

Aplicación del método de McCormack para la simulación numérica del flujo no estacionario discontinuo en canales de superficie libre

P. GARCIA NAVARRO (*)
J. M. SAVIRON (*)

RESUMEN. Se describe en este trabajo un modelo matemático basado en el esquema explícito de segundo orden de McCormack. Como es bien sabido, el método de las características es la única técnica general de determinar las condiciones de contorno cuando se aplican métodos explícitos de diferencias finitas. Se muestra la forma en que se ha llevado a cabo y varios ejemplos numéricos que ponen de manifiesto la adaptabilidad del método a estudios hidráulicos.

ABSTRACT. The purpose of this paper is to report on the results of an investigation into the performance of a mathematical model based on the McCormack scheme. No solution of the differential equations will lead to the correct results unless the boundary conditions are properly treated. During time evolution the flow may vary its conditions and the mathematical simulation should be able to automatically accommodate all these changes. It is well known that the method of characteristics is the only general technique for finding boundary conditions for explicit finite difference schemes. It will be shown how this has been devised and various examples of general one-dimensional practical cases will demonstrate the adaptability of the method to hydraulic studies.

1. INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es informar acerca de los resultados de una investigación sobre el funcionamiento de un modelo matemático basado en el esquema de McCormack. Es bien conocido que ninguna solución de las ecuaciones diferenciales conducirá a resultados correctos a menos que las condiciones de contorno sean tratadas adecuadamente, es decir, en concordancia con el estado dinámico del flujo. A lo largo de su evolución temporal, el flujo puede variar sus condiciones (número de Froude por ejemplo) y la simulación matemática debe ser capaz de acomodar automáticamente estos cambios. El método de las características, como es bien sabido, es la única técnica general para la determinación de las condiciones de contorno en esquemas de diferencias finitas de tipo explícito.

Se mostrará la forma en que esto ha sido planteado y varios ejemplos de casos prácticos generales en una dimensión demostrarán la adaptabilidad del método para estudios hidráulicos.

2. ECUACIONES BASICAS

El flujo del agua en un canal en régimen no estacionario viene descrito por las ecuaciones unidimensionales del flujo de superficie (*shallow water equations*). La hipótesis fundamental hace referencia a la distribución de la presión en la dirección vertical, que se supone hidrostática. La continuidad de masa y momento en un volumen de control bajo estas condiciones conduce a un sistema de ecuaciones ampliamente descrito en la literatura [1, 2]. En el caso de un canal prismático de sección transversal rectangular y pendiente del fondo moderada, su expresión en forma conservativa es la siguiente:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.1 a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{by} + \frac{1}{2} gby^2 \right) = gby (S_b - S_f) \quad (2.1 b)$$

Donde S_b es la pendiente del fondo y S_f corresponde a la pendiente de la línea de energía (pérdidas por fricción).

(*) Departamento de Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza.

Cuando se aproxima mediante la fórmula de Manning, esta última toma la siguiente forma:

$$S_f = \frac{Q|Q|n^2}{A^2 R V_0} \quad (2.2)$$

Las ecuaciones (2.1) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo hiperbólico y, como consecuencia de su no linealidad, su resolución puede conducir a discontinuidades espontáneas que poseen sin embargo un significado físico real. Pueden ser aproximadas por soluciones débiles de las Ecs. (2.1) puesto que éstas se encuentran escritas en forma conservativa [3, 9]. La mayoría de los métodos convencionales es incapaz de simular tales discontinuidades y, por lo tanto, en determinadas aplicaciones, es de gran importancia la capacidad de un método para reproducir numéricamente estas soluciones débiles. Vamos a describir a continuación la aplicación concreta de nuestro trabajo para este fin.

3. EL ESQUEMA DE MCCORMACK

Este esquema explícito de diferencias finitas ha sido aplicado con éxito para la resolución de numerosos problemas de Dinámica de Gases. Pertenecce a una clase de métodos de paso temporal fraccionado (secuencia predictor-corrector) y posee una precisión de segundo orden en espacio y tiempo. Como variante del esquema de Lax-Wendroff, es una técnica de shock-capturing y, por lo tanto, su principal ventaja es su capacidad para incluir simultáneamente flujos de variación lenta y rápida en un mismo cálculo, añadiendo la posibilidad de aparición de discontinuidades [1, 3, 4].

Utilizando una expresión compacta del sistema (2.1) como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = H(U, x, t) \quad (3.1)$$

la solución en el tiempo $(n+1)\Delta t$ para el nudo i se obtiene a través de la aplicación del esquema de McCormack escrito en una forma como la siguiente:

$$U_i^{(n)} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left[(1-\epsilon)F_{i+1}^n - (1-2\epsilon)F_i^n - \epsilon F_{i-1}^n \right] + \Delta t H_i^n \quad (3.2)$$

$$U_i^{(n+1)} = \frac{1}{2} (U_i^n + U_i^{(n)}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot \left[\epsilon F_{i+1}^{(n)} + (1-2\epsilon)F_i^{(n)} + (\epsilon-1)F_{i-1}^{(n)} \right] + \frac{\Delta t}{2} H_i^{(n)} \quad (3.3)$$

en donde el superíndice (n) indica el paso de tiempo y el subíndice (i) el nudo de la red de computación en que nos encontramos.

Esto permite dos posibilidades para la aproximación de las derivadas espaciales y da lugar a dos versiones del esquema ($\epsilon = 0$ y $\epsilon = 1$). Algunos autores, además, sugieren que los mejores resultados se obtienen permutando cíclicamente las dos versiones. El esquema ha sido denominado preferencial por Kutler [14] en el sentido de que la solución, cuando se pretende simular flujos con discontinuidades, será más favorable dependiendo de la versión utilizada. Los resultados obtenidos de la comprobación de estas propiedades del esquema aparecen en la última sección.

4. CONDICIONES DE CONTORNO

El esquema de McCormack, como muchos otros esquemas explícitos, puede ser usado para avanzar un paso de tiempo Δt la solución numérica, a partir del tiempo $n\Delta t$, en todos los puntos de una línea de la malla excepto en el primero y el último. Si suponemos dada una de las dos variables del flujo en una de estas secciones (secciones de contorno), todavía nos falta determinar la otra variable dependiente. Es preciso recordar que la única técnica general disponible para la resolución del problema es el método de las características. Cualquier otra forma simplificada de tratarlo puede conducir a dificultades y errores.

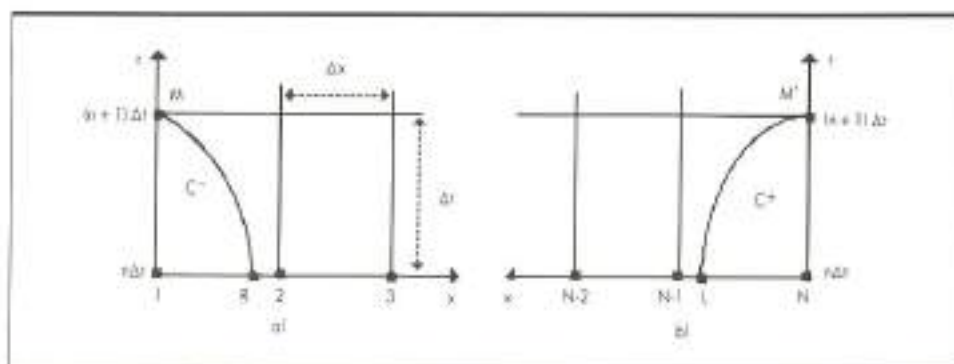
La descripción detallada de los principios generales de este método es fácil de encontrar en la literatura [1, 8] y nos limitaremos a indicar su forma de aplicación al problema del contorno. Es útil entender de una manera intuitiva el tratamiento que requieren las condiciones de contorno.

El régimen del flujo en los extremos aguas arriba y aguas abajo de un tramo determina las condiciones de contorno necesarias. En flujo subcrítico, una condición física ($y = y(t)$, $Q = Q(t)$ o $Q = Q(y)$) debe ser proporcionada en cada uno de los extremos. La otra condición necesaria se obtiene aplicando una ecuación en diferencias basada en la forma característica de las ecuaciones del flujo Ecs. (4.1): La primera de ellas (C^+) se aplica al final del tramo (extremo aguas abajo) y la segunda (C^-), al principio (extremo aguas arriba).

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{Q}{A} \pm \sqrt{gy} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} + b \left(-\frac{Q}{A} \pm \sqrt{gy} \right) \cdot \\ \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{Q}{A} \pm \sqrt{gy} \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = gA(S_b - S_f) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Puesto que estamos trabajando en una red fija, no es posible usar el método original de las características. En su lugar es necesaria una técnica adecuada de interpolación espacial (método de Hartree) [7]. En la Fig. 1.a

FIGURA 1. Puntos de la red necesarios para progresar la solución un paso de tiempo en los contornos en el caso de flujo subcrítico.
a). Contorno aguas arriba.
b). Contorno aguas abajo.



se muestran los puntos de la malla para un extremo aguas arriba. Tiene que añadirse un punto R intermedio para progresar la solución hasta el punto M . Los valores de (y, Q) son conocidos en los puntos 1 y 2. Los del punto R , así como su posición, se determinan por medio de una técnica iterativa [16].

El procedimiento debe modificarse sin embargo si el flujo en las proximidades del extremo es supercrítico o discontinuo [11, 12].

En el caso de flujo supercrítico se tiene que $x_v < x_1$ y las dos curvas características poseen pendiente positiva de forma que deben ser suministradas dos condiciones de contorno en el extremo aguas arriba y ninguna en el de aguas abajo. La solución aguas abajo se obtiene utilizando ambas ecuaciones características, Ecs. (4.1), y una modificación conveniente del esquema de interpolación.

En el caso de flujo discontinuo al principio o al final de un tramo, las Ecs. (4.1) no pueden ser utilizadas porque solamente son válidas para funciones continuas. En su lugar se debe hacer uso de las denominadas ecuaciones del salto (*jump relationships*) [16].

El mismo tipo de requerimientos está presente para todos los esquemas explícitos cuando ha de incluirse en el rodaje una condición de contorno interior. Estas generalmente expresan condiciones de compatibilidad en puntos interiores en los que las ecuaciones originales de St. Venant dejan de ser aplicables y se hace necesaria la introducción de leyes diferentes [1]. Ejemplos de esto son el flujo sobre vertederos interiores o a través de las confluencias.

Las condiciones de contorno interiores son tratadas de la misma manera que acabamos de describir para las exteriores. Con el fin de ilustrar cómo se formularía el problema, consideremos el flujo sobre un vertedero interior. El extremo del tramo aguas arriba del vertedero (1) se trata como un contorno aguas abajo mientras que el principio del tramo (2) se trata como un extremo aguas arriba (Fig. 2).

Para progresar a partir del nivel de tiempo n hacia los puntos L, R , son necesarias cuatro ecuaciones para determinar los dos nuevos caudales y los dos nuevos calados. Si se considera flujo subcrítico a ambos lados

del vertedero se puede hacer uso de las relaciones que se cumplen a lo largo de las curvas características C^- y C^+ que pasan a través de R y L respectivamente. La continuidad de la masa (el caudal debe ser el mismo a ambos lados del vertedero) y una ecuación dinámica representativa del dispositivo hidráulico particular completan las 4 condiciones necesarias.

Cuando el flujo es supercrítico aguas abajo del vertedero, la curva C^- que sale del tramo a través del punto R desaparece. Debe ser reemplazada por una condición extra sobre el calado que puede consistir, por ejemplo, en fijar el nivel crítico en ese punto. Un control continuo del régimen del flujo en los puntos del contorno permite modificar automáticamente las condiciones y el sistema de ecuaciones correspondiente de acuerdo con las variaciones del flujo.

5. RESULTADOS NUMERICOS

MOVIMIENTO UNIFORME DE UN FRENTE

La técnica anterior se utilizó para simular el flujo supercrítico posterior a la introducción instantánea de un subsecuentemente constante caudal de $140 \text{ m}^3/\text{s}$ en un canal rectangular, horizontal y sin fricción, de 1 m de anchura en el que, inicialmente, el agua está en reposo y con una profundidad de 2 m.

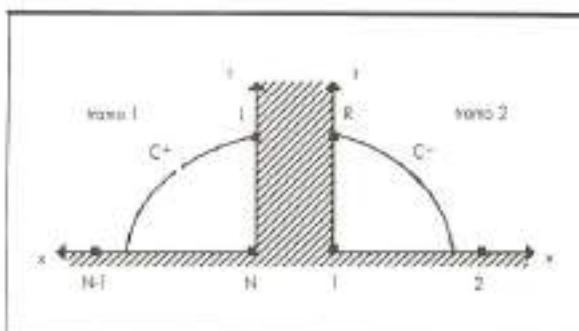


FIGURA 2. Condición de contorno interior. Entre los tramos 1 y 2 del canal se supone, por ejemplo, que exista un vertedero.

La condición de contorno aguas arriba durante el primer paso de tiempo es, pues, la discontinuidad $\Delta Q = 140 \text{ m}^3/\text{s}$. El calado que debe suministrarse aguas arriba como segunda condición de contorno proviene de las relaciones del salto. Para mantener la nuevas condiciones del flujo en el primer punto, ya que el flujo es supercrítico allí, las dos condiciones de contorno aguas arriba deben permanecer invariantes a lo largo de los siguientes pasos de tiempo.

Los resultados del cálculo para $t = 40,5 \text{ s}$ con $\Delta x = 10 \text{ m}$ y Δt dado por el criterio de estabilidad de Courant ($CFL = 1$) se muestran en la Fig. 3. Una comparación de la versión I (a) con la versión II (b) y con una combinación de ambas (c) muestra que la primera proporciona una solución más satisfactoria para este caso. El procedimiento intermedio introduce menos oscilaciones que la versión II pero más que la versión I. Los tres producen una difusión de la discontinuidad sobre una distancia corta (tres longitudes de malla) reproduciendo un valor bastante preciso del calado aguas arriba del frente. Por otra parte, hemos comprobado hasta qué punto puede empeorarse la solución cuando se obtiene de otro modo el valor del calado que ha de ser usado

como segunda condición de contorno. En vez de utilizar las relaciones del salto, el nivel de agua correspondiente se calculó a partir de la ecuación de continuidad (d).

PROPAGACION Y REFLEXIONES DE UN FRENTE

Partimos de una situación en que una onda de choque similar a la anterior avanza sobre agua en reposo en un canal rectangular ancho, horizontal y sin rozamiento (t_1 en Fig. 4). La sección del extremo aguas abajo se supone cerrada de forma que, en ese punto, la condición de contorno ha de ser de caudal nulo. Tratamos de simular el frente reflejado, que viajará aguas arriba tras incrementar su altura y reducir su velocidad (dejando flujo subcrítico tras él) propagándose sobre el flujo supercrítico que se mantiene por medio de las dos apropiadas condiciones de contorno aguas arriba (t_2 y t_3 en Fig. 4). Cuando el frente reflejado alcanza la sección de la cabecera, es preciso utilizar de nuevo las relaciones del salto. Ellas proporcionarán el nuevo valor de la altura del frente correspondiente. Esta segunda reflexión de la onda aguas arriba establece flujo subcrítico en el punto del extremo de modo que, después de unos pocos pasos de tiempo, las ecuaciones características deben ser apli-

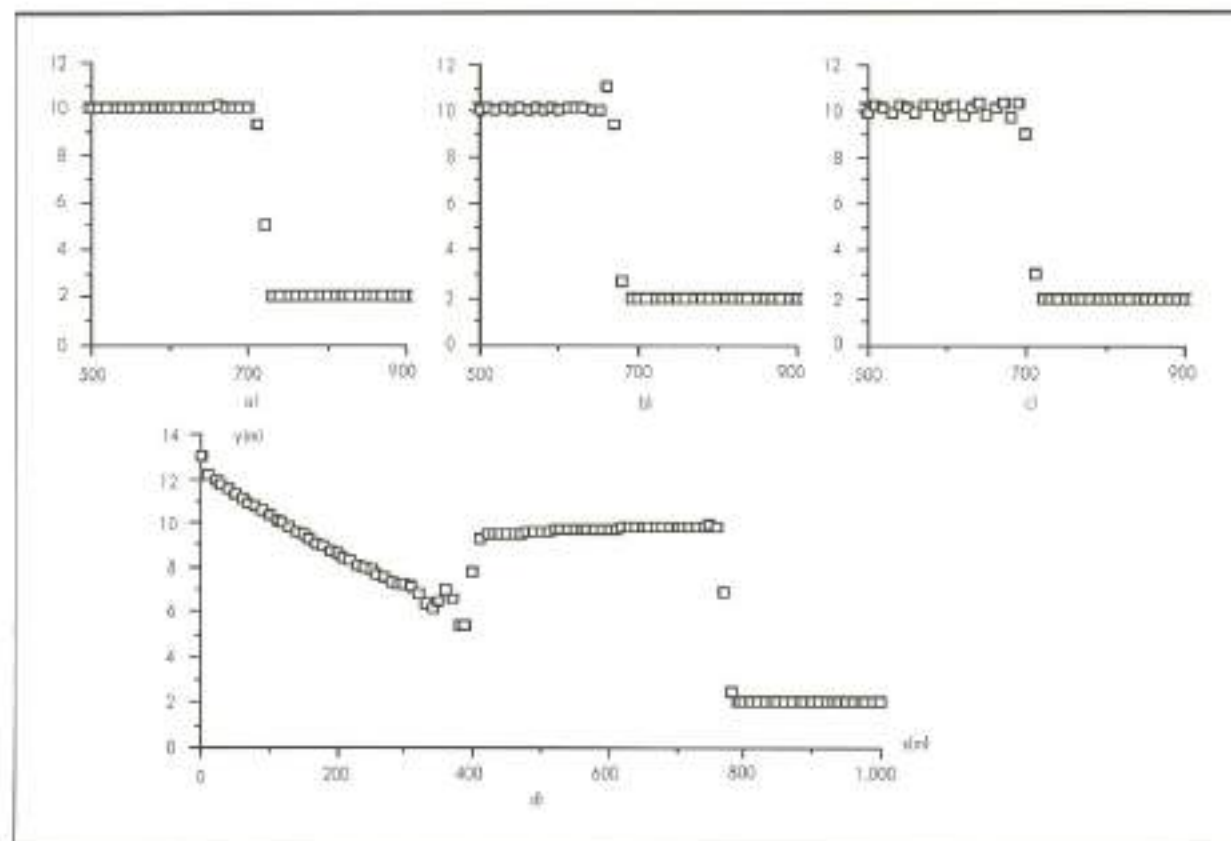


FIGURA 3. a) Versión I, b) Versión II, c) Versiones alternadas, d) Cálculo realizado utilizando la ecuación de continuidad de la masa discretizada con la ayuda de la versión I del esquema de McCormack para determinar la segunda condición del contorno aguas arriba. En d) se ha representado el perfil del agua en el canal entero.

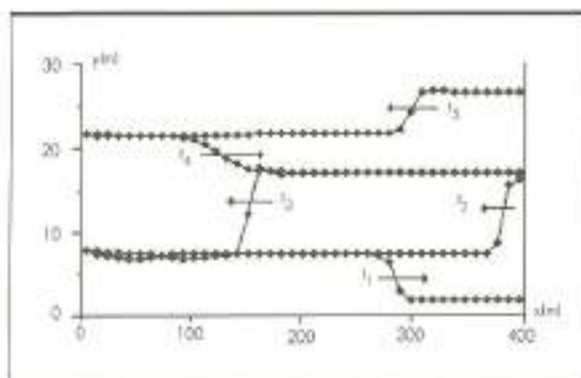


FIGURA 4. Propagación y reflexiones de un frente en un canal rectangular y sin fricción.

cadadas de nuevo en ambos extremos (t_4 en Fig. 4). Mediante una forma adecuada de controlar la posición del frente y el signo de su velocidad, ha sido posible aplicar en cada instante la versión del esquema de McCormack más adecuada, reduciendo así en lo posible la aparición de oscilaciones parásitas.

PROPAGACION DE UN FRENTE DOBLE

La Fig. 5 muestra la solución numérica obtenida para una situación en la cual un frente se propaga sobre otro previamente existente. En un canal horizontal de 1.000 m, rectangular, de anchura unitaria y sin rozamiento en el que se supone un nivel inicial de 1 m de agua en reposo, un primer frente discontinuo es originado mediante un súbito incremento del caudal de 0 a 11,9 m³/s (la altura de este frente es $y = 2,7$ m a partir de las relaciones del salto). Avanza sobre el agua en reposo durante 50 s ($t_1 = 30,4$ s en Fig. 5). Una segunda modificación del caudal aguas arriba de 11,9 a 47,62 m³/s da lugar a un segundo frente de mayor intensidad (5,4 m de altura) que viaja más deprisa que el primero ($t_2 = 56,8$ s y $t_3 = 87,7$ en Fig. 5) de tal forma

que lo alcanza ($t_4 = 112,3$ s en Fig. 5). El número de Courant escogido es la unidad y la calidad de los resultados es satisfactoria. Una comparación realizada por el autor entre esta solución y la dada por un esquema de tercer orden pone de manifiesto que no merece la pena ir más lejos para esta clase de problemas.

SALTOS HIDRAULICOS ESCALONADOS

Como ejemplo de aplicación del tratamiento de las condiciones de contorno interiores, se muestra en la Fig. 6 el flujo estacionario en un canal ($S_b = 0,003$, $n = 0,009$, $b = 6$ m) que contiene tres vertederos idénticos ($H_v = 0,25$ m). A partir de unas condiciones iniciales no estacionarias, $Q(x,0) = 20$ m³/s, $y(x,0) = 2$ m, el esquema numérico localiza las discontinuidades de la solución estacionaria correspondiente. Siguiendo el procedimiento descrito en §4, se han utilizado las ecuaciones características junto con las condiciones de conservación de la masa y una relación calado-caudal tipo vertedero mientras el flujo permanece en estado subcrítico a ambos lados de los vertederos. Una vez alcanzado el estado crítico aguas abajo del vertedero, se ha introducido como condición de contorno adicional (sustituyendo a la ecuación procedente de la característica negativa) la de mantener fijo el calado crítico en ese punto. Se trata de una elección realizada por razones de simplicidad. El procedimiento de cálculo no se hubiera visto alterado en cualquier otro caso.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo describe el desarrollo de un modelo matemático que resuelve las ecuaciones unidimensionales del flujo no estacionario del agua. Está basado en el esquema explícito de segundo orden de McCormack, que se ha mostrado como un método cada vez más adecuado para la integración numérica de problemas con choques.

Se ha llevado a cabo un tratamiento de las condiciones de contorno interiores y exteriores basado en el método de las características. Esta técnica es la única ade-

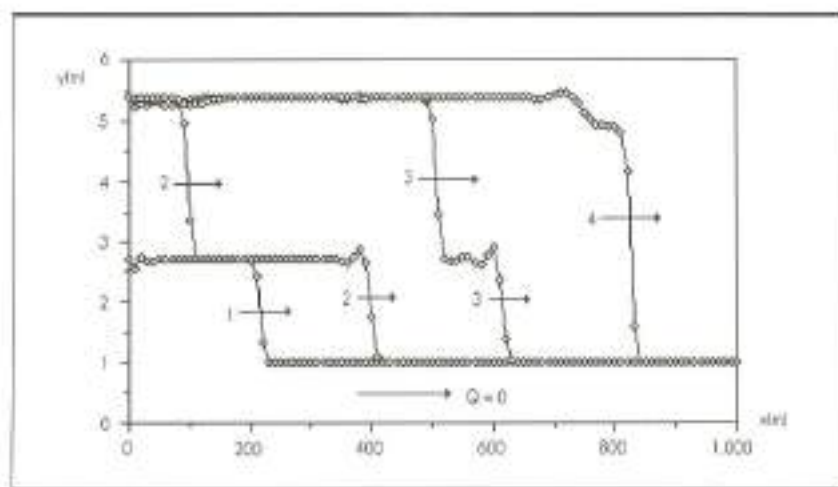


FIGURA 5. Varios perfiles del agua en un canal en el que se propagan dos frentes diferentes.

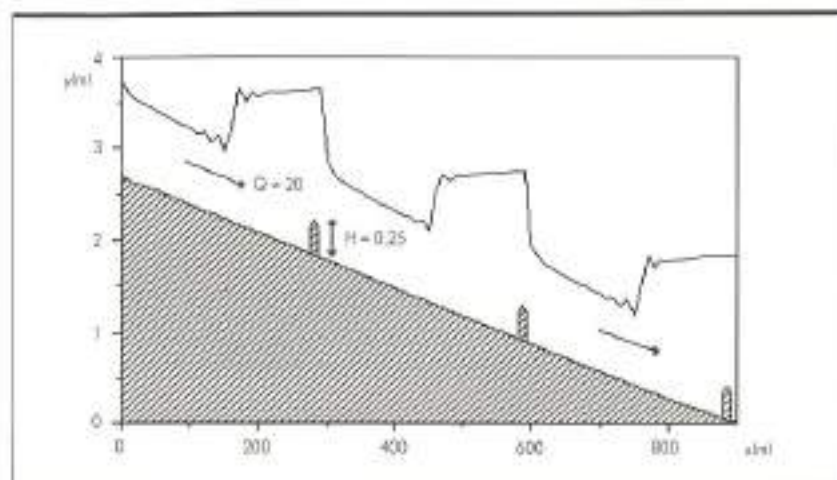


FIGURA 6. Salto hidráulico escalonado. Estado estacionario del flujo en un canal empinado con tres vertederos que deben tratarse como condiciones de contorno interiores.

cuada si se desea incorporar la información correcta en cada problema.

El método es capaz de tratar flujos de variación rápida y fenómenos relativamente complejos. Es posible reducir la aparición de oscilaciones numéricas en las proximidades del frente mediante una adecuada modificación de la aproximación a la derivada espacial. El funcionamiento general del modelo puede considerarse satisfactorio.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo descrito forma parte de una actividad investigadora desarrollada por los autores con la financiación de una beca F.P.I. del Ministerio de Educación y Ciencia español. Los autores desean expresar su agradecimiento al Dr. J. Cunge del L.H.F. (Grenoble) por sus sugerencias y su lectura crítica del manuscrito.

SÍMBOLOS

- Q = Caudal.
- y = Calado.
- x = Coordenada longitudinal.
- t = Tiempo.
- g = Aceleración de la gravedad.
- b = Anchura de la sección transversal.
- A = Superficie de la sección transversal.
- P = Perímetro mojado.
- R = Radio hidráulico.
- n = Coeficiente de rozamiento de Manning.
- S_0 = Pendiente del fondo.
- S_f = Pendiente de la línea de energía por fricción.

REFERENCIAS

1. CUNGE, J. A.; HOLLY, F. M., y VERWEY, A.: «Practical Aspects of Computational River Hydraulics», Pitman Pub. Inc., 1980.
2. LIGGETT, J. A.: «Basic Equations of Unsteady flow», Cap. 2 de Unsteady Flow in Open Channels, Mahmood & Yevjevich, Water Resources Pub., 1975, U.S.A.
3. ABBOTT, M. B.: «Weak solutions of the Equations of open channel flow», Cap. 7 de Unsteady Flow in Open Channels, Mahmood & Yevjevich, Water Resources Pub., 1975, U.S.A.

4. GARCIA R., y KAHAWITA, R. A.: «Numerical Solution of the St. Venant equations with the McCormack finite difference schemes», Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 259-274, 1986.
5. MARTIN, C. S., y DE FAZIO, F. G.: «Open channel surge simulation by digital computer», JHD, A.S.C.E., Vol. 95, núm. HY6, nov. 1969.
6. MARTIN, C. S., y ZOVNE, J. J.: «Finite difference simulation of bore propagation», JHD, A.S.C.E., Vol. 97, núm. HY7, Jul. 1971.
7. LIGGETT, J. A., y CUNGE, J. A.: «Numerical methods of solution of the unsteady flow equations», Cap. 4 de Unsteady Flow in Open Channels, Mahmood & Yevjevich, Water Resources Pub., 1975, U.S.A.
8. ABBOTT, M. B.: «Method of Characteristics», Cap. 3 de Unsteady Flow in Open Channels, Mahmood & Yevjevich, Water Resources Pub., 1975, U.S.A.
9. LAX, P., y WENDROFF, B.: «Systems of conservation laws», Comm. on pure and Applied Maths., Vol. XIII, 217-237, 1960.
10. WARMING, R. F., y HYETT, B. J.: «The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods», Journal of Computational Physics 14, 159-179, 1974.
11. TERZIDIS, G., y STRELKOFF, T.: «Computation of open-channels surges and shocks», JHD, A.S.C.E., Vol. 96, núm. HY12, dic. 1970.
12. TERZIDIS, G.: «Discontinuous unsteady flow in open channels», Ph.D. Thesis, University of California, Davis, 1968.
13. WARMING, R. F., y KUTLER, P.: «2nd and 3rd order non-centered difference Schemes for nonlinear hyperbolic equations», AIAA 10th Aerospace Sciences Meeting, San Diego, enero, 1972, Paper 72-193.
14. KUTLER, P.: «Computation of 3-D Inviscid supersonic flow», Lecture Notes in Physics, 41. Progress in Numerical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1975.
15. MCCORMACK, R. W.: «Numerical Solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer», Lecture notes on physics, núm. 8.
16. GARCIA-NAVARRO, P.: «Propagación de ondas en cursos fluviales», Ph.D. Thesis, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 1989.