_1(z) + i \sum_{n=1}^{\infty} R_n I_n(z) q_n = I_1 \quad -d \leq z \leq 0 \quad (21a)$$

La condición de presión es completa si aplicamos la igualdad de los potenciales ϕ_1 y ϕ_2 en el agujero $-h \leq z \leq -d$, obteniendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2R_n I_n(z) = 0 \quad -h \leq z \leq -d \quad (21b)$$

Las dos condiciones, ecuaciones 21a y 21b, pueden ser combinadas para obtener una ecuación mixta, la cual especifica el potencial o la velocidad a lo largo de la profundidad. Esta condición es:

$$G(z) = 0 \text{ en } -h \leq z \leq 0, \text{ donde:} \quad (22)$$

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2R_n I_n(z) \quad -h \leq z \leq -d \quad (23a)$$

$$G(z) = -iq_1 I_1(z) + i \sum_{n=1}^{\infty} R_n I_n(z) q_n \quad -d \leq z \leq 0 \quad (23b)$$

Para determinar R_n aplicamos el método de mínimos cuadrados, con lo que:

$$\int_{-h}^0 |G(z)|^2 dz$$

es un mínimo que lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\int_{-h}^0 G^*(z) (\partial G / \partial R_m) dz = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (24)$$

donde:

$$\partial G / \partial R_m = 2I_m(z) \quad -h \leq z \leq -d \quad (25a)$$

$$\partial G / \partial R_m = iq_m I_m(z) \quad -d \leq z \leq 0 \quad (25b)$$

G^* = es el conjugado de G

Truncando las ecuaciones 24 a N términos, obtenemos una matriz compleja de $N \times N$ términos que resolviendo con una rutina adecuada nos da simultáneamente los N valores de R_n .

SOLUCIONES

El procedimiento examinado en la sección anterior se ha aplicado primero para el caso de aguas profundas e intermedias, donde Wiegel, 1960, proporcionó datos experimentales. En las figuras 2, 3 y 4 se dibuja el coeficiente de transmisión $T_r = 1 - R$ frente a d/h para diferentes profundidades de agua, $kh = 4.272, 2.1362$ y 1.06 e incidencia normal $\theta = 0$. Se dibuja también la solución aproximada de Wiegel, ecuación 1, y la solu-

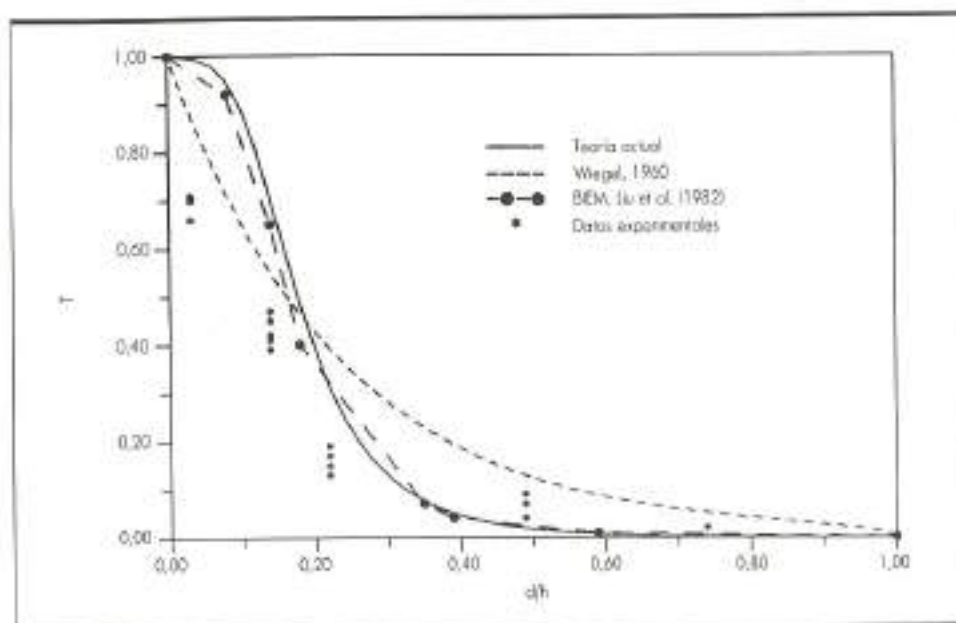


FIGURA 2. Coeficiente de transmisión, $k_h = 4.272$, $N = 40$.

ción numérica BIEM dada por Liu y Abbaspour, 1982. Se muestra que los resultados del EEM se ajustan a los datos experimentales tan bien como los resultados dados por el BIEM. Las mayores discrepancias para todos los métodos aparecen para períodos muy cortos y para valores grandes y pequeños de d/h . Esto se explica por el hecho de que se produce pérdida de energía cerca del extremo de la placa, la cual no se tiene en cuenta en este método, así como debido a la proximidad de los contornos. La figura 5 muestra la variación del coefi-

ciente de transmisión, T_v , con el ángulo de incidencia, θ , para $kh = 2.1362$ y $d/h = 0.3$. T_v decrece monótonamente con θ . Este comportamiento es diferente de la propagación oblicua bajo una barrera ancha. Bajo tales condiciones y para una barrera ancha de $b = 0.35$ m, T_v decrece monótonamente a cero, como puede verse en la figura 5. Este conjunto de datos se tomó de Losada et al., 1990.

La figura 6 muestra la variación de T_v con d/h para una profundidad $kh = 2.1362$ y para diferente número

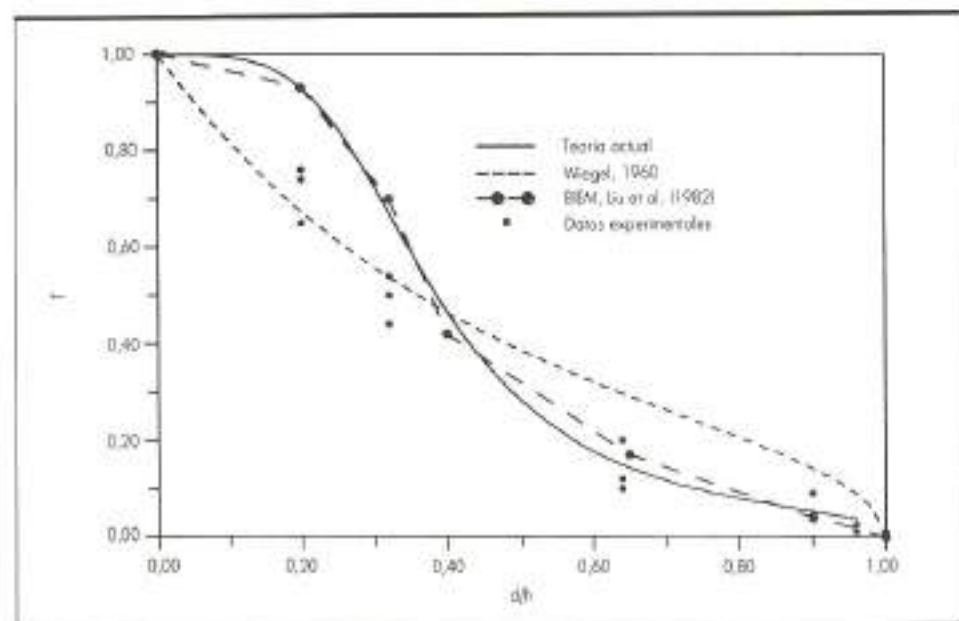


FIGURA 3. Coeficiente de transmisión, $k_h = 2.1362$, $N = 40$.

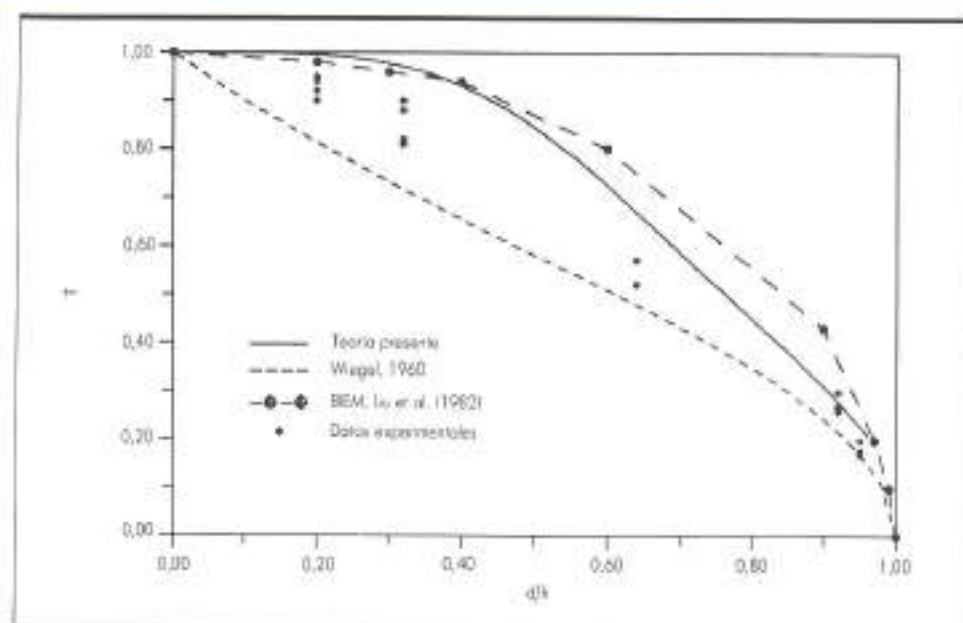


FIGURA 4. Coeficiente de transmisión, $k_0 h = 1.06$, $N = 40$.

de términos de la serie, N . Se puede observar que, para este caso, para $N > 25$ no se obtiene un error de truncado significativo.

CONCLUSIONES

Se analiza por el método del desarrollo en serie de autofunciones la incidencia oblicua de un tren de ondas sobre una barrera rígida. Se determina y compara con datos experimentales, Wiegel, 1960, y resultados numé-

ricos, Liu y Abbaspour, 1982, los coeficientes de reflexión y transmisión:

1. El Método del Desarrollo en Serie de Eigenfunciones y la condición mixta de series duales proporcionan una evaluación del coeficiente de transmisión con buen ajuste a los datos experimentales y los resultados numéricos de Liu y Abbaspour.

2. Parece que en los casos estudiados aquí, truncando series a $N = 25$ no tenemos error significativo de truncamiento.

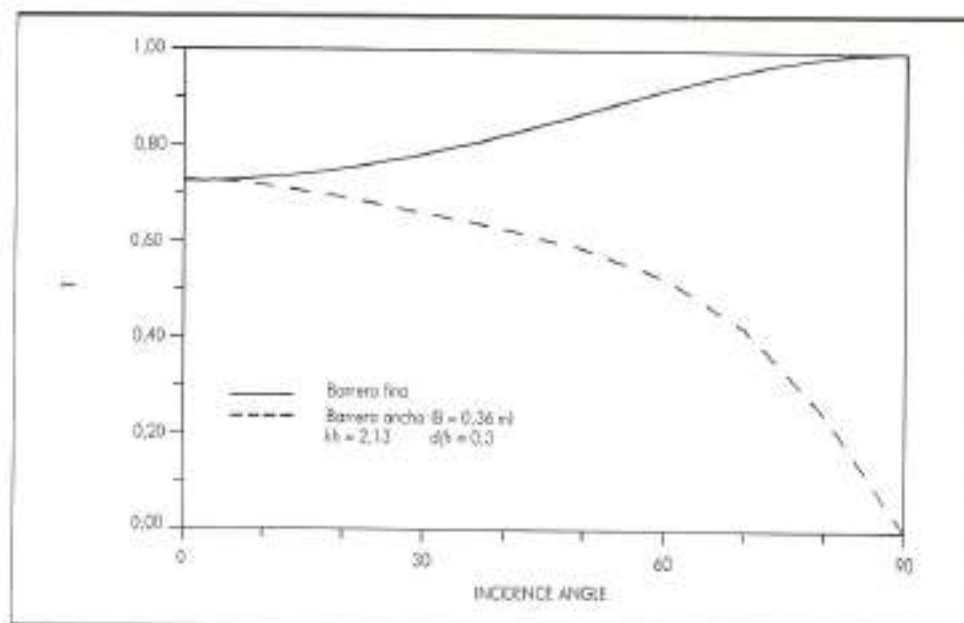


FIGURA 5. Coeficiente de transmisión frente al ángulo de incidencia, θ ; $k_0 h = 2.1362$, $d/h = 0.3$, $N = 40$.

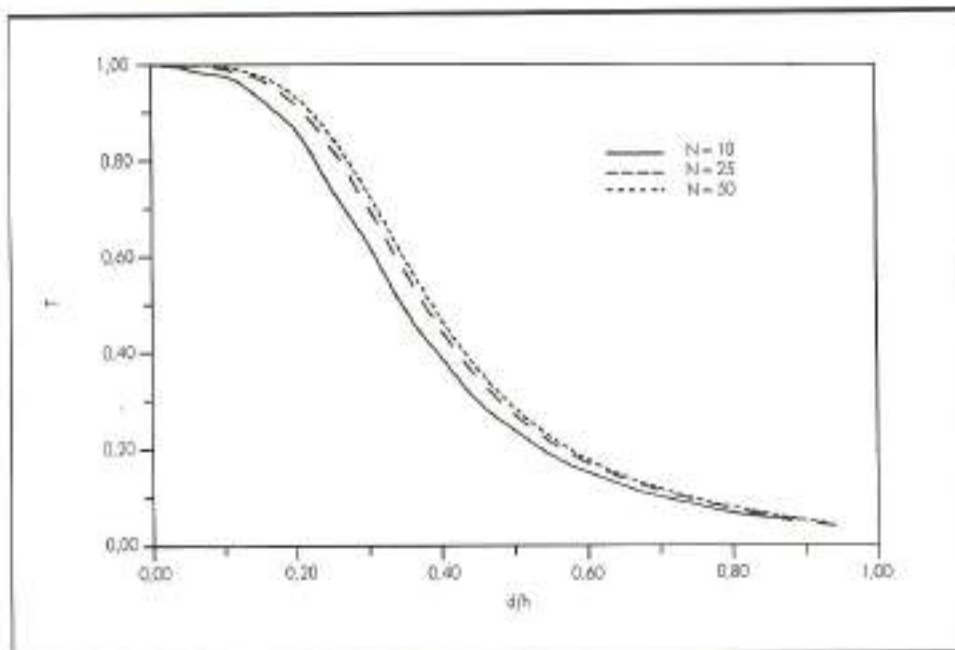


FIGURA 6. Coeficiente de transmisión frente a la longitud sumergida d/h ; $N = 10$, $N = 25$, $N = 50$.

3. El coeficiente de transmisión crece monótonamente con el ángulo de incidencia. El ancho de la barrera modifica significativamente este comportamiento.

LISTA DE SIMBOLOS

- a = Amplitud de la ola incidente.
- A = Coeficiente de los términos propagados.
- d = Longitud sumergida del dique.
- $F(z)$ = Función genérica de la profundidad.
- g = Aceleración de la gravedad.
- $G(z)$ = Función de la condición de acuerdo mixto.
- h = Profundidad.
- i = $\sqrt{-1}$.
- $J(z)$ = Función de la profundidad.
- k = Número de onda.
- N = Número de términos de las series.
- P = Función integral.
- q = Componente del número de onda en la dirección x .
- R = Coeficiente de reflexión.
- t = Tiempo.
- T = Período.
- T_r = Coeficiente de transmisión.
- x, y, z = Coordenadas espaciales.
- Φ, φ = Potencial de velocidad.
- λ = Componente del número de onda en la dirección y .
- σ = $2\pi/T$ = Frecuencia angular.
- Γ = $\sigma^2 h / g$.

AGRADECIMIENTOS

La investigación realizada aquí está financiada por la Comi-

sión Interministerial de Ciencia y Tecnología, contrato número. PB89-0381.

I. J. Losa y A. J. Roldán, durante la preparación de este artículo, eran becarios del Programa de Formación del Personal Investigador del Ministerio de Educación y Ciencia (España).

REFERENCIAS

- DALRYMPLE, R. A.; SEO, S. N., y MARTIN, P. A. (1988). Water wave scattering by rows of circular cylinders. *Proc. 21st Int. Coastal Engrg. Conf. ASCE*, Torremolinos (Spain), págs. 2216-2228.
- DALRYMPLE, R. A., y MARTIN, P. A. (1990). Wave diffraction through offshore breakwaters. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., ASCE*, vol. 116, núm. 6, nov./dic. págs. 727-741.
- JONES, D. B.; LEE, J. J., y RAICHLEN, F. (1979). A transposable breakwater for nearshore applications. *Proceedings of the Specialty Conference Civil Engineering in Ocean IV*, vol. 1, págs. 433-456.
- LIU, P. L. F., y ABBASPOUR, M. (1982). Wave scattering by a rigid thin barrier. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE*, vol. 108, núm. WW4, nov. 1982, págs. 479-491.
- LOSADA, M. A.; LOSADA, I. J., y DALRYMPLE, R. A. (1991). Water waves on crown breakwaters. *Advances in Coastal Engineering*, Nov. 1991. Center for Applied Coastal Research, University of Delaware, Newark, DE (USA).
- URSELL, F. (1947). The effect of a fixed vertical barrier on a surface waves in deep water. *Proc. of the Cambridge Phil. Society*. Vol. 43, part 3, págs. 374-382.
- WIEGEL, R. L. (1960). Transmission of wave past a rigid vertical thin barrier. *Journal of Waterways and Harbors Division, ASCE*, vol. 86, núm. WW1, marzo 1960, págs. 1-12.