

Modelización del asentamiento de cimentaciones bajo carga

CESAR MENENDEZ FERNANDEZ (*)
JOAQUIN ORDIERES MERE (**)
CELESTINO GONZALEZ NICIEZA (**)

RESUMEN. En este trabajo se ha desarrollado un modelo matemático para suelos arcillosos elásticos saturados con permeabilidad muy baja y dependiente del grado de asentamiento. Posteriormente se ha resuelto el modelo por el método de los elementos finitos, empleándose técnicas iterativas de punto fijo para obtener las soluciones en desplazamiento y presión intersticial. El modelo es consistente con la teoría tridimensional de Biot (1941), donde las fuerzas aplicadas pueden ser dependientes del tiempo. El fluido intersticial se considera incompresible. Los resultados de los experimentos numéricos se comparan con las soluciones analíticas y, en caso de no existir éstas, con datos experimentales.

MODELLING OF FOUNDATION SETTLEMENT UNDER LOADING

ABSTRACT. This work has developed a mathematical model for saturated elastic clayey soils which are not very permeable and which depend on the degree of settlement. A model has then been solved by the finite elements method, using fixed point iterative techniques to obtain the displacement and pore pressure solutions. The model is consistent with Biot's three-dimensional theory (1941), where the forces applied can be time dependent. The pore fluid is considered non-compressible. The results of the numerical experiments are compared with the analytical solutions and, where there are not forthcoming, with research data.

1. ECUACIONES DE LA CONSOLIDACION

Se considera un suelo que ocupa un volumen Ω y cuyo contorno (frontera) se encuentra dividido en:

- Una parte en la que se conocen los desplazamientos y otra sobre la que se aplican las cargas exteriores, variables con el tiempo.
- Otras dos partes, iguales o distintas, en que se imponen condiciones sobre los flujos o sobre la presión intersticial existente.

De acuerdo con este planteamiento, nuestro problema consistirá en determinar la evolución tanto en presiones como en desplazamientos del terreno.

Para analizar la consolidación de un suelo elástico por un fluido incompresible se emplean las ecuaciones siguientes (ver Menéndez, 1991):

- Ecuaciones relativas al esqueleto del suelo.
 - Ley de comportamiento elástico (relación lineal entre las tensiones efectivas y las deformaciones).
 - Hipótesis de pequeñas deformaciones.
- Ecuaciones relativas al fluido.
 - Ley de Darcy (1856).
 - Ecuación de continuidad del líquido intersticial.
 - Condiciones hidráulicas en el contorno.
- Ecuaciones relativas al suelo.
 - Ecuación de equilibrio dinámico.
 - Principio de tensiones efectivas.
 - Condiciones de bloqueo en el contorno.

2. FORMULACION VARIACIONAL

Sea el suelo ocupando una región Ω de $\mathbb{R}^n$; $n = 2, 3$, acotada y con frontera Lipschitz continua, tal como el representado en la figura 1 del apartado anterior.

Definimos el conjunto de las funciones de Ω en $\mathbb{R}^n$:

$$W(\Omega) = \{w; w \in [H^1(\Omega)]^n; w|_{\Gamma_0} = 0\}$$

(*) Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo.

(**) Departamento de Explotación y Prospección de Minas. Universidad de Oviedo.

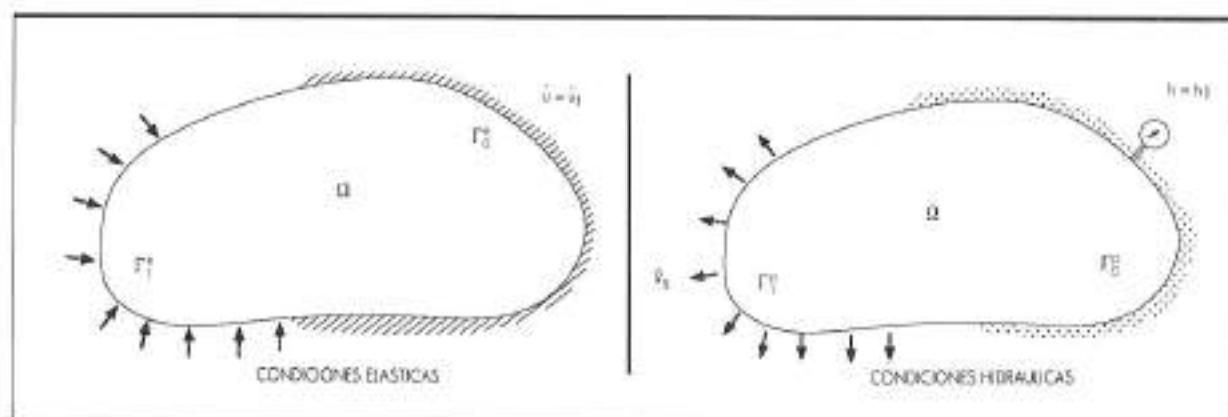


FIGURA 1. Portiones de la frontera.

que representa el vector de desplazamiento en cada instante de cada uno de los puntos del cuerpo y donde Γ_0^e es un subconjunto de la frontera de Ω con medida estrictamente positiva. Dotaremos a este espacio con la norma:

$$w = (w_1, \dots, w_m) \rightarrow |w|_{W, \Omega} = \left[\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} (w_i)^2 d\Omega \right]^{1/2} \quad \forall w \in [H^1(\Omega)]^m$$

Definimos para cada $w \in [H^1(\Omega)]^m$ los operadores tensoriales:

$$\sigma, \varepsilon : [H^1(\Omega)]^m \rightarrow [L^2(\Omega)]^{m \times m}$$

como:

$$\sigma_{ij}(w) = \sigma_{ji}(w) = E_{ij}^{kl} \varepsilon_{kl}(w) \quad 1 \leq i, j, k, l \leq m$$

$$\varepsilon_{ij}(w) = \frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{j,i}) \quad 1 \leq i, j \leq m$$

que juegan el papel de tensor de tensiones y deformaciones en cada punto del suelo y donde los coeficientes E_{ij}^{kl} son funciones de punto en el dominio Ω , que representan las propiedades del suelo verificando, como ha demostrado Duvaut (1972):

$$E_{ij}^{kl} = E_{ji}^{kl} = E_{ij}^{lk} \quad E_{ij}^{kl} \in L^\infty(\Omega)$$

y

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall X \in \mathbb{R}^{m \times m} / X_{ij} &= \\ = X_{ji} \Rightarrow {}^t X_{ij} E_{ij}^{kl} X_{kl} &\geq \alpha |X|_{\mathbb{R}^{m \times m}}^2 \end{aligned}$$

Suponemos que sobre el suelo actúan unas fuerzas de volumen dependientes del tiempo:

$$F = [F_1, \dots, F_m] \in H^1[0, T; (L^2(\Omega))^m]$$

y unas fuerzas de superficie, también dependientes del tiempo:

$$f = [f_1, \dots, f_m] \in H^1[0, T; (H^{-1/2}(\Gamma_0^e))^m]$$

donde:

$$\Gamma_1^e = \partial\Omega - \Gamma_0^e$$

De forma análoga para el comportamiento hidráulico del suelo, definimos:

$$V(\Omega) = \{v; v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_0^h} = 0\}$$

que representa el conjunto de funciones presión intersticial en cada instante de cada uno de los puntos del cuerpo, siendo Γ_0^h un subconjunto de $\partial\Omega$ con medida estrictamente positiva. En este espacio podemos definir la norma:

$$|v|_{1, \Omega} = \left[\int_{\Omega} \nabla v \nabla v d\Omega \right]^{1/2}$$

Asimismo definimos el tensor que representa la permeabilidad relativa k_{ij} , que es función de punto en el dominio Ω y verifica (Matheron, 1967),

$$k_{ij} = k_{ji} \quad k_{ij} \in L^\infty(\Omega)$$

y

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall Y \in \mathbb{R}^m \Rightarrow Y_i k_{ij} Y_j \geq \alpha |Y|_{\mathbb{R}^m}^2$$

Suponemos que en el suelo existe un caudal a través de la frontera Γ_1^p dado por la función:

$$q \in H^1[0, T; H^{-1/2}(\Gamma_1^p)]$$

3. MODELIZACION DEL SUELO ELASTICO SATURADO CON FLUIDO INCOMPRESIBLE

El estudio del fenómeno de consolidación se puede comenzar en realidad a partir de cualquier estado de equilibrio inicial, para el que sean conocidas las deformaciones del suelo y la distribución de presiones intersticiales

(o cargas hidráulicas). En el caso de condiciones iniciales no homogéneas, se calcula el aumento de la deformación y el exceso de presión intersticial en todo instante, a partir del estado inicial, tomando éste como referencia [ver Nagra (1986), Babchia (1986), entre otros].

A continuación se realiza la homogeneización de las condiciones esenciales de contorno, introduciendo un nuevo cambio de variables. De esta forma, considerando como incógnitas el valor en exceso de los desplazamientos y de la presión respecto a los valores iniciales, el problema se plantea como (Menéndez, 1991):

Buscar un par (u, h) , tales que $(u, h) \in \Sigma(\Omega)$ y $\dot{u} \in L^2[0, T; W(\Omega)]$, verificando:

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{u}, w)_{L^2} + a(u, w) - b(\gamma_w h, w) &= (F, w)_{L^2} + \langle f, w \rangle - c(\sigma_0, w) + (\rho \dot{u}_1, w)_{L^2} + \\ &+ a(u_1, w) - b(\gamma_w h_1, w) \quad \forall w \in W \text{ c.s.t. } \in (0, T) \\ A(h, v) + b(v, \dot{u}) + \langle gh, v \rangle &= \langle q, v \rangle + A(h_1, v) + \\ &+ b(v, \dot{u}_1) + \langle gh_1, v \rangle \quad \forall v \in V \text{ c.s.t. } \in (0, T) \\ u(0, x) = 0; \quad \dot{u}(0, x) = V_0; \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

donde:

$$\Sigma(\Omega) = [H^1[0, T; (L^2(\Omega))^n] \cap L^2[0, T; W(\Omega)]] \times [H^1[0, T; (L^2(\Omega))] \cap L^2[0, T; V(\Omega)]]$$

$$\rho(x), \gamma_w(x) \in L^\infty(\Omega); \quad \rho(x), \gamma_w(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad g(x) \in L^\infty(\Gamma_0^p); \quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma_0^p$$

$$(w, \xi)_{L^2} = \int_{\Omega} w_i \xi_i d\Omega$$

$$b(v, w) = \int_{\Omega} v \varepsilon_{ij}(w) d\Omega$$

$$c(\sigma, w) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(w) d\Omega$$

$$a(w, \xi) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(w) E_{ij}^k \varepsilon_{kl}(\xi) d\Omega$$

$$\langle w, \xi \rangle = \int_{\partial\Omega} A(w_i) A(\xi_i) d\Gamma$$

$$A(v, \psi) = \int_{\Omega} v_{,i} k_{ij} \psi_{,j} d\Omega$$

$$w, \xi \in W = \{\zeta; \zeta \in (H^1(\Omega))^n; \zeta|_{\Gamma_0^p} = 0\}$$

$$v, \psi \in V = \{\Phi; \Phi \in H^1(\Omega); \Phi|_{\Gamma_0^p} = 0\}$$

y σ_0, u_1, h_1 , indican las tensiones iniciales del terreno y los valores prescritos de los desplazamientos y la presión en exceso de los valores iniciales.

4. EXPERIMENTOS NUMERICOS

Inicialmente se presenta un modelo cuasi-unidimensional que permite la comparación con la solución de Terzaghi, comprobando los efectos que en él tienen la variación de los distintos parámetros. Posteriormente se estudia un ejemplo más práctico, en el cual existen diferentes materiales, estudiando los asentamientos de una losa.

Los resultados numéricos se han obtenido utilizando la biblioteca MODULEF, originaria del francés Institut National de Recherche en Informatique et en Automa-

toque (INRIA), se utiliza en varias universidades españolas (Sevilla, Santiago de Compostela, etc.). Suministrada en forma fuente, nos ha permitido, siguiendo unas normas, implementar en ella el algoritmo utilizado (1).

4.1. CONSOLIDACION UNIDIMENSIONAL

El problema de consolidación unidimensional de un suelo elástico se analiza bajo las siguientes consideraciones:

(1) El desarrollo informático y la implementación del algoritmo puede verse en Menéndez (1992).

b. El flujo de agua se realiza exclusivamente a través de las paredes laterales.

c. Se aplica una carga $f = 300 \text{ kN/cm}^2$ instantánea en la superficie del suelo, en el instante inicial, y se mantiene constante durante el drenaje.

Dada la simetría del modelo respecto al eje vertical, el estudio se puede reducir al de un estrato de $3 \times 3 \text{ m}$ en que se permite el flujo por una sola cara lateral. Este problema ha sido resuelto de forma analítica por Mandel (1953) y empleado como comprobación por Booker (1977), entre otros.

Los datos utilizados son los siguientes:

	ARCILLA	HORMIGON
ANCHURA DEL ESTRATO (H)	3 m	50 cm
MÓDULO EDOMÉTRICO (E_v)	5 MPa	20.000 MPa
COEFICIENTE DE POISSON (ν)	0,2	0,3
PERMEABILIDAD (k)	10^{-10} m/s	10^{-9} m/s
CARGA SUPERFICIAL (f)		500 kN/m ²

En la lámina 8 se observa la malla empleada, y en la lámina 9 la comparación de los resultados analíticos con los computados. Se observa que la solución analítica llega al equilibrio posteriormente a la computada con el modelo de permeabilidad constante, siendo el modelo de permeabilidad variable (en función de los valores dados) el que más se le aproxima.

En las láminas 10 y 11 se muestra la influencia de la variación del coeficiente de Poisson sobre los asentamientos y las presiones. Se observa que el asentamiento final aumenta al decrecer dicho coeficiente, aumentando asimismo el tiempo en que se alcanza el asentamiento final. Es de destacar el aumento de la presión intersticial previa a su disipación, y como la disminución del coeficiente de Poisson provoca una acentuación de ese efecto. Este hecho concuerda con los resultados obtenidos por Cryer (1963) y Schiffman (1969).

4.3. CONSOLIDACION BAJO UNA LOSA

Finalmente, se estudia un caso práctico donde no sólo es variable la carga en el tiempo, sino que el suelo se compone de dos estratos, uno inferior de arena sobre el que descansa una capa de arcilla.

a. Se considera una sección horizontal de 80 m de ex-

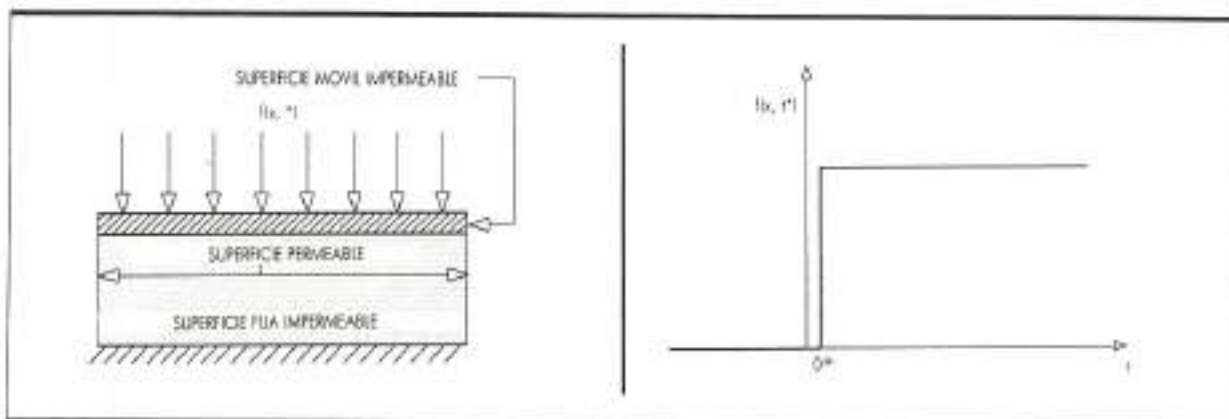


FIGURA 3. Consolidación bajo una lámina.

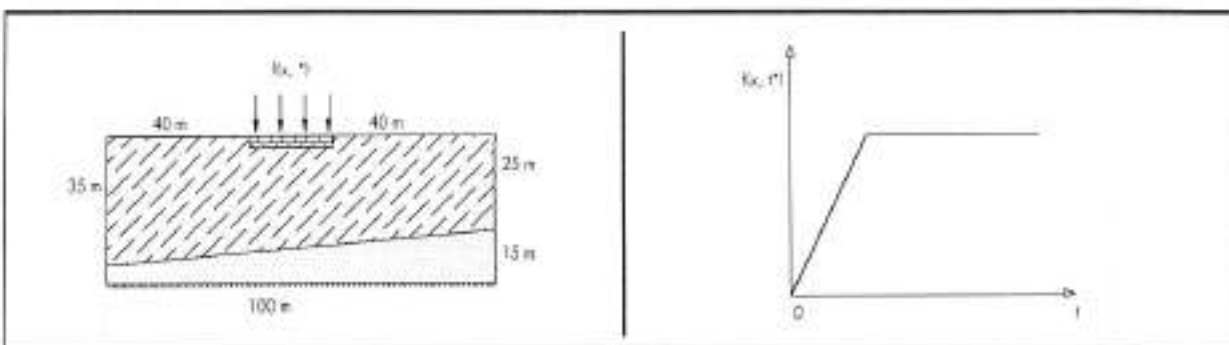
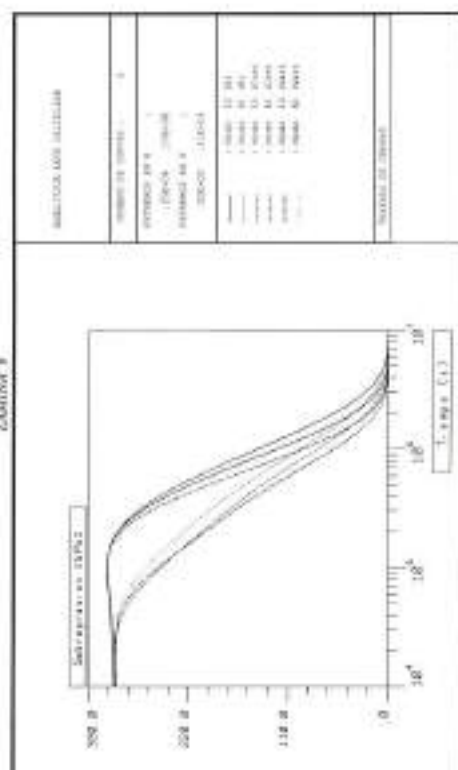
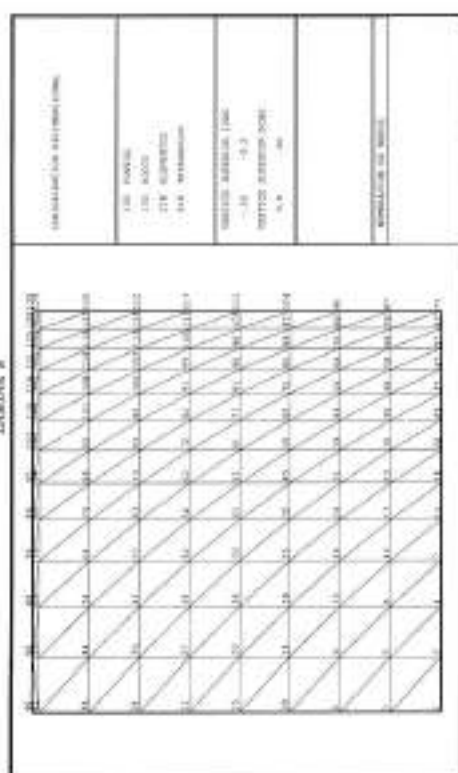


FIGURA 4. Consolidación bajo una losa.

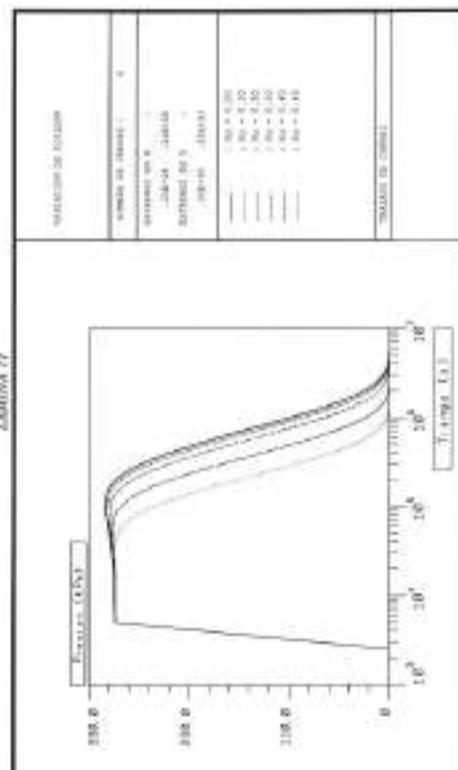
LAMINA 6



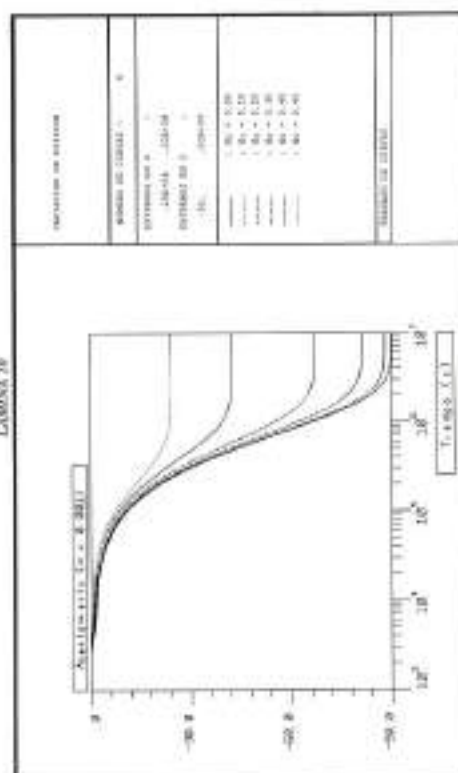
LAMINA 7



LAMINA 8



LAMINA 9



tensión y 30 m de espesor, situado sobre un estrato rocoso impermeable. La capa se compone de un estrato inferior de arena, a una profundidad de 23 m en un extremo y 18 en el otro, y otro de arcilla, en la que se encuentra incluida una losa de 18 m de largo y 1 de espesor.

b. El flujo de agua se realiza a través de la superficie del terreno y de las caras laterales del estrato arenoso.

c. Se aplica una carga f que varía de forma lineal hasta llegar a 300 kN/cm² para un tiempo de $2,5 \times 10^5$ s, manteniéndose constante en ese valor durante el resto del proceso.

d. Las propiedades de los materiales son:

	ARCILLA	HORMIGON	ARENA
MÓDULO EDOMETRICO (E_p)	5 MPa	20.000 MPa	5 MPa
COEFICIENTE DE POISSON (ν)	0,2	0,3	0,45
PERMEABILIDAD (k)	10^{-8} m/s	10^{-2} m/s	10^{-3} m/s

Las láminas 12 y 13 presentan las curvas de asentamientos y presiones intersticiales, en varios puntos de la zapata, medidos a la izquierda del centro de la misma. Se observa cómo la curva de asentamientos tiene dos partes claramente diferenciadas: una primera parte donde los asentamientos son proporcionales al incremento de carga, y una segunda parte en que, ya sin carga, se siguen produciendo asentamientos de forma más suave. La primera parte es claramente explicable como la deformación elástica producida en el sustrato de arena de la carga (al ser su permeabilidad alta, la respuesta a la carga es inmediata), mientras que la segunda corresponde a la deformación del estrato de arcilla, el cual comienza con el drenaje del fluido intersticial. Igualmente se observa que, en los primeros instantes, la presión en el centro de la losa es inferior a la existente en sus extremos, hecho experimentalmente comprobado. Este efecto se pone de manifiesto más claramente en la lámina 14, en que se muestra la evolución de presiones en un corte del terreno a 1 m de profundidad y que se extiende a 15 m a ambos lados de la losa.

Finalmente se ha hecho un estudio, para diferentes tiempos de la evolución de las presiones (lámina 15-18). Cabe destacar la aparición de picos de presiones en los extremos de la losa, hecho ya observado en la práctica por Juárez (1967) o Sutton (1986), que posteriormente se desarrollan formando un bulbo de presiones intersticiales.

TIEMPO	0,5000E + 05	0,1600E + 06	0,5500E + 06	0,9250E + 06
LÁMINA	15	16	17	18

5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una formulación consistente con la teoría tridimensional de Biot (incorpora los efectos debidos a cambios significativos de la geometría). En coherencia con la teoría, se ha restringido al caso de suelos con esqueleto elástico, aun cuando se permite el caso de suelos no homogéneos e isotrópicos. Sin embargo, usando una misma aproximación es posible extender esta teoría al análisis de suelos con comportamientos no elásticos.

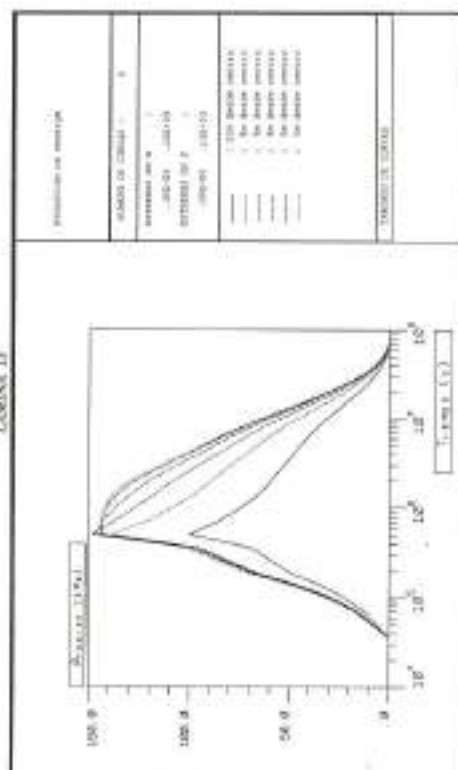
Asimismo, el modelo desarrollado permite considerar que la permeabilidad sea dependiente del grado de asentamiento, lo que concuerda mejor con los resultados empíricos.

Por otro lado, se comprueba la robustez del algoritmo desarrollado, ya que permite trabajar con valores límite de permeabilidades.

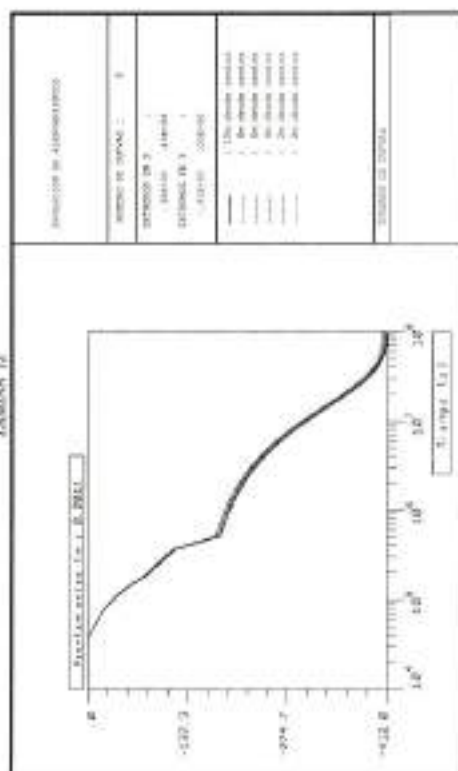
REFERENCIAS

- BABCHIA, M. Z. y MAGNAN, J. P. (1986). «Analyse numérique du comportement des massifs de sols argileux». *Rapport de Recherche LPC 140*, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris.
- BIOT, M. A. (1941). «General theory of three-dimensional consolidation». *J. Appl. Phys.* 12, 155-164.
- BOOKER, J. R. y SMALL, J. C. (1975). «An investigation of the stability of numerical solutions of Biot's equations of consolidation». *Int. J. Solids Structures*, Vol. 11, 907-917.
- BOOKER, J. R. y SMALL, J. C. (1977). «Finite element analysis of primary and secondary consolidation». *Int. J. Solids Structures*, Vol. 13, 137-149.
- CARTER, J. P., SMALL, J. C. y BOOKER, J. R. (1977). «A theory of finite elastic consolidation». *Int. J. Solids Structures*, Vol. 13, 467-478.
- CRYER, C. (1983). «A comparison of three dimensional theories of Biot and Terzaghi». *Qual. J. Mech. App. Math.* Vol. 16, 401-412.
- DARCY, H. (1856). *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Dijon, Paris.
- DUVAUT, A. y LIONS, J. L. (1972). «Problèmes classiques et problèmes de frottement en élasticité et visco-élasticité». En *Les Inéquations en Mécanique et Physique*, Dunod, Paris, 102-195.
- JUAREZ, E. y RICO, A. (1967). «Cimentaciones poros profundas». En: *Mecánica de Suelos, Tomo II: Teoría y aplicaciones de la Mecánica de Suelos*, Ingeniería, México.
- MATHERON, G. (1987). *Elements pour une théorie des milieux poreux*, Masson, Paris.
- MANDEL, J. (1953). «Consolidation des sols (étude mathématique)». *Geotechnique*, Vol. 3, 287-299.
- MENENDEZ, C. (1991). *Modelización Matemática y Simulación Numérica del Fenómeno de Consolidación de Suelos*, Tesis Doctoral, Oviedo.
- MENENDEZ, C. (1992). «Simulation of fully saturated soil consolidation problems». *Rapport Technique*, n.º 136, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris.
- NAHRA, R. y FRANK, R. (1986). «Contributions numériques et analytiques à l'étude de la consolidation autour du pressiomètre». *Rapport de Recherche LPC 137*, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris.

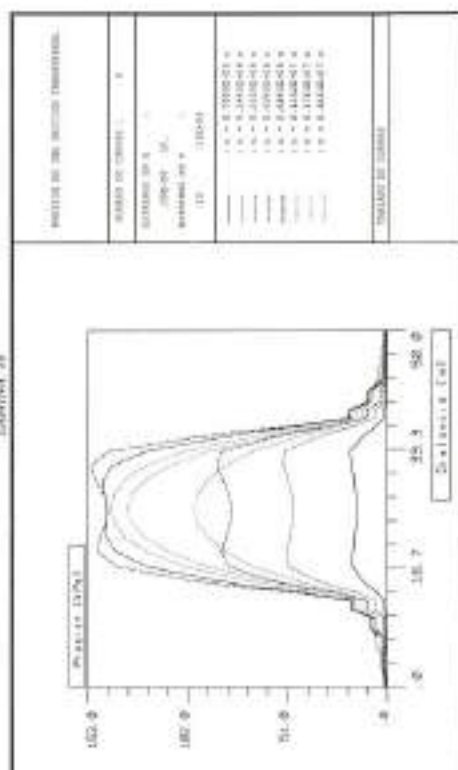
LAMINA 17



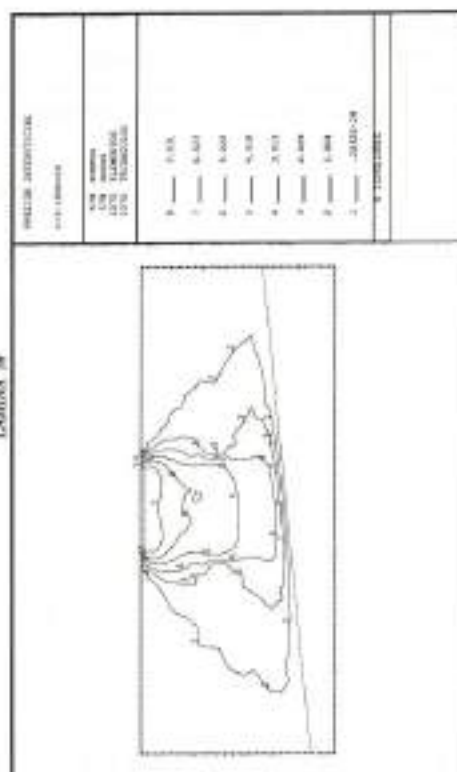
LAMINA 18



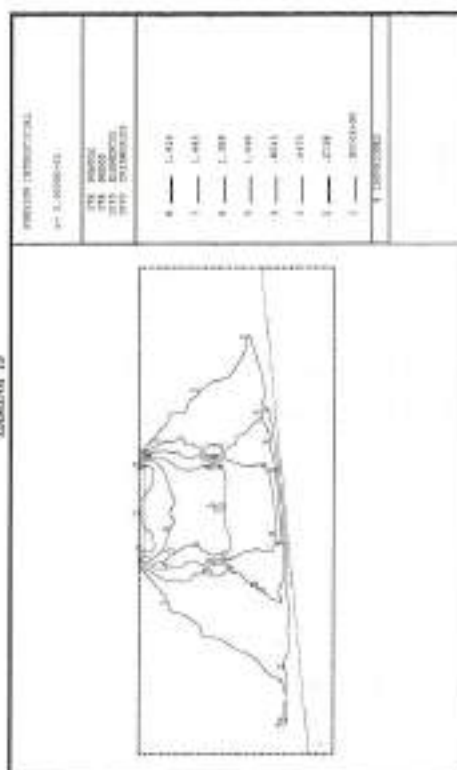
LAMINA 19



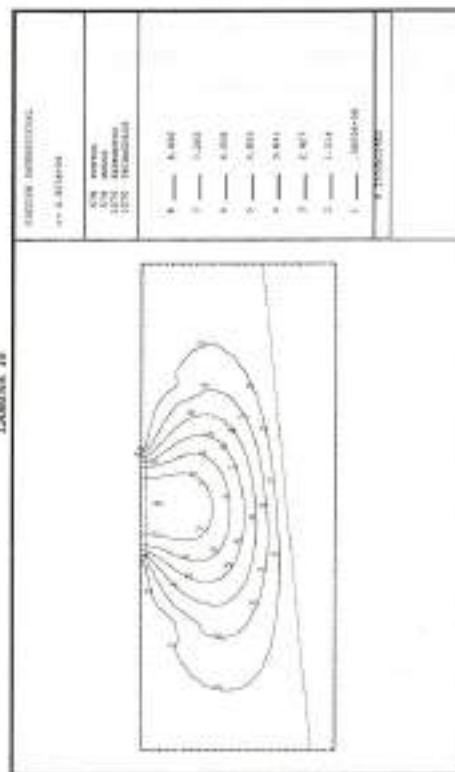
LAMINA 16



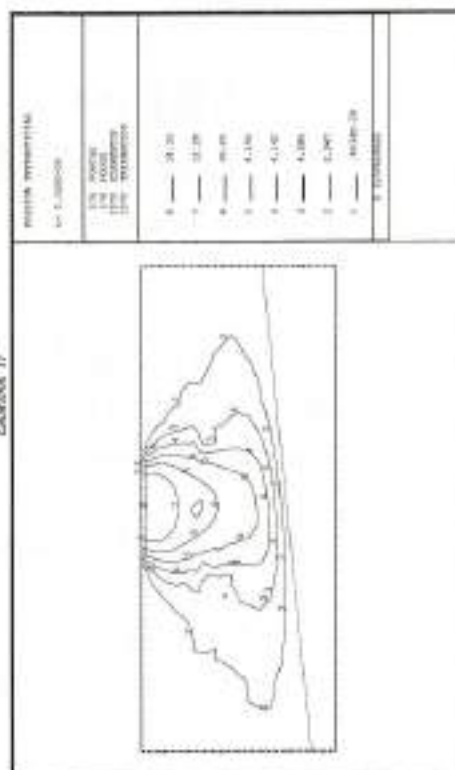
LAMINA 15



LAMINA 18



LAMINA 17



SANDHU, R. S.; LEE, S. C. y THE, H. (1985). «Special finite elements for analysis of soil consolidation». *Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomechanics*, Vol. 9, 125-147.

SCHIFFMAN, R. L.; CHEN, A. T. F. y JORDAN, J. C. (1969). «An analysis of consolidation theories». *Proc. Am. Soc. Civ. Engng*, Vol. 95, n.º SM1, 285-311.

SIRIWARDANE, H. J. y DESAI, C. S. (1981). «Two numerical schemes for non-linear consolidations». *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 17, 405-426.

SUTTON, B. H. C. (1986). «Compressibility of soil and settlement of foundations. En: *Solving Problems in Soil Mechanics*. Longman Scientific y Technical, Singapore.

SISTEMAS DE CONTROL DE TRAFICO URBANO E INTERURBANO

ABENGOA SAINCO TRAFICO, S.A.

C/. Albarracín, 21 - Tel. 304 42 66 - Fax 327 02 17
28037 MADRID

Para acometer todo tipo de proyectos en el campo del Control de Tráfico Urbano e Interurbano, SAINCO TRAFICO tiene estructurada su actividad en cuatro áreas fundamentales:

- Investigación y Desarrollo.
- Ingeniería.
- Fabricación y Suministro.
- Instalaciones, Servicios Técnicos y Mantenimiento.

V I S T A S A E R E A S

OTRA FORMA DE VIAJAR.

OTRO ESTILO DE ATENCION.

OTRA MANERA DE SER.



AVIACO



CENTRALES ELECTRICAS • AGRONOMIA • OBRAS HIDRAULICAS
• CARRETERAS • PUERTOS Y COSTAS • ARQUITECTURA Y URBANISMO •
GEOLOGIA Y GEOTECNIA • MEDIO AMBIENTE • PLANTAS INDUSTRIALES



inypsa

INFORMES Y PROYECTOS, S.A.

INGENIEROS CONSULTORES

MADRID

General Diaz Portier, 43
Teléfono: 181 402 45 50*
Télex: 42496 inyp E
28001 MADRID

BARCELONA

Gran Via de Carlos III, 124
Teléfono: 1931 205 09 62
Télex: 12809 inyp E
08034 BARCELONA