

Una nueva solución a las ecuaciones de las ondas de orilla en playas con pendiente no uniforme

ANTONIO LECHUGA ALVARO (*)

RESUMEN. En este artículo se estudia una nueva solución a las ecuaciones de las ondas de orilla en playas de pendiente no uniforme, para lo cual se resuelve lo que puede ser considerado como un problema inverso: Dada la estructura matemática del potencial de velocidad de las ondas de orilla calcular la forma de perfil de la playa, mediante la resolución de la pertinente ecuación diferencial en función de unos parámetros predeterminados. La aplicación y el ajuste de la teoría se llevó a cabo sobre datos reales en la playa de Zahora (costa atlántica de Cádiz). La comparación de resultados medidos y calculados se consideró muy satisfactoria.

ABSTRACT. This article studies a new solution for the edge wave equations on beaches with non-uniform slopes, for which a solution is found for a problem that could be considered just the opposite: given the mathematical structure of the velocity potential of the edge waves, to calculate the shape of the beach profile, using the solution provided by the relevant differential equation as a function of certain predetermined parameters. The appearance and adjustment of the theory are carried out using real data taken from Zahora Beach (Atlantic Coast of Cadiz). The comparison between the results measured and calculated is considered to be highly satisfactory.

1. INTRODUCCION

Para tratar de estudiar la interacción entre el oleaje incidente en una playa y las ondas de orilla en el caso de batimetría no uniforme la solución analítica es prácticamente inabordable, aun en el caso de ecuación lineal $L(\Phi) = 0$.

Como es hoy en día bien conocido, la citada interacción oleaje incidente-onda de orilla es responsable de multitud de formas sedimentarias en las playas. En particular se puede considerar vinculados en mayor o menor grado los llamados «beach cups» (o formas ritmicas en plata) «rip currents» (corrientes de retorno), crescentic bars (barras curvas en forma de media luna), etc.

Holman y Bowen referencian otras soluciones. Ball, en 1967, obtuvo la solución en el caso de playa exponencial. En este caso, la expresión del potencial, Φ , es extraordinariamente compleja en base a series hipergeométricas.

Nuestro enfoque, en este punto, es cualitativamente distinto, y se puede resumir como sigue: para poder estudiar el proceso de resonancia ondas de orilla-oleaje es

necesario conocer los potenciales de velocidad y, además, que éstos sean expresados de una manera lo más simple posible, ya que si no los términos no lineales de las ecuaciones tienen expresiones desorbitadas. Por tanto, para el modo de orden cero, que es donde se producen las interacciones, fijamos la estructura del potencial de velocidades en función de un parámetro y calculamos la expresión de la batimetría que dé lugar a dicha estructura. Teniendo en cuenta que ésta es escogida de manera que cumpla las condiciones de contorno, y que además es la que correspondería al siguiente término en un desarrollo en exponenciales, comprobamos la validez de la solución, que en este caso es exacta.

2. ECUACION EN AGUAS POCO PROFUNDAS

La ecuación lineal en aguas poco profundas $L(\Phi) = 0$ se escribe como sabemos:

$$-\Phi_{xx} + g(h\Phi_x)_x + g(h\Phi_y)_y = 0 \quad (1)$$

Hacemos:

$$\Phi = ag/w \cdot \varphi(x) \cos ky \cos wt \quad (2)$$

En principio suponemos que $h = h(x)$, es decir el perfil se mantiene en la misma forma a lo largo de la playa.

(*) Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Jefe del Sector de Costos del CEPYC-ICEDEX.

En este caso, $L(\Phi) = 0$, se escribe como sigue; una vez efectuadas las resoluciones apropiadas:

$$dh/dx - d\phi/dx + h(d^2\phi/dx^2 - \phi k^2) + \phi w^2/g = 0 \quad (3)$$

En el caso de que $h = \text{tg } \beta \cdot x$, la solución en ϕ es la ya conocida del problema de autovalores

$$\phi(x) = e^{-kx} \quad L_n(2kx) \\ w^2 = (2n+1) kg \text{tg } \beta \quad (4)$$

Teniendo en cuenta lo que ya indicamos, la estructura de la función $\phi(x)$, parece en principio adecuado probar la solución de (3) de tal forma que

$$\phi(x) = e^{-kx} + be^{-2kx} \quad (5)$$

Estas funciones $\phi(x)$ dependientes de un parámetro, b , cumplen las condiciones pedidas al potencial de velocidades de las edge waves para el modo 0 y engloban la solución de playa uniforme para $b = 0$. Por otra parte el proceso de interacción con el oleaje es posible abordarlo, aunque la complejidad de las ecuaciones resultantes sea muy superior a las del caso considerado de playa uniforme.

Introduciendo (5) en la ecuación (3), teniendo en cuenta que

$$\phi_x = k(e^{-kx} + 2be^{-2kx}) \\ \phi_{xx} = -k^2(e^{-kx} + 4be^{-2kx})$$

tenemos:

$$-dh/dx (e^{-kx} + 2be^{-2kx}) + h(3bk^2 e^{-kx} + w^2/g (e^{-kx} + be^{-2kx})) = 0 \quad (6)$$

La ecuación (6) es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden no homogénea. Si dividimos todos los términos por $-k e^{-kx}$ y pasamos el tercer término al segundo miembro obtenemos

$$dh/dx (1 + 2be^{-kx}) - 3kbe^{-kx} h = w^2/gk \cdot (1 + be^{-kx})$$

Como vemos la solución del problema planteado se reduce a la obtención $h(x)$ que cumpla las apropiadas condiciones de contorno.

3. SOLUCION DE LAS ECUACIONES EN $h(x)$

La ecuación (6) la vemos de solucionar teniendo como incógnita la función de batimetría $h(x)$.

La ecuación homogénea, se escribe:

$$dh/dx (1 + 2be^{-kx}) - 3kbe^{-kx} h = 0$$

La solución de la anterior es fácil, ya que se trata de una ecuación con variables separadas. Tenemos por tanto:

$$dh/h = 3kb e^{-kx} / (1 + 2b e^{-kx}) dx = \\ = -3/2 \ln (1 + 2b e^{-kx}) \\ \ln h = \ln (1 + 2b e^{-kx})^{-3/2} + C_1$$

de donde,

$$h = C(1 + 2b e^{-kx})^{-3/2} \quad (7)$$

Aplicando el método de variación de constantes a la solución (7) de la ecuación homogénea tendremos:

$$dh/h = dC/dx (1 + 2b e^{-kx})^{-3/2} + \\ + 3/2 C (1 + 2b e^{-kx})^{-5/2} 2b k e^{-kx}$$

Introduciendo el valor de dh/dx de (8) en la ecuación no homogénea a resolver, obtenemos:

$$dC/dx (1 + 2b e^{-kx})^{-1/2} = w^2/gk (1 + be^{-kx}) \\ dC/dx = w^2/gk (1 + be^{-kx}) (1 + 2b e^{-kx})^{1/2} = \\ = w^2/gk (1 + 2be^{-kx})^{1/2} + w^2/kg be^{-kx} \cdot (1 + 2be^{-kx})^{1/2} \quad (8)$$

Integrando se obtiene:

$$C = w^2/gk^2 (1u ((u+1)/(u-1)) - u^3/3 - 2u) + C_0 \quad (9)$$

Si efectuamos el cambio:

$$(1 + 2be^{-kx})^{1/2} = u \quad (10)$$

obtenemos:

$$h = w^2/gk^2 1/u^3 (1u ((u+1)/(u-1)) - 2u + C_0 - u^2/3) \quad (11)$$

Se ha de cumplir que para $x = 0$, $h = 0$, con lo cual:

$$u_x = 0 = u_0 = (1 + 2b)^{1/2} \quad (12)$$

$$h = w^2/gk^2 1/u^3 (1u ((u+1)/(u-1)) - 2u + C_0 - u^2/3) + \\ + 1/3 (u_0^3 - u^3) + 2(u_0 - u) \quad (13)$$

Como vemos es bastante complicada. Su representación gráfica para distintos valores del parámetro $2b$ se dibuja en la figura 1 en términos adimensionales.

$$(kx, h/gk^2 / w^2)$$

De (13) se obtiene que para $b = 0$, $u = 1$, con lo que

$$h = w^2/gk z$$

Como precisamente el coeficiente de z sería igual a $\text{tg } \beta$ obtenemos

$$w^2/gk = \text{tg } \beta$$

que nos da el valor de la frecuencia de playa uniforme.

Para x tendiendo a infinito u tiende a 1, con lo que

$$h = w^2/gk z + w^2/gk^2 (1u (2/(u_0+1)) + \\ + 1/3 (u_0^3 - 1) + 2(u_0 - 1))$$

4. CONSIDERACION ACERCA DE $h(x)$ Y SU CAMBIO EN LA FRECUENCIA NATURAL. UNA PRUEBA EN LA PLAYA DE ZAHORA (CADIZ)

Si por efecto del transporte sólido en dirección normal a la playa, a consecuencia del oleaje incidente, podemos suponer que se produce un cambio de perfil partiendo de una pendiente uniforme a una pendiente representable por (13), como consecuencia de esta situación se produce un cambio en la frecuencia natural de las ondas de

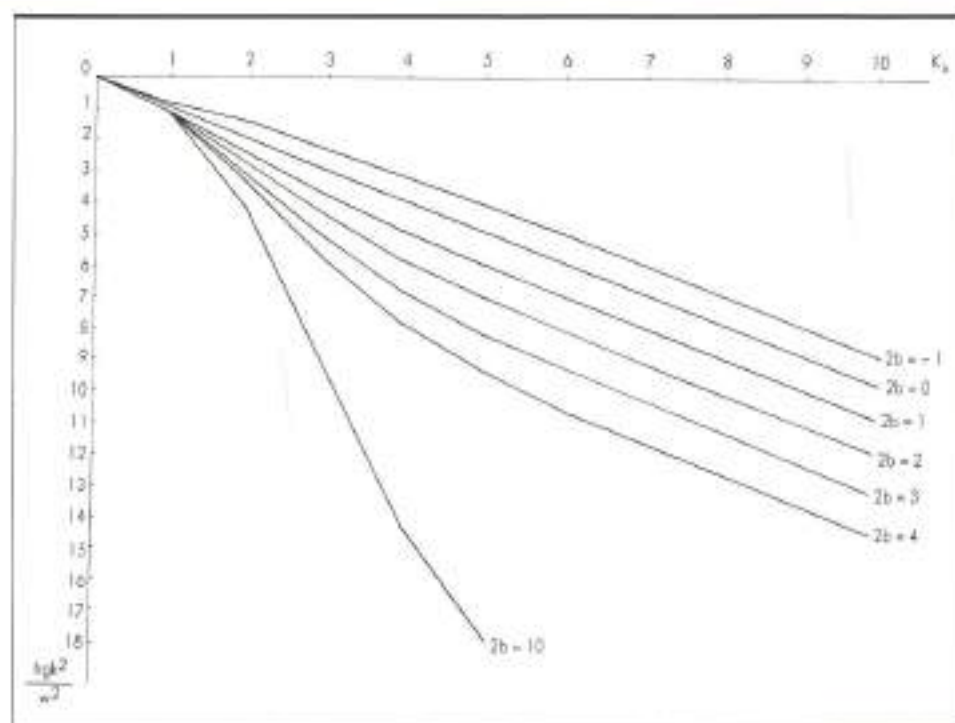


FIGURA 1. Perfiles adimensionales derivados de la expresión (31).

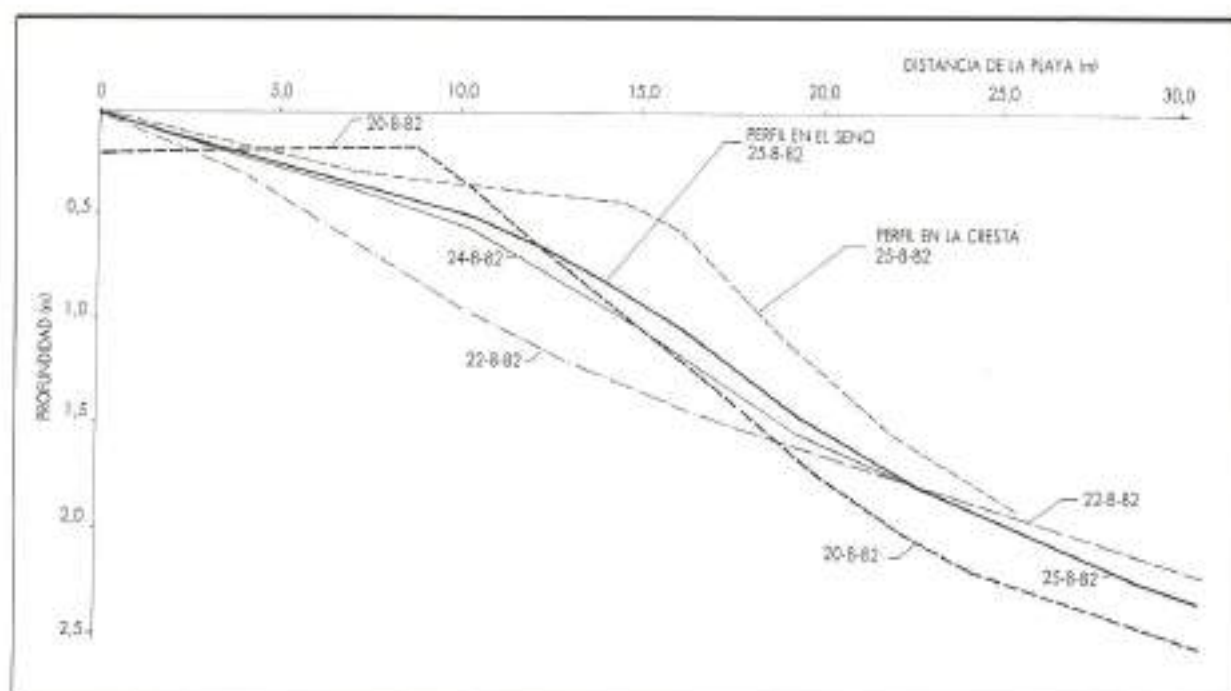


FIGURA 2. Perfiles sucesivos en la playa de Zahara, Costa Atlántica de España.

orilla. Este cambio, que es perfectamente evaluable, inicia, aunque débilmente, el llamado mecanismo de «detuning» topográfico. En efecto, si como consecuencia del proceso de interacción con el oleaje incidente en las playas de pendiente uniforme descrito en el apartado 2.5, se produce resonancia subarmónica para una determinada frecuencia del oleaje de valor,

$$\omega_1 = 2\omega_0, \text{ siendo } \omega_0^2 = gk \tan \beta$$

al ir cambiando la frecuencia de las ondas de orilla por el cambio de perfil señalado, progresivamente se irá produciendo una pérdida de la condición de resonancia o una resonancia imperfecta.

Sobre esta «salida» de resonancia o detuning trataremos más ampliamente cuando sobre la playa aparezca el modelo rítmico longitudinal. Aquí trataremos de evaluar la magnitud del cambio de frecuencia a título de ejemplo cuando se pasa de un perfil sensiblemente uniforme ($2b=0$), a otro que podríamos evaluar como $2b=1$ en (13). Aproximadamente estos perfiles corresponden secuencialmente con los de los días 22-8-82 y 24-8-82 en la playa de Zahora.

En este caso tendremos:

$$k = 2\pi / 25,5,2 = 0,1232$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= gk \tan \beta = 0,07244 \\ \omega_0 &= 0,26915 \text{ rad/seg} \end{aligned}$$

El correspondiente periodo de las ondas de orilla, sería por tanto $T_0 = 23,34$ seg.

Para la existencia de resonancia subarmónica el oleaje incidente normalmente a la playa deberá tener una frecuencia, T , de valor

$$T_1 = T_0/2 = 11,67 \text{ seg}$$

Para el perfil del 24 tendríamos, $2b=1$

$$gk/\omega = 1,7111$$

Este último valor se obtiene como media de los valores correspondientes a 10 puntos (entre $kx=1$ y $kx=10$).

De (13) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 9,8 \cdot 0,12322 / 1,7111 = 0,08693 \\ \omega &= 0,294839761 \text{ rad/seg} \\ T_1 &= 21,32 \text{ seg} \end{aligned}$$

Por lo tanto se produce un cambio de frecuencia de valor

$$\omega = \omega - \omega_0 = 0,025690 \text{ rad/seg}$$

El valor relativo de este cambio es:

$$\omega / \omega_0 = 0,09545,$$

es decir el cambio relativo de frecuencia se puede evaluar en este caso en el 9,55 %.

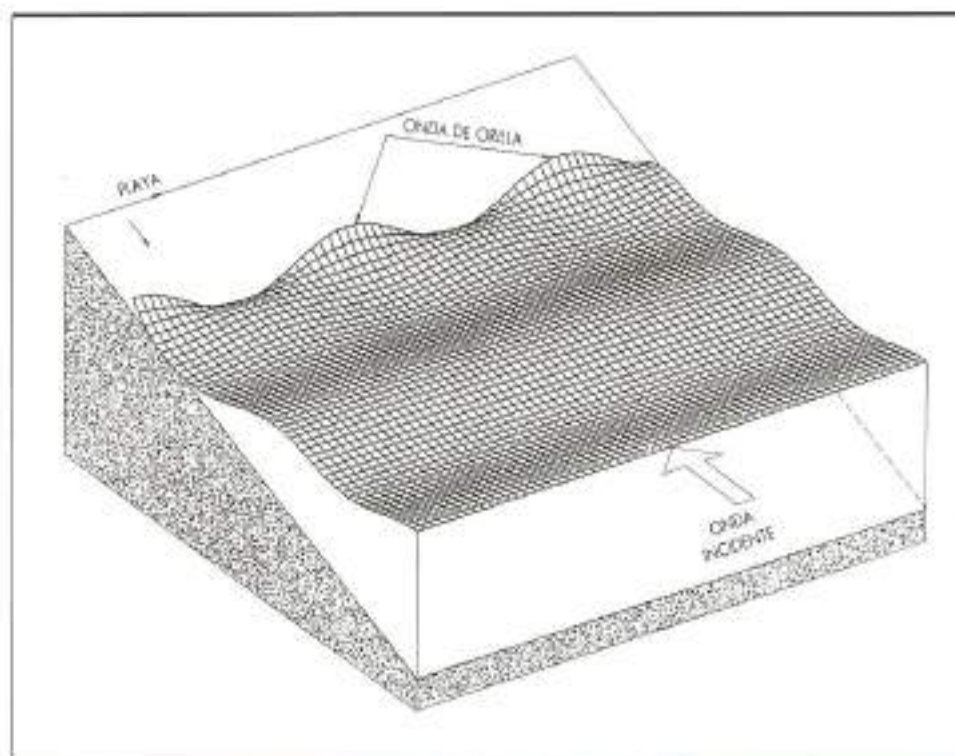


FIGURA 3. Interacción de ondas en la playa de Zahora.

SAINCO Ingeniería dedicada al Desarrollo e Instalación de Sistemas Electrónicos e Informáticos



SISTEMAS DE SUPERVISION Y CONTROL PARA APLICACIONES DE AGUA

Gestión de Recursos Hidráulicos.

Control de la Distribución.

Telemedida de Parámetros Hídricos.

Seguridad y Fiabilidad en los Abastecimientos.

Regulación de E.T.A.P. y E.D.A.R.

SAINCO

DIVISION DE SISTEMAS

MADRID:
Aravaca, 24
28040 MADRID
Tlf.: 91-535 15 00
Télex: 47755 SNCE
Fax: 91-534 45 29

SEVILLA:
Jiménez Aranda, 6
41018 SEVILLA
Tlf.: 95-453 23 18
Télex: 72953 SNCSE
Fax: 95-453 48 58



TECNILAND

TECNOLOGÍAS DEL SUELO



Ejecución de pantallas para cimentación del viaducto de conexión entre la autopista A-17 y el Nudo de la Trinidad, BARCELONA.

ACTIVIDADES

- JETLAND®, Sistema JET GROUTING®
- PILOPLAST®
- PILOTES
- MICROPILOTES
- INYECCIONES
- ANCLAJES
- BULONES
- DRENAJES
- TABLESTACADOS
- GUNITADOS
- PARAGUAS PARA TÚNELES
- PANTALLAS

TECNILAND, Tecnologías del suelo es una División de:

TECNILAND, S.A. Edificio Numancia 1 - calle Viriato, 47 - 2ª planta. 08014 BARCELONA Tel. (93) 430 09 33 Fax. (93) 430 65 42
DELEGACIONES: MADRID - LA CORUÑA - MÁLAGA - SANTANDER - SEVILLA - VALENCIA



FIGURA 4. Ondas de orilla en la playa de Campello (Alicante).

5. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un nuevo método para abordar el problema del cálculo de las características de las ondas de orilla en playas de pendiente no uniforme. Con este fin, hemos usado un método inverso de análisis que esencialmente consiste en obtener la solución analítica del perfil de la playa correspondiente para una estructura del potencial de velocidad de la onda de orilla. Este método resulta ser muy poderoso a la hora de estudiar la excitación resonante de las ondas de orilla por el oleaje normalmente incidente en una playa en caso de batimetría compleja.

Las características del perfil obtenido concuerdan aceptablemente bien con las medidas en la playa de Zahora en la Costa Atlántica de Cádiz. Asimismo hemos calculado la frecuencia natural de las ondas de orilla en dichas playas en el caso de pendiente no uniforme una vez ajustado el parámetro b , obteniendo las principales características de los beach cups (formas rítmicas longitudinales) que aparecen frecuentemente en dicha playa.

La comparación de resultados medidos y calculados es bastante satisfactoria.

REFERENCIAS

- BALL, F. K. (1967). Edge waves in an ocean of finite depth. *Deep Sea Res.* 14, 79-88.
- GUZA, R. T., y DAVIS, R. E. (1974). Excitación of Edge waves by waves incident on a beach. *J. Geophys. Res.* 79, 1285-1291.
- HOLMAN, R. A., y BOWEN, A. J. (1982). Bars, bumps and holes: Models for the generation of complex beach topography. *J. Geophysical Res.* 87, págs. 457-468.
- LECHUGA, A. (1985). Resonancia en playas. *Revista de Obras Públicas*, febrero, págs. 97-106.
- LECHUGA, A. (1986). Formas rítmicas en playas: su relación en la evolución costera, C-17, CEDEX, Madrid.
- SHAW, R. P., y PASKAUSKY, D. (1986). An extension of Ball's edge wave solution to convex upward topographies. *J. Geophys. Res.* 91, 916-922.
- SHAW, R. P., y PASKAUSKY, D. (1987). A constraint on a trapped edge wave solution for convex upward topographies. *J. Geophys. Res.* 92, 6577.