

# Asiento producido por una tensión cortante uniformemente distribuida sobre una superficie cilíndrica vertical

J. L. JUSTO (\*)

**RESUMEN.** El asiento producido por una tensión cortante uniformemente repartida sobre una superficie cilíndrica vertical se utiliza en estudios rigurosos de pilotes. Se obtiene por integración de las ecuaciones de Mindlin.

Se hace un estudio a fondo de esta integral, indicando cuando se puede expresar mediante funciones explícitas. Una primera aplicación nos permite hallar el asiento de un pilote flotante.

## SETTLEMENT DUE TO SHEAR STRESS UNIFORMLY DISTRIBUTED UPON A VERTICAL CYLINDRICAL SURFACE

**ABSTRACT.** Settlement caused by shear stress uniformly distributed on a vertical cylindrical surface is relevant to accurate pile studies. This settlement is obtained by integration of the Mindlin equations.

A thorough study of this integral is carried out, indicating when it can be expressed by explicit functions. A direct application is found in the settlement of a floating pile in an elastic medium.

## 1. INTRODUCCION

Los estudios rigurosos sobre asientos, distribución de tensiones en cimentaciones profundas e interacción suelo-estructura-cimentación profunda, requieren la integración de la expresión del asiento producido por una fuerza en el interior de un semiespacio elástico, obtenida por Mindlin (1936), sobre determinadas superficies elementales, entre ellas un cilindro vertical que corresponde a un elemento de pilote.

Si bien una fórmula de integración parcial de esta expresión está contenida en el libro de Poulos y Davis (1980), dicha fórmula requiere simplificación; en dicho libro no se dice cómo se ha realizado la integración parcial, ni se demuestra en qué casos la integral se puede expresar mediante funciones explícitas o hay que proceder a una integración numérica.

Tampoco se considera en dicho libro la posible utilización de integrales elípticas como funciones semiexplícitas, lo cual puede tener ventajas, dados los problemas de convergencia que, a veces, presenta dicha integración numérica.

Se estudian aquí, también, los puntos singulares presentes en la integración, cosa que no se había hecho con anterioridad.

Estas integrales están siendo utilizadas en estudios avanzados elasto-plásticos de pilotes realizados por nosotros.

En este estudio se demuestra que si los pilotes son esbeltos la solución se puede expresar de forma explícita mediante funciones conocidas.

Por otro lado, se ha obtenido aquí la expresión explícita del asiento producido por una superficie cilíndrica vertical uniformemente cargada, en un punto situado en la vertical de su eje.

Por último se indica el asiento de un pilote flotante suponiendo que la tensión cortante aplicada sobre el terreno es constante.

## 2. INTEGRACION DE LA FORMULA DEL ASIENTO PARA CARGA VERTICAL

Se trata de calcular el asiento producido por una tensión cortante, uniformemente repartida en la superficie lateral del cilindro  $j$ , sobre un punto,  $i$ , definido por las coordenadas  $z, x$  (figura 1). Este cilindro suele corresponder a un elemento de pilote.

(\*) Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Director del Departamento de Mecánica de Medios Continuos. Universidad de Sevilla.

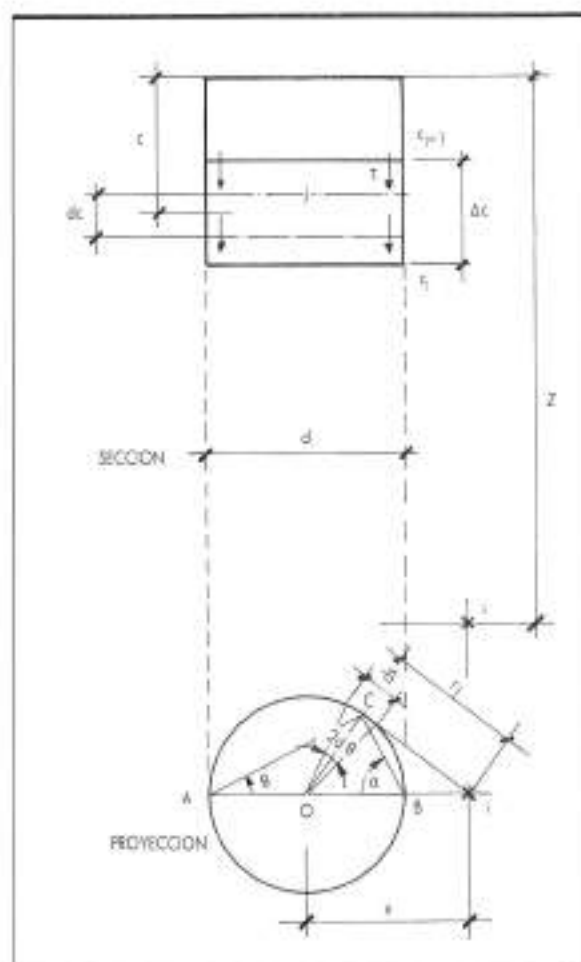


FIGURA 1. Sección y proyección sobre el plano a la profundidad  $z$  del cilindro vertical.

Consideramos un rectángulo elemental en el cilindro  $j$ , de lados  $ds$  y  $dc$ ,

$$ds = d \cdot d\theta$$

El asiento producido por el rectángulo elemental es:

$$ds_i = 2dC \frac{\tau}{E} F_1(c) d\theta dc$$

Y el asiento producido por la superficie cilíndrica:

$$s_i = 2dC \frac{\tau}{E} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{c_1}^{c_2} F_1(c, \theta) dz \quad [1]$$

siendo:

$$F_1(c, \theta) = \frac{z_1^2}{R_1^2} + \frac{B}{R_1} + \frac{H}{R_2} + \frac{Bz_2^2 - 2cz}{R_2^2} + \frac{6cz_2^2 z}{R_2^3} \quad [2]$$

expresión obtenida por Mindlin (1936); siendo:

$$z_2 = z + c \quad z_1 = z - c \quad A = 1 - \nu$$

$$B = 3 - 4\nu \quad H = 5 - 12\nu + 8\nu^2$$

$$dz_2 = dc \quad dz_1 = -dc \quad C = \frac{1 + \nu}{8\pi(1 - \nu)}$$

$$R_1^2 = z_1^2 + r_1^2 \quad R_2^2 = z_2^2 + r_1^2$$

La integral de la expresión [2] respecto de  $c$  se calcula en el apéndice 1, obteniéndose finalmente la expresión:

$$F_2(z, c, r_1) = \int F_1(c, \theta) dc \quad [3]$$

$$F_2(z, c, r_1) = \frac{z_1}{R_1} - 4A \ln(z_1 + R_1) + 8A^2 \ln(z_1 + R_2) - \frac{F}{R_2} - \frac{D}{R_2^2} \quad [4]$$

siendo:

$$F = 2z + Bz_2$$

$$D = 2zz_2c$$

$$F(z, j, r_1) = \int_{c_1}^{c_2} F_2(z, c, r_1) dc = F_2(z, c_2, r_1) - F_2(z, c_1, r_1) \quad [5]$$

En cuanto a la expresión [1]:

$$s_i = 2dC \frac{\tau}{E} \int_0^{2\pi} F(z, j, r_1) d\theta \quad [6]$$

$$\text{Si } x = 0 \quad r_1 = R$$

$$s_i = \pi dC \frac{\tau}{E} F(z, j, R) \quad [7]$$

Si  $x = R$ ,  $r_1 = d \sin \theta$ ;  $s_i$  viene dado por la expresión [6].

La integral [6] debe ser calculada numéricamente. Las integrales de los cinco términos de [4] toman los siguientes valores:

$$I_1 = \sqrt{1 - k^2} K(k) \quad [8]$$

siendo:

$$k = \frac{d}{\sqrt{z_1^2 + d^2}} \quad K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad [9]$$

siendo:

$$u_0 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} \left( \frac{2n-1}{2n} k \right)^2 \quad n \geq 1 \quad [10]$$

# También hay una solución **texsa** para...

REPARACIÓN HORMIGÓN FISURADO

**EPOX-I**

REPARACIÓN DESCONCHADOS

**TEXLAND**

REFUERZO ESTRUCTURAS

**EPOKOL**

UNIÓN PREFABRICADOS HORMIGÓN

**ANTICOR**

*y esto no es todo...*

Deje que **TEXSA** sea su especialista.  
Consulte a nuestro Departamento Técnico



**(93) 331 40 00**

LÍNEA POLÍMEROS LÍQUIDOS



**texsa**



▲ Monumento a Colón  
Consolidación estructura base

▲ Puente de El Saler  
Reparación estructura

# **Tecnos**

## DIVISIÓN DE CONSTRUCCIÓN CIVIL



Máquina de sondeo.



Estación nº 3, Avda. Albufera. Obra prolongación Metro L - 1.

## Estudios geotécnicos y control de calidad.

Vía de los Poblados, 10-3º, 9  
Teléfono: (91) 764 23 88  
Fax: (91) 763 06 07  
28033 Madrid

**Grupo Ciat**



**JUNTA DE ANDALUCÍA**

Consejería de Obras Públicas y Transportes

## EL PASO DEL ALAMILLO, UN ÉXITO DE LA INGENIERÍA ESPAÑOLA.



**E**l paso territorial San Lázaro-Camas II, "Paso del Alamillo", es una obra proyectada por Santiago Calatrava y realizada por la Consejería de Obras Públicas y Transportes, que debido al entorno urbano donde se ubica ha sido tratado como un objeto arquitectónico, y en la cual el peatón es considerado como un elemento integrado que pueda recorrer el conjunto sin ningún tipo de obstáculo.

El Puente del Alamillo, es considerado a nivel mundial como un modelo experimental en el que destaca la supresión de los tirantes traseros. Presenta un tablero metálico que salva 200 metros y se encuentra sostenido por una pila inclinada de 140 metros de altura con una inclinación de  $58^\circ$ , de la que nacen 13 pares de tirantes que soportan el tablero.

El esquema estructural del Puente consiste en contrarrestar el peso del tablero con el peso del pilón, de modo que el conjunto actúa a modo de balanza, aunque se ha considerado el nudo que une el tablero y pilón como un empotramiento fijo.

El pilón está formado por una estructura mixta, hormigón y chapa, cuya sección varía entre  $174$  y  $48 \text{ m}^2$ , del que nacen 13 pares de tirantes, a partir de la cota 42 y una cadencia de  $7'2 \text{ m}$ . Cada tirante está formado por 60 cordones que se encajan en el tablero con una separación de 12 metros.

El tablero se encuentra diseñado como una estructura metálica compuesta por un cajón exagonal que en su "alma" alberga el andaje activo de los tirantes. De este cajón parten las costillas metálicas sobre las que discurren las calzadas.

El viaducto que cruza Isla Cartuja es una estructura continua de  $526 \text{ m}$ . de hormigón dispuestos en 20 vanos y dos voladizos. Esta superestructura posee forma de arco circular con un desarrollo de  $115^\circ$ , del que parten cuatro voladizos.

El error absoluto es:

$$\epsilon < \frac{u_{n+1}}{1 - k^2} \quad [10 \text{ bis}]$$

$$\text{Si } z_1 = 0 \quad I_1 = 0$$

Si  $z_1 > 0$ :

$$I_2 = 4A \left[ \sum_1^n u_n - \frac{\pi}{2} \ln(2z_1) \right] \quad [11]$$

Si  $z_1 = 0$ :

$$I_2 = 2\pi A \ln \frac{2}{d}$$

Si  $z_1 < 0$ :

$$I_3 = 4A \frac{\pi}{2} \ln \frac{8}{a^2 |z_1|} - \sum_1^n u_n \quad [11 \text{ bis}]$$

En [11] y [11 bis] es:

$$u_1 = -\frac{\pi a^2}{16} \quad [12]$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -a^2 \frac{(n-1/2)^2 (n-1)}{n^3} \quad [12 \text{ bis}]$$

$$\epsilon < u_{n+1} \quad [13]$$

Siendo:

$$a = \frac{d}{|z_1|} \leq 1$$

Si  $z_2 = 0$ :

$$I_3 = -4\pi A^2 \ln \frac{2}{d}$$

Si  $z_2 > 0$ :

$$I_4 = 8A^2 \left[ \frac{\pi}{2} \ln(2z_2) - \sum_1^n u_n \right] \quad [13 \text{ bis}]$$

Son válidas [12], [12 bis] y [13] con:

$$a = \frac{d}{z_2}$$

$$I_4 = \frac{-F}{z_2} \sqrt{1 - k^2} K(k)$$

$$k = \frac{d}{\sqrt{z_2^2 + d^2}}$$

siendo válidos [9], [10] y [10 bis]:

Si  $z = 0$  y  $c = 0$  será  $F = 0$  e  $I_4 = 0$

Siempre que  $d < z_2$  será:

$$I_5 = \frac{D\pi}{2z_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad [14]$$

siendo:

$$u_n = 1$$

$$u_n = -u_{n-1} \frac{4n^2 - 1}{4n^2} \left( \frac{d}{z_2} \right)^2 \quad n \geq 1$$

Error absoluto:

$$\epsilon < u_{n+1} \quad [14 \text{ bis}]$$

Se hallan los máximos de los valores absolutos de los errores obtenidos mediante [10 bis], [13] y [14] para  $c_j$  y  $c_{j-1}$ . La suma de estos máximos dividida por la integral de [6] debe ser inferior a  $10^{-4}$ . Para ello se toma el número necesario de valores de  $n$  en [9], [11 bis], [13 bis] y [14].

### 3. PILOTES DELGADOS

Las dimensiones horizontales de un pilote delgado suelen ser despreciables frente a las verticales. Vamos a utilizar esta propiedad para conseguir que la integral [6] se pueda expresar mediante funciones explícitas.

Hacemos:

$$R_1 = \sqrt{z_1^2 + r_1^2} \approx z_1$$

$$R_2 = \sqrt{z_2^2 + r_1^2} \approx z_2$$

La expresión 4 se transforma en:

$$F_2(z, c) = 1 - 4A \ln 2z_1 + 8A^2 \ln 2z_2 - \frac{F}{z_2} - \frac{D}{z_2^2}$$

$$\begin{aligned} F(z_j) = & 4A \ln \frac{(z_1)_{j-1}}{(z_1)_j} + 8A^2 \ln \frac{(z_2)_j}{(z_2)_{j-1}} + \\ & + F \left[ \frac{1}{(z_2)_{j-1}} - \frac{1}{(z_2)_j} \right] + \\ & + D \left[ \frac{1}{(z_2)_{j-1}^2} - \frac{1}{(z_2)_j^2} \right] \end{aligned}$$

$$s_j = \pi d C \frac{\tau}{E} F(z_j) \quad [14 \text{ bis}]$$

Se consigue mejor aproximación sustituyendo  $r_1^2$  por su valor medio en lugar de anularlo:

$$\bar{r}_1^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{d^2}{2}$$

Hacemos:

$$R_1 = \sqrt{z_1^2 + \frac{d^2}{2}} \quad [15]$$

$$R_2 = \sqrt{z_2^2 + \frac{d^2}{2}} \quad [16]$$

Con ello, la solución es [14], pero con  $f_2(z, c)$  dado por [4], con [15] y [16], e  $F$  por:

$$f_2(z, j) = f_2\left(z, c_j, \frac{d}{\sqrt{2}}\right) - f_2\left(z, c_{j-1}, \frac{d}{\sqrt{2}}\right) \quad [17]$$

#### 4. ASIENTO DE UN PILOTE FLOTANTE SOMETIDO A TENSION CORTANTE UNIFORME (figura 2)

Será:

$$\tau = \frac{Q}{\pi d L} \quad [18]$$

Si calculamos el asiento en el centro de la base, en este caso será:

$$\begin{aligned} c_j &= L \\ z &= L \\ z_1 &= 0 \\ R_1 &= R \\ z_2 &= 2L \\ R_2 &= \sqrt{(2L)^2 + R^2} \end{aligned} \quad [19]$$

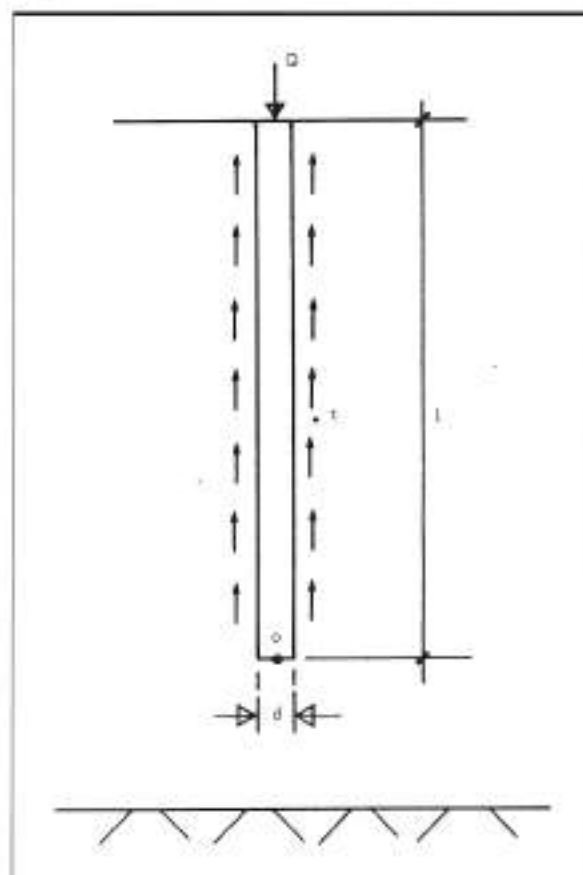


FIGURA 2. Pílate flotante sometido a tensión cortante uniforme.

$$F = 8AL$$

$$D = 4L^2$$

Sustituyendo en [4]:

$$f_2(L, L, R) = -4A \ln R + 8A^2 \ln(2L + R_2) -$$

$$- \frac{8AL}{R_2} - \frac{4L^2}{R_2^3}$$

$$f_2(L, L, R) = 4A \left[ 2A \ln(2L + R_2) - \ln R - \frac{2L}{R_2} \right] - \frac{4L^2}{R_2^3} \quad [20]$$

$$c_{j-1} = 0$$

$$z = L$$

$$z_1 = L$$

$$R_1 = \sqrt{L^2 + R^2}$$

$$z_2 = L$$

$$R_2 = R_1$$

$$F = (5 - 4\nu) L$$

$$D = 0$$

$$f_2(L, 0, R) = \frac{L}{R_1} - 4A \ln(L + R_1) +$$

$$+ 8A^2 \ln(L + R_1) - \frac{(5 - 4\nu)L}{R_1}$$

$$f_2(L, 0, R) = 4A \left[ (1 - 2\nu) \ln(L + R_1) - \frac{L}{R_1} \right] \quad [22]$$

$$f(L, R) = f_2(L, L, R) - f_2(L, 0, R)$$

$$s_c = \pi d C \frac{Q}{\pi d L E} f(L, R)$$

$$s_c = \frac{C Q}{L E} f(L, R) \quad [23]$$

En forma adimensional, hacemos:

$$\rho = \frac{R}{L}$$

$$\rho_1 = \sqrt{1 + \rho^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{4 + \rho^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{s_c E L}{Q} &= C \left[ 4A \left( 2A \ln \frac{2 + \rho_2}{1 + \rho_1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \frac{1 + \rho_1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} - \frac{2}{\rho_2} \right) - \frac{4}{\rho_2^3} \right] \end{aligned} \quad [24]$$

| $\frac{p}{v}$ | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,05  | 0,1   |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0             | 1,408 | 1,113 | 1,006 | 0,751 | 0,646 |
|               | 1,410 | 1,154 | 1,044 | 0,788 | 0,678 |
| 0,1           | 1,496 | 1,204 | 1,085 | 0,804 | 0,687 |
|               | 1,525 | 1,243 | 1,122 | 0,840 | 0,719 |
| 1/3           | 1,746 | 1,402 | 1,254 | 0,913 | 0,767 |
|               | 1,769 | 1,428 | 1,281 | 0,939 | 0,792 |
| 0,45          | 1,860 | 1,494 | 1,330 | 0,958 | 0,797 |
|               | 1,878 | 1,506 | 1,346 | 0,975 | 0,815 |
| 1/2           | 1,906 | 1,531 | 1,361 | 0,975 | 0,807 |
|               | 1,920 | 1,536 | 1,371 | 0,986 | 0,821 |

TABLA 1. Asiento adimensional según las ecuaciones 24 (línea) y 25 (debajo).

Si se trata de un pilote delgado hacemos:

$$\rho_1 = 1$$

$$\rho_2 = 2$$

$$\frac{s_0 EL}{Q} = C \left[ 4A(2A \ln 2 + \ln \frac{2}{\rho}) - \frac{1}{2} \right] \quad [25]$$

La figura 3 y la tabla I muestran el asiento adimensional calculado según las ecuaciones 24 y 25 para varios valores de  $v$ . La ecuación 25 deja del lado de la seguridad, y su error no llega al 5 %.

## 5. REFERENCIAS

- GRADSHTEYN, I. S., y RYZHIK, I. M. (1980). «Table of Integrals Series and Products». Academic Press, Londres.
- MINDLIN, R. D. (1936). «Force at a point in the interior of a semi-infinite solid». Physics, 7:195.
- PISKUNOV, N. (1977). «Cálculo Diferencial e Integral». Editorial Mir, Moscú, tomo II.
- POULOS, H. G., y DAVIS, E. H. (1980). «Pile Foundation Analysis and Design». Wiley.
- PUIG ADAM, D. (1966). «Cálculo Integral». Biblioteca Matemática Rey Pastor-Puig Adam, Madrid.

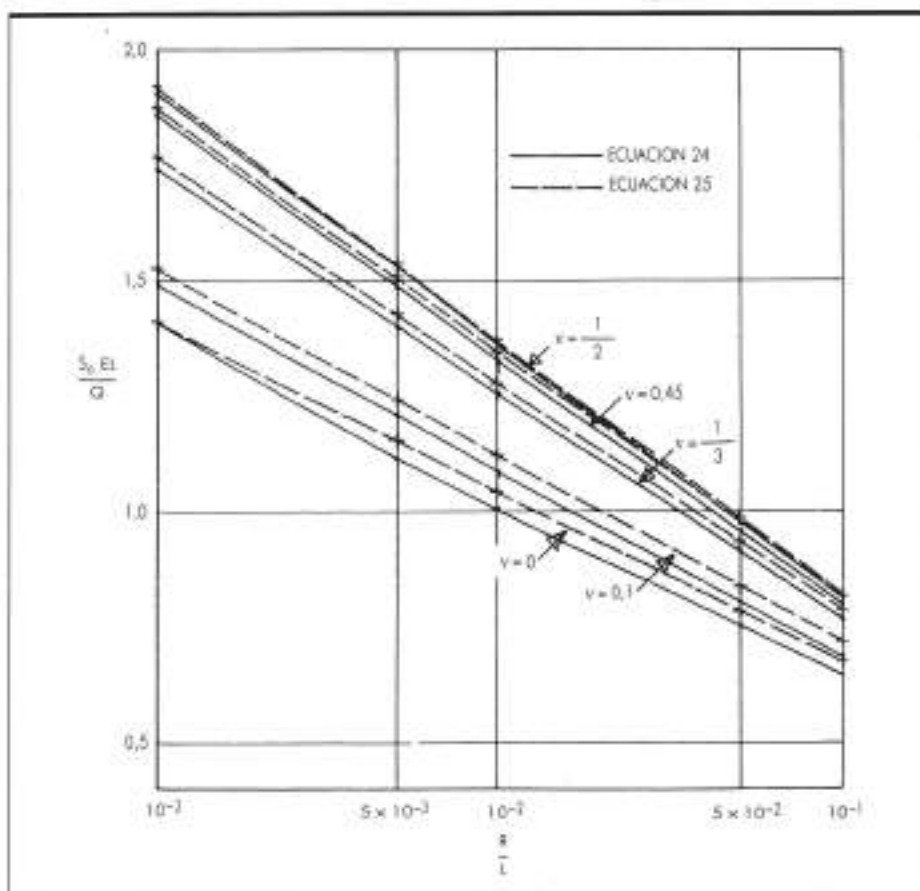


FIGURA 3. Asiento adimensional de un pilote flotante bajo tensión cortante constante en un medio elástico.

# APENDICE N.º 1

INTEGRACION DE LA EXPRESION DEL ASIENTO DE MINDLIN PARA PRESION CORTANTE UNIFORME SOBRE LA SUPERFICIE DE UN CILINDRO VERTICAL (v. figura 1)

$$\Gamma_1(c, \theta) = \frac{z_1^2}{R_1^3} + \frac{B}{R_1} + \frac{H}{R_2} + \frac{Bz_2^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz_2^2 z}{R_2^5} \quad [\text{Ap. 1.1}]$$

$$\Gamma_1(c, \theta) = I_1 + I_2 \quad [\text{Ap. 1.2}]$$

$$I_1 = \frac{z_1^2}{R_1^3} + \frac{B}{R_1} \quad [\text{Ap. 1.3}]$$

$$\int I_1 dc = - \int \left[ \frac{z_1^2}{(z_1^2 + r_1^2)^{3/2}} + \frac{B}{\sqrt{z_1^2 + r_1^2}} \right] dz_1$$

$$\int I_1 dc = \int z_1 \left[ -\frac{1}{2} (z_1^2 + r_1^2)^{-3/2} 2z_1 dz_1 \right] - B \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2 + 1}} \frac{dz_1}{r_1}$$

$$\int I_1 dc = \int z_1 d \left( \frac{1}{\sqrt{z_1^2 + r_1^2}} \right) - B \arg \operatorname{sh} \frac{z_1}{r_1}$$

Integrando por partes:

$$\int I_1 dc = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + r_1^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2 + 1}} \frac{dz_1}{r_1} - B \arg \operatorname{sh} \frac{z_1}{r_1}$$

$$\int I_1 dc = \frac{z_1}{R_1} - (B + 1) \arg \operatorname{sh} \frac{z_1}{r_1}$$

$$\int I_1 dc = \frac{z_1}{R_2} - 4A \ln(z_1 + R_1) \quad [\text{Ap. 1.4}]$$

$$I_2 = \frac{H}{R_2} + \frac{Bz_2^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz_2^2 z}{R_2^5}$$

$$\int I_2 dc = \int \left[ \frac{H}{\sqrt{z_2^2 + r_1^2}} + \frac{Bz_2^2 - 2z(z_1 - z)}{(z_2^2 + r_1^2)^{3/2}} + \frac{6z_2^2 z(z_1 - z)}{(z_2^2 + r_1^2)^{5/2}} \right] dz_2$$

$$\int I_2 dc = H \arg \operatorname{sh} \frac{z_2}{r_1} - B \frac{z_2}{R_2} + B \arg \operatorname{sh} \frac{z_2}{r_1} + \frac{2z}{R_2} +$$

$$+ 2z^2 \int (z_2^2 + r_1^2)^{-3/2} dz_2 + 6z \int z_2^2 (z_2^2 + r_1^2)^{-5/2} dz_2 -$$

$$- 6z^2 \int z_2^2 (z_2^2 + r_1^2)^{-7/2} dz_2$$

$$\int I_2 dc = 8A^2 \ln(z_2 + R_2) + \frac{2z - Bz_2}{R_2} + 2z^2 I_3 + 6z I_4 - 6z^2 I_5 \quad [\text{Ap. 1.5}]$$

$I_3$ ,  $I_4$  e  $I_5$  son integrales binomias del tipo:

$$\int x^n (a + bx^n)^r dx$$

Para  $I_3$ :

$$\begin{aligned}x &= z_3 \\m &= 0 \\a &= \rho^2 \\b &= 1 \\n &= 2 \\p &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Esta integral se racionaliza por ser entero:

$$\frac{m+1}{n} - 1 + p = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -2$$

Haciendo:

$$\begin{aligned}x^2 &= t \\2x dx &= dt \\dx &= \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\I_3 &= \frac{1}{2} \int t^{-1/2} (r_1^2 + t)^{-3/2} dt \\&= (p + q + \frac{1}{2}) = -\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2\right) = 0\end{aligned}$$

Hacemos:

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{y} \\I_3 &= -\frac{1}{2} \int (r_1^2 y + y)^{-3/2} dy = \frac{1}{r_1^2} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 y + 1}} \\I_3 &= \frac{1}{r_1^2 \sqrt{\frac{r_1^2}{x^2} + 1}} = \frac{z_3}{r_1^2 R_c} \quad [\text{Ap. 1.6}]\end{aligned}$$

Para  $I_4$ :

$$\begin{aligned}m &= 3 \\p &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Esta integral se racionaliza por ser entero:

$$\begin{aligned}q &= \frac{m+1}{n} - 1 = 1 \\I_4 &= \frac{1}{2} \int t(r_1^2 + t)^{-5/2} dt\end{aligned}$$

Hacemos:

$$\begin{aligned}r_1^2 + t &= y \\I_4 &= \frac{1}{2} \int (-r_1^2 + y) y^{-5/2} dy = -\frac{1}{2} r_1^2 \frac{y^{-3/2}}{-3/2} + \frac{1}{2} \frac{y^{-1/2}}{-1/2}\end{aligned}$$

$$I_4 = \frac{1}{3} \frac{r_1^2}{y^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3} \frac{r_1^2}{(r_1^2 + z_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + z_2^2}}$$

$$I_4 = \frac{1}{3} \frac{r_1^2}{R_2^3} - \frac{1}{R_2} \quad [\text{Ap. 1.7}]$$

Para  $I_5$ :

$$m = 2$$

$$p = -\frac{5}{2}$$

Se racionaliza por ser entero:

$$p + q = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} - 1 = -2$$

$$I_5 = \frac{1}{2} \int t^{1/2} (a + bt)^{-5/2} dt$$

$$-(p + q + 2) = -\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 2\right) = 0$$

Haciendo  $t = \frac{1}{y}$ :

$$I_5 = -\frac{1}{2} \int (r_1^2 y + 1)^{-5/2} dy$$

$$I_5 = -\frac{1}{2} \frac{(r_1^2 y + 1)^{-3/2}}{-\frac{3}{2} r_1^2}$$

$$I_5 = \frac{1}{3 r_1^2} \left( \frac{r_1^2}{z_2^2} + 1 \right)^{-3/2} = \frac{z_2^3}{3 r_1^2 R_2^3} \quad [\text{Ap. 1.8}]$$

Sustituyendo [Ap. 1.6], [Ap. 1.7] y [Ap. 1.8] en [Ap. 1.5]:

$$\int I_2 dc = 8A^2 \ln(z_2 + R_2) + \frac{2z - Bz_2}{R_2} + \frac{2z^2 z_2}{r_1^2 R_2} + \frac{2z r_1^3}{R_2^3} - \frac{6z}{R_2} - \frac{6z^2 z_2^4}{3 r_1^2 R_2^3}$$

$$\int I_2 dc = 8A^2 \ln(z_2 + R_2) + \frac{2z^2 z_2 / r_1^2 - 4z - Bz_2}{R_2} + \frac{2z (r_1^3 - z z_2^3 / r_1^2)}{R_2^3}$$

Estos resultados han sido alcanzados anteriormente por Poulos y Davis (1980), aunque no se explica su deducción.

$$\int I_2 dc = 8A^2 \ln(z_2 + R_2) - \frac{2z - Bz_2}{R_2} + \frac{2z^2 z_2}{r_1^2 R_2} - \frac{2z}{R_2} + \frac{2z}{R_2^3} \left( r_1^3 - \frac{z z_2^3}{r_1^2} \right) \quad [\text{Ap. 1.9}]$$

Vamos a operar con los tres últimos términos de esta expresión:

$$\frac{2z}{R_2} \left( \frac{z z_2}{r_1^2} - 1 \right) + \frac{2z}{R_2^3} \left( R_2^3 - z_2^3 - \frac{z_2^3 z}{r_1^2} \right) = \frac{2z^2 z_2}{R_2 r_1^2} - \frac{2z z_2^3}{R_2^3} \left( 1 - \frac{z_2 z}{r_1^2} \right) =$$

$$= \frac{2z^2 z_2}{R_2 r_1^2} - \frac{2z z_2^3}{r_1^2 R_2^3} (R_2^3 - z_2^3 + z_2 z) = \frac{2z z_2}{R_2 r_1^2} (z - z_2) + \frac{2z z_2^4}{r_1^2 R_2^3} c =$$

$$= \frac{2z z_2 c}{r_1^2 R_2} \left( -1 + \frac{z_2}{R_2} \right) = -\frac{2z z_2 c}{R_2^3}$$

Sustituyendo en [Ap. 1.9]:

$$\int I_2 dc = 8A^2 \ln(z_2 + R_2) - \frac{2z + Bz_2}{R_2} - \frac{2zz_2}{R_2^3} \quad [\text{Ap. 1.10}]$$

De las expresiones [Ap. 1.4], [Ap. 1.10] y [Ap. 1.3], se deduce:

$$F_2(z, c, r_1) = \int F_1(c, \theta) dc = \frac{z_1}{R_1} - 4A \ln(z_1 + R_1) + 8A^2 \ln(z_2 + R_2) - \frac{2z + Bz_2}{R_2} - \frac{2zz_2}{R_2^3} \quad [\text{Ap. 1.11}]$$

expresión mucho más simplificada que la de Davis y Poulos.

$$\int_{c_{j-1}}^{c_j} F_1(c) dc = F_2(z, c_j, r_1) - F_2(z, c_{j-1}, r_1) = F(z, j, r_1) \quad [\text{Ap. 1.12}]$$

Vamos a intentar calcular la integral de la expresión 1:

$$s_1 = 2dC \frac{\pi}{E} \int_0^{\pi/2} F(z, j, r_1) d\theta \quad [\text{Ap. 1.13}]$$

$$\text{Si } x = 0 \quad r_1 = R$$

$$s_1 = \pi dC \frac{\pi}{E} F(z, j, R) \quad [\text{Ap. 1.14}]$$

Si  $x = R$ , en el triángulo ABC (figura 1):

$$r_1 = d \sin \theta \quad [\text{Ap. 1.15}]$$

Habría que calcular:

$$\int_0^{\pi/2} F(z, j, r_1) d\theta$$

Vamos a integrar el primer término de la expresión Ap. 1.11:

$$I_1 = z_1 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{z_1^2 + d^2 \sin^2 \theta}}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$d\theta = -d\alpha$$

$$I_1 = z_1 \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{z_1^2 + d^2 - d^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$I_1 = \sqrt{1 - k^2} K(k) \quad [\text{Ap. 1.16}]$$

siendo:

$$k = \frac{d}{\sqrt{z_1^2 + d^2}}$$

$K(k)$  = integral elíptica de primera especie completa.

$$\text{Si } z_1 = 0 \quad I_1 = 0$$

Llamamos:

$$F = 2z + Bz_2 \quad [\text{Ap. 1.17}]$$

La integral del 4.º término de [Ap. 1.11] será:

$$I_4 = -\frac{F}{z_2} \sqrt{1 - k^2} K(k) \quad [\text{Ap. 1.18}]$$

siendo en este caso:

$$k = \frac{d}{\sqrt{z_0^2 + d^2}}$$

En ambos casos:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

siendo:

$$u_0 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} \left( \frac{2n-1}{2n} k \right)^2$$

Se trata de una serie de términos positivos. Para ver si es convergente utilizamos el criterio de D'Alembert:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left[ \frac{2n+1}{2(n+1)} k \right]^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k^2$$

Si  $k < 1$  el límite es menor que 1, luego la serie es convergente, cosa que ya sabíamos por tratarse de una integral elíptica de primera especie completa.

Si aproximamos la serie hasta el término  $u_n$  tenemos:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^n u_n \quad [\text{Ap. 1.19}]$$

El resto es una serie en la que:

$$r = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \left[ \frac{2n+3}{2(n+2)} k \right]^2 < k^2$$

Los términos de la serie despreciada son menores que los términos  $v_i$  de una progresión geométrica, cuyo primer término es  $u_{n+1}$  y de razón  $k^2$ .

La suma de los  $m$  primeros términos de esta progresión será:

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} v_i = u_{n+1} \frac{r^m - 1}{r - 1} = u_{n+1} \frac{k^{2m} - 1}{k^2 - 1}$$

$$\varepsilon < \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m v_i = \frac{u_{n+1}}{1 - k^2} \quad [\text{Ap. 1.19 bis}]$$

Siendo  $\varepsilon$  el error que supone adoptar la expresión [Ap. 1.19] para el cálculo de la integral.

$$\text{Si } z = 0 \text{ y } c = 0 \text{ será } F = 0 \text{ e } I_s = 0$$

Llamamos:

$$D = 2xz_0c \quad [\text{Ap. 1.20}]$$

La integral del 5.º término de [Ap. 1.11] será:

$$I_5 = -D \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{R_2^3}$$

$$I_5 = -D \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(z_0^2 + d^2 \sin^2 \theta)^3}} = -\frac{D}{z_0^3} \int_0^{\pi/2} \left( 1 + \frac{d^2 \sin^2 \theta}{z_0^2} \right)^{-3/2} d\theta$$

Desarrollando en serie:

$$I_2 = -\frac{D}{z_2^3} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3/2}{n} \left(\frac{d}{z_2}\right)^{2n} \sin^{2n} \theta d\theta$$

Ahora bien (v. Puig Adam, 1966):

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \frac{\pi}{2}$$

El término genérico de la serie de  $I_2$  será:

$$\frac{(-3/2)(-5/2)\dots(-3/2-n+1)}{n!} \left(\frac{d}{z_2}\right)^{2n} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \frac{\pi}{2}$$

$$(-1)^n \frac{(2n+1)\dots 5\cdot 3}{n!2^n} \left(\frac{d}{z_2}\right)^{2n} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = -\frac{D\pi}{2z_2^3} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

siendo:

$$u_n = -u_{n-1} \frac{4n^2 - 1}{4n^2} \left(\frac{d}{z_2}\right)^2 \quad n \geq 1 \quad [\text{Ap. 1.21}]$$

Se trata de una serie alternante.

$$\left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \frac{4n^2 - 1}{4n^2} \left(\frac{d}{z_2}\right)^2 < \left(\frac{d}{z_2}\right)^2$$

Si  $d/z_2 < 1$  la serie es, además, de términos decrecientes.

Si aproximamos la serie con los  $n + 1$  primeros términos:

$$I_2 = \frac{D\pi}{2z_2^3} \sum_{n=0}^n u_n \quad [\text{Ap. 1.22}]$$

Según el teorema de Leibnitz el error absoluto será inferior al primer término despreciado  $u_{n+1}$ , siempre que sea  $d < z_2$ .

Si  $c = 0$  o  $z = 0$  será  $D = 0$  e  $I_2 = 0$

Vamos a estudiar, ahora, la integral del segundo término de la expresión Ap. 1.11:

$$I_2 = -4A \int_0^{\pi/2} \ln(z_1 + \sqrt{z_1^2 + d^2 \sin^2 \theta}) d\theta \quad [\text{Ap. 1.23}]$$

Para  $z_1 > 0$ :

$$I_2 = -2\pi A \ln z_1 - 4A \int_0^{\pi/2} \ln \left[ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{z_1}\right)^2 \sin^2 \theta} \right] d\theta$$

Hacemos:

$$\frac{d}{|z_1|} = \alpha \quad [\text{Ap. 1.24}]$$

$$I_2 = -2\pi A \ln z_1 - 4A \int_0^{\pi/2} \ln[1 + \sqrt{1 + \alpha^2 \sin^2 \theta}] d\theta = I_{2a} + I_{2b}$$

Si  $a \leq 1$

[Ap. 1.25]

$$\begin{aligned}
 I_{20} &= -4A \int_0^{\pi/2} \left[ \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2} (a \sin \theta)^{2n} \right] d\theta \\
 I_{20} &= -2\pi A \ln 2 + 4A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2} a^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta \\
 I_{20} &= -2\pi A \ln 2 + 4A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n!)^2} a^{2n} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \frac{\pi}{2} \\
 \frac{u_n}{u_{n+1}} &= - \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2^2 n^2} a^2 \frac{2n-1}{2n} = -a^2 \frac{(n-1/2)(n-1)}{n^2} \quad n \geq 2 \\
 \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| &\leq a^2
 \end{aligned}$$

Se trata de una serie alternante de términos decrecientes.

La aproximamos por:

$$I_{20} = -2\pi A \ln 2 + 4A \sum_1^n u_n$$

siendo:

$$u_1 = -\frac{\pi a^2}{16} \quad [\text{Ap. 1.26}]$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = -a^2 \frac{(n-1/2)(n-1)}{n^2} \quad [\text{Ap. 1.27}]$$

El error será inferior al primer término despreciado:

$$\varepsilon < u_{n+1} \quad [\text{Ap. 1.28}]$$

$$I_2 = -2\pi A \ln 2z_1 + 4A \sum_1^n u_n$$

$$I_2 = 4A \left[ \sum_1^n u_n - \frac{\pi}{2} \ln(2z_1) \right] \quad [\text{Ap. 1.29}]$$

Veamos ahora qué sucede para  $z_1 \leq 0$ .

Si es  $z_1 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -4A \int_0^{\pi/2} \ln(d \sin \theta) d\theta = -2\pi A \ln d - 4A \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta \\
 I_2 &= -2\pi A \ln d + 4A \frac{\pi}{2} \ln 2 = 2\pi A \ln \frac{2}{d} \quad [\text{Ap. 1.30}]
 \end{aligned}$$

Si  $z_1 < 0$ :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -2\pi A \ln |z_1| - 4A \int_0^{\pi/2} \ln [-1 + \sqrt{1 + a^2 \sin^2 \theta}] d\theta \\
 I_2 &= -2\pi A \ln |z_1| - 4A \int_0^{\pi/2} \ln \frac{a^2 \sin^2 \theta}{1 + \sqrt{1 + a^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\
 I_2 &= -2\pi A \ln |z_1| - 2\pi A \ln a^2 + 8A \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2\pi A \ln 2 - 4A \sum_1^n u_n \\
 I_2 &= 4A \left( \frac{\pi}{2} \ln \frac{8}{a^2 |z_1|} - \sum_1^n u_n \right) \quad [\text{Ap. 1.31}]
 \end{aligned}$$

Son válidos [Ap. 1.24], [Ap. 1.25], [Ap. 1.26], [Ap. 1.27] y [Ap. 1.28].

La integral  $I_4$  se realiza de forma análoga a la  $I_3$  para  $z_1 \geq 0$ :

Si  $z_2 = 0$ :

$$I_4 = -4\pi A^2 \ln \frac{2}{d}$$

Si  $z_2 > 0$ :

$$I_4 = 8A^2 \left( \frac{\pi}{2} \ln 2z_2 - \sum_1^n u_n \right) \quad [\text{Ap. 1.32}]$$

Son válidos [Ap. 1.26], [Ap. 1.27] y [Ap. 1.28], pero con:

$$a = \frac{d}{z_2} \leq 1$$

Si  $c_{j-1} \leq z \leq c_j$ , el segundo término de la expresión 2 tiende a infinito para:

$$x = R$$

$$c = z$$

cuando  $\theta \rightarrow 0$

Al ser la función correspondiente a dicho término discontinua en este punto, hay que realizar la integración del siguiente modo:

$$I = B \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{c_{j-1}}^{c_j} \frac{dc}{R_1} = B \int_0^{\pi/2} d\theta \left[ \int_{c_{j-1}}^z \frac{dc}{R_1} + \int_z^{c_j} \frac{dc}{R_1} \right]$$

$$I = -B \int_0^{\pi/2} \left[ \ln \frac{R_1}{(z_1)_{j-1} + (R_1)_{j-1}} + \ln \frac{(z_1)_j + (R_1)_j}{R_1} \right]$$

$$I = B \int_0^{\pi/2} d\theta \ln \frac{(z_1)_{j-1} + (R_1)_{j-1}}{(z_1)_j + (R_1)_j}$$

Al hallar las diferencias correspondientes a la ecuación Ap. 1.12, el minuendo y el sustraendo estarán aproximados en el mismo sentido, siempre que se utilice en las series Ap. 1.19, Ap. 1.22, Ap. 1.29, Ap. 1.31 y Ap. 1.32, el mismo valor de  $n$ . Por ello, el error absoluto de la diferencia será inferior al mayor de los valores absolutos de los errores de minuendo y sustraendo, deducidos a partir de Ap. 1.19 bis para  $I_1$  e  $I_4$ , el valor de  $u_{n+1}$  obtenido a partir de Ap. 1.21 para  $I_3$  y Ap. 1.28 para  $I_2$  si  $z_1 \neq 0$ .