Fórmulas de curvas de gastos: en busca del máximo aprovechamiento

MANUEL MENENDEZ CAMPO (*)

RESUMEN. El tratamiento informático del trazado de las curvas de gastos que se apoyan en aforos directos, abre unas expectativas suficientemente aceptables para pensar que se puede prescindir del dibujo manual, dado el amplio abanico de posibilidades que se consiguen con la combinación adecuada de los tipos más usuales de fórmulas. En la práctica se logra una flexibilidad similar a la del trazado manual, pero con las ventajas que el cálculo informático ofrece, en cuanto a la rapidez de los tanteos, control objetivo de la calidad de los mismos y obtención automática de las tablas de gastos correspondientes.

EXPENSE CURVE FORMULAES SEARCHING FOR OPTIMUM MANAGEMENT

ABSTRACT. *The use of computers for the sketch of the discharge curves based upon current meter measurements offers a chance for eluding the manual sketch, because of the great number of solutions that can be tried with the employment of combination of formulas. In practice, it is possibly as flexible as the manual sketch, but with the advantages of the use of computers: celerity of calculation of the posible solutions and control of quality of them, and automatic obtaiment of numeric data of the stage discharge relation.*

1. INTRODUCCION

Los tres tipos de fórmulas empíricas que más se emplean para calcular curvas de gastos son: las polinómicas, en particular la de segundo grado; la potencial y la exponencial.

Concretamente, en este trabajo, se van a utilizar las siguientes:

$$Q = Ah^2 + Bh + C \qquad [1]$$

$$Q = A(h - h_o)^B \qquad [2]$$

$$Q = A^{h-h_o} - 1 \qquad [3]$$

Para más detalle sobre estas fórmulas, se puede ver un artículo anterior, titulado «Fórmulas de curvas de gastos: descripción de las más usuales y presentación de una nueva», del mismo autor, publicado en el número 79 de esta revista.

2. PLANTEAMIENTO

Partiendo de las tres fórmulas citadas, aplicando criterios de mejor ajuste, se obtiene una primera curva, a la que se conviene en denominar «principal». Esta puede ser la solución por sí sola, o no, de acuerdo con lo que se expresa seguidamente.

Se considera un ajuste aceptable cuando la desviación media es menor del 10 %, entre el caudal de la curva y el representado por los aforos.

Además de tenerse en cuenta el criterio matemático de la bondad del ajuste, es preciso ponderar otros aspectos físicos del problema, por ejemplo la curvatura, que tiene que ser la adecuada: salvo en casos muy excepcionales ésta tiene que ser convexa, vista desde el sentido positivo del eje de alturas. Otra característica física es la altura de escala para la cual se da un caudal cero: lo normal es que ésta sea cero o mayor que cero, pues en caso contrario podría quedar «desconectada» la escala, es decir, por encima de la lámina de agua, en estiajes, por ejemplo.

En cuanto a la parte alta de la curva, cuando hay que extrapolar de forma excesiva sobre los aforos disponibles, su trazado requiere un estudio especial, para lo que se pueden utilizar procedimientos hidrológicos adecuados, si se dispone de los datos necesarios, tales como secciones trasversales, longitudinales, etc. En cualquier caso, es posible que tengamos un aforo, o un punto alto, por el que convenga que pase la curva.

Es, resumiendo, bastante frecuente que se haya conseguido un buen ajuste matemático con una de las curvas «principales», pero que convenga modificar la parte baja y/o la alta, para ceñirse mejor a determinadas cir-

(*) Ingeniero Técnico de Obras Públicas. Jefe de la División de Hidrometría del Centro de Estudios Hidrográficos del CEDEX (MOPT).

cunstancias, tales como la altura h_0 de caudal nulo, y el paso por algún punto alto. La modificación se consigue con la utilización de curvas «complementarias», que se eligirán dentro de los tipos ya definidos para las «principales», afectando a la parte baja, a la parte alta o a ambas, es decir, que con dos, o a lo sumo tres curvas (una «principal» y una, o dos, «complementarias») se encuentra un abanico de posibilidades lo suficientemente amplio para abordar la solución más idónea. Concretamente se dispone de 18 casos de dos tramos: nueve formados por la principal más una complementaria inferior, y otros tantos correspondientes a principal más complementaria superior. El número de tanteos de tres tramos, principal más complementaria inferior más complementaria superior, es de 27. Sumando las tres situaciones de un tramo y las de dos y tres, se llega a cuarenta y ocho posibilidades a tener en cuenta, en principio. Más adelante, en el apartado 4, se matizará este número.

3. METODOLOGIA

La obtención de cualquiera de las tres fórmulas principales se aborda a través de la función de mínimos cuadrados.

En La [1]

$$Q = Ah^2 + Bh + C$$

la función se aplica directamente a la fórmula, obteniéndose:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (Ah_i^2 + Bh_i + C - Q_i)^2$$

Anulando las derivadas con respecto a A, B y C se obtiene el sistema que permite calcular estos parámetros.

En la [2]

$$Q = A\ (h - h_0)^B$$

se elige previamente h_0, se toman logaritmos y se realiza una transformación de variables, con lo cual se llega a la recta

$$x = By + b$$

siendo:

$$x = \log Q$$

$$y = \log (h - h_0)$$

$$b = \log A$$

La función aplicada a la recta es:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (By_i + b - x_i)^2$$

Del sistema que resulta de anular las derivadas con respecto a B y b, se obtiene directamente B, siendo $A = 10^b$.

En la [3]

$$Q = A^{h-h_0} - 1$$

la función se aplica a la recta

$$h = ax + h_0$$

que resulta de tomar logaritmos y hacer

$$x = \log (Q + 1)$$

$$\frac{1}{a} = \log A$$

La función es

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + h_0 - h_i)^2$$

que produce, anulando las derivadas con respecto a a y h_0, el sistema que determina directamente h_0, siendo $A = 10^{1/a}$.

Para la obtención de las complementarias, tanto inferiores como superiores, las condiciones que se establecen son las siguientes:

Las dos curvas, principal y complementaria, deben ser tangentes en un punto previamente elegido. De aquí se obtienen dos ecuaciones: una la de igualdad de tangencia y otra la de igualdad de coordenadas, para el mismo punto de tangencia, en ambas.

Esto supone que si la complementaria es la [3], en la que sólo hay dos parámetros a determinar, estas dos ecuaciones son suficientes, es decir, la exponencial complementaria queda determinada por el punto de tangencia elegido. Se dispone, por tanto, de un único grado de libertad: la elección del punto de tangencia.

Si la complementaria es la [2], el punto de tangencia proporciona dos ecuaciones. Cuando la [2] es principal, lo más práctico es definir previamente el nivel para caudal nulo, h_0, lo que equivale a obligar a que pase por el punto (0, h_0), pero cuando es complementaria, sobre todo en la parte superior, es preferible permitir que el punto de paso elegido sea cualquiera, con lo cual h_0 sería incógnita. Es decir, se tienen tres incógnitas: A, B y h_0. La tercera ecuación se obtiene de hacer pasar la curva por el punto elegido. Los grados de libertad son dos: el punto de tangencia y el otro punto de paso.

Si se utiliza la [1] hay tres coeficientes A, B y C, a determinar. Como se decía para el caso anterior de la potencial, con la elección del punto de tangencia se consiguen dos ecuaciones, y la tercera conviene también obtenerla de otro punto de paso que interese. Existen, entonces, dos grados de libertad: el punto de tangencia y otro punto a elegir, que se considere oportuno.

Se dan, como resultados de la metodología matemática expuesta, las fórmulas de los parámetros de las curvas complementarias, según los tres tipos definidos:

$$Q = Ah^2 + Bh + C \qquad [1]$$

$$A = \frac{K}{h_1 - h_2} - \frac{Q_1 - Q_2}{(h_1 - h_2)^2}$$

$$B = \frac{2h_1\,(Q_1 - Q_2)}{(h_1 - h_2)^2} - \frac{K\,(h_1 + h_2)}{h_1 - h_2}$$

$$C = Q_1 + \frac{K\,h_1\,h_2}{h_1 - h_2} - \frac{h_1^2\,(Q_1 - Q_2)}{(h_1 - h_2)^2}$$

$$Q = A\,(h - h_o)^B \qquad [2]$$

h_o se obtiene de:

$$\left(\frac{h_2 - h_o}{h_1 - h_o}\right)^{h_1 - h_o} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^{\frac{Q_1}{K}}$$

$$B = \frac{K\,(h_1 - h_o)}{Q_1}$$

$$A = \frac{Q_1}{(h_1 - h_o)^B}$$

$$Q = A^{h - h_o} - 1 \qquad [3]$$

$$A = e^{K/(Q_1 + 1)}$$

$$h_o = h_1 - L\,(Q_1 + 1)\frac{Q_1 + 1}{K}$$

K: es el valor de la derivada, para el punto de tangencia, en la curva principal
Q_1: el caudal en el punto de tangencia
h_1: la altura en el punto de tangencia
Q_2: el caudal en otro punto elegido
h_2: la altura en otro punto elegido
h_o: la altura para el caudal nulo
L: logaritmo neperiano

4. COMENTARIOS DE CARACTER PRACTICO

La elección de la curva principal se establece por su mejor calidad de ajuste, dentro de las tres fórmulas disponibles. Cualquiera de ellas puede dar un resultado aceptable, bajo el punto de vista matemático y físico, por sí sola, con lo que no se necesitaría ninguna otra añadidura, pero es frecuente que el uso de complementarias mejore la solución. Por ejemplo, la principal de tipo parabólico puede tener, en la parte baja de la curva, el problema de no cortar al eje de alturas, es decir, el discriminante $B^2 - 4AC < 0$, o cortar en un punto no adecuado. Entonces cabe complementar, o modificar, esa parte baja con otra curva, tangente en un punto bajo (se pueden tantear los que se quieran) y que corte al eje de alturas en la altura h_o que se desee. Para ello lo mejor es elegir una parabólica o una potencial complementaria, porque tanto una como otra permiten escoger el punto de tangencia y el punto de corte con el eje de alturas.

Si la principal es exponencial, la altura en el origen, h_o, queda definida (no es opcional) y puede resultar no adecuada, en cuyo caso se complementaría también la parte inferior con una parabólica o potencial, pasando por el h_o deseado. Si se complementa la exponencial con otra del mismo tipo se obtiene la misma curva, puesto que se depende sólo del punto de tangencia, como ya se dijo en el apartado 3, con lo cual se tienen cuarenta y una posibilidades distintas, de las cuarenta y ocho mencionadas en el apartado 2.

Incluso en la potencial principal, puede que el mejor ajuste se logre con un valor h_o (elegible) no satisfactorio bajo el punto de vista físico. Entonces cabe, igualmente, utilizar como complementaria inferior la parabólica o la potencial, para conseguir el h_o correcto, sin perder en el conjunto la calidad de ajuste.

Y respecto a las complementarias superiores, como lo más frecuente es que se desee que la parte alta pase por un determinado punto alto conocido, por aforo o por otra estimación efectuada, las complementarias que mejor se prestan son, como en el caso de las inferiores, la parabólica y la potencial, que permiten elegir, además del punto de tangencia, otro punto de paso, que sería el estimado.

La posibilidad de complementar la parte inferior y la superior de la curva principal, propicia la solución simultánea de las carencias ocasionales en estas zonas, con lo que la oferta es muy variada, permitiendo suponer que no se necesita el trazado clásico manual, con las ventajas añadidas que el cálculo informático ofrece: tener una rápida maniobra de tanteos, disponer de datos de bondad de cada tanteo y obtener automáticamente la tabla de gastos de cada solución.

Se acompaña un cuadro de las posibilidades de soluciones contempladas en este trabajo.

5. EJEMPLOS

Como aplicación de lo expuesto, se incluyen dos ejemplos:

En el primero se parte de la curva principal parabólica (figura 1), cuya fórmula resulta

$$Q = 13{,}1270\ h^2 - 1{,}8213\ h + 0{,}1972$$

que da una desviación media de 7,62 %, pero que no corta al eje de alturas. Se complementa con una potencial (figura 2), cuyo punto de tangencia se elige en la altura 0,20 m, y la h_o del punto de corte igual a cero. La fórmula de esta complementaria es, para el ámbito $0 <= h <= 0{,}20$ m.

$$Q = 7{,}8169\ h^{1{,}9159}$$

siendo la desviación media del conjunto 7,33 %.

En el segundo ejemplo se completa una principal potencial (figura 3), con dos complementarias, una inferior potencial y otra superior parabólica (figura 4). La fórmula de la principal es

$$Q = 2{,}4316\ (h + 0{,}50)^{4{,}4795}$$

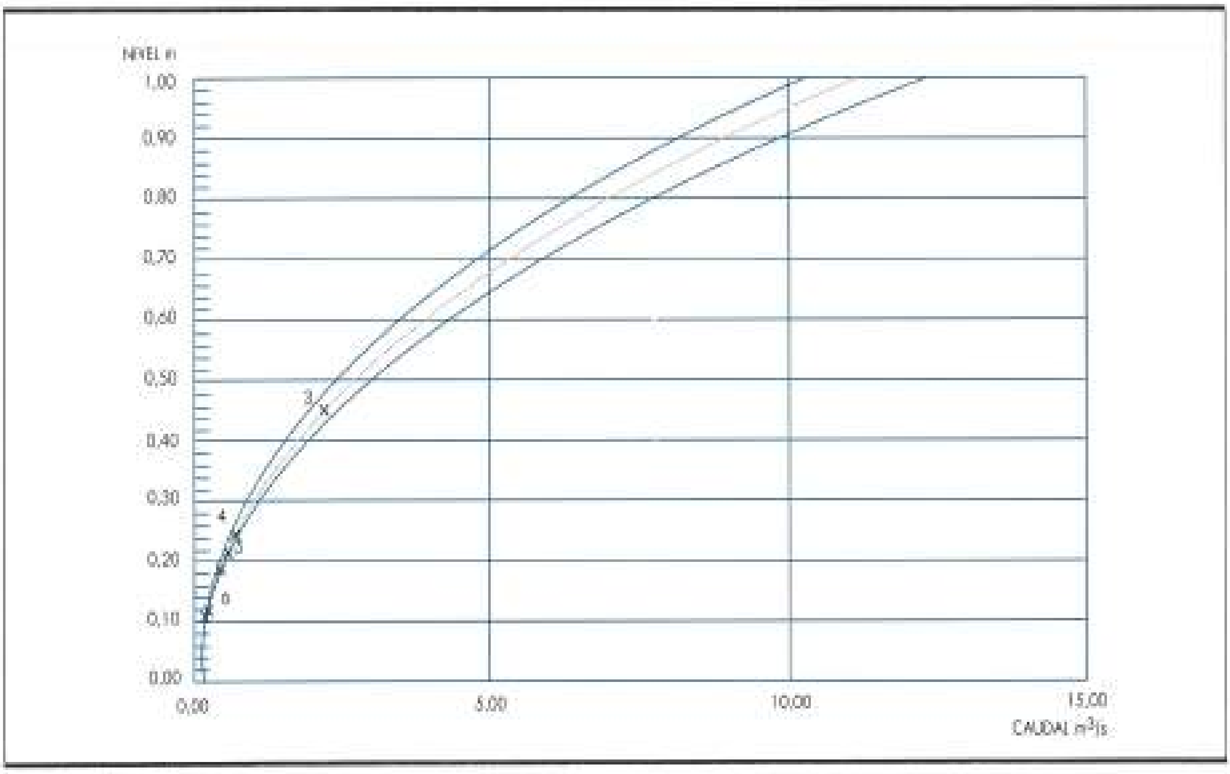

FIGURA 1. Curvas de gasto.

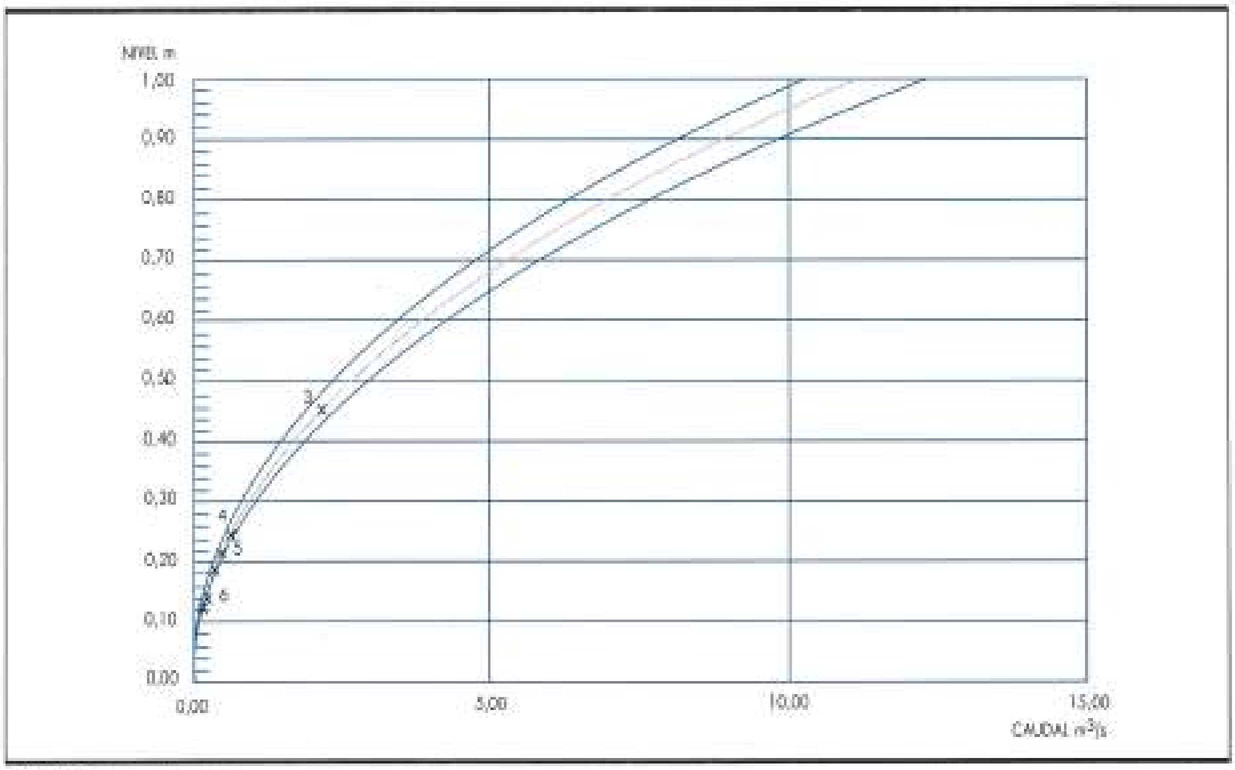

FIGURA 2. Curvas de gasto.

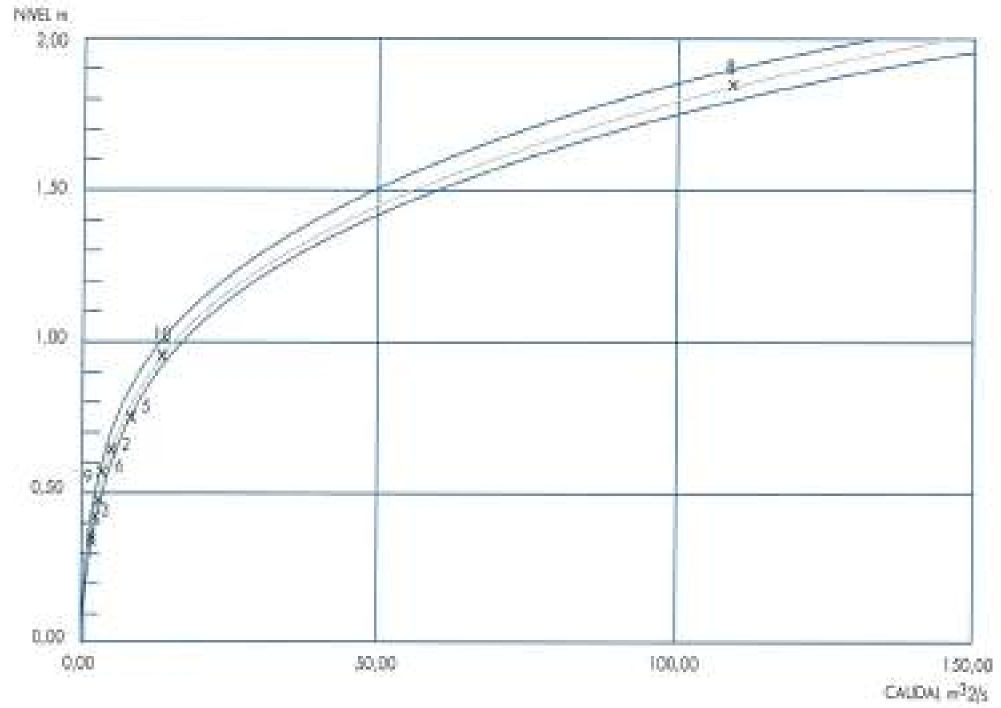

FIGURA 3. Curvas de gasto.

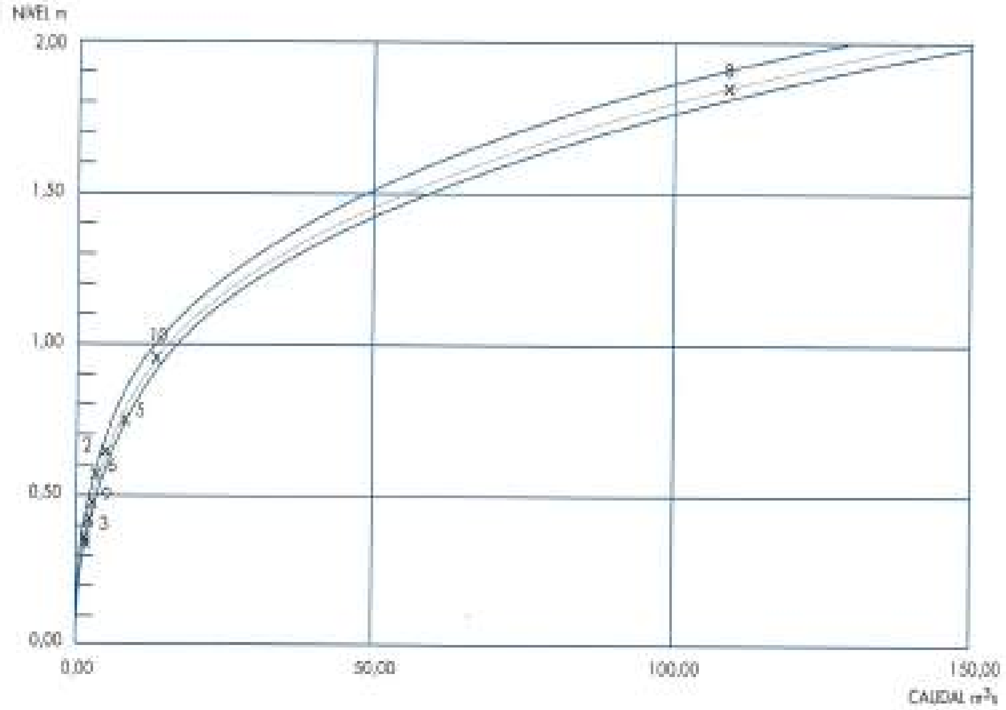

FIGURA 4. Curvas de gasto.

COMPLEMENTARIAS	PRINCIPALES			N.º DE TRAMOS
	PARABOLICA	POTENCIAL	EXPONENCIAL	
NINGUNA	*X	*X	*X	UNO
PARABOLICA INFERIOR	*X	*X	*X	DOS
POTENCIAL INFERIOR	*X	*X	*X	
EXPONENCIAL INFERIOR	X	X	= EXPONENCIAL	
PARABOLICA SUPERIOR	*X	*X	*X	
POTENCIAL SUPERIOR	*X	*X	*X	
EXPONENCIAL SUPERIOR	X	X	= EXPONENCIAL	
PARABOLICA INF. + PARABOLICA SUP.	*X	*X	*X	TRES
PARABOLICA INF. + POTENCIAL SUP.	*X	*X	*X	
PARABOLICA INF. + EXPONENCIAL SUP.	X	X	= EXPONENCIAL + PARABOLICA INF.	
POTENCIAL INF. + PARABOLICA SUP.	*X	*X	*X	
POTENCIAL INF. + POTENCIAL SUP.	*X	*X	*X	
POTENCIAL INF. + EXPONENCIAL SUP.	X	X	= EXPONENCIAL + POTENCIAL INF.	
EXPONENCIAL INF- + PARABOLICA SUP.	X	X	= EXPONENCIAL + PARABOLICA SUP.	
EXPONENCIAL INF. + POTENCIAL SUP.	X	X	= EXPONENCIAL + POTENCIAL SUP.	
EXPONENCIAL INF. + EXPONENCIAL SUP.	X	X	= EXPONENCIAL	

CUADRO DE POSIBILIDADES.

X Posibilidades correspondientes a las combinaciones definidas por la intersección de los principales con los complementarias del cuadro.
* Posibilidades más usuales.

que da una desviación media del 6,91 %, con el punto de corte a la altura −0,50 m, lo que favorece la bondad del ajuste, pero no responde a la realidad física, pues se sabe que el caudal nulo se alcanza para $h_o = 0{,}10$ m. Se elige, entonces, una complementaria inferior potencial, con los niveles de tangencia y de corte, respectivamente, en 0,35 y 0,10 m, lo que produce la fórmula, para $0{,}10 <= h <= 0{,}35$ m.

$$Q = 7{,}2935\ (h - 0{,}10)^{1{,}8175}$$

conservándose el mismo 6,91 % de desviación.

La parte superior se modifica para que pase exactamente por el aforo más alto, de altura de escala 1,85 m y caudal 108,53 m^3/seg. Para ello se elige una complementaria parabólica, con el nivel de tangencia en 1,50 m y pasando por ese aforo. La fórmula resulta, para $h >= 1{,}50$ m

$$Q = 96{,}0335\ h^2 - 166{,}6086\ h + 88{,}0814$$

pasando a valer la desviación media, del conjunto de las tres curvas, el 6,62 %.

Se dan, para ambos ejemplos, los cuadros de los aforos, que han sido datos de partida, y las tablas de gastos obtenidas.

En los gráficos, las curvas se insertan entre las bandas de ± 10 % con respecto al caudal.

NUMERO	NIVEL (m)	CAUDAL (m^3/seg)
1	0,14	0,22
2	0,19	0,35
3	0,44	1,94
4	0,25	0,53
5	0,21	0,41
6	0,13	0,15

EJEMPLO 1. Aforos.

NUMERO	NIVEL (m)	CAUDAL (m^3/seg)
1	0,35	1,18
2	0,62	3,90
3	0,43	1,60
4	0,36	1,35
5	0,75	7,85
6	0,57	2,89
7	0,38	1,30
8	1,85	108,53
9	0,49	2,51
10	0,96	13,25

EJEMPLO 2. Aforos.

NIVEL (m)	CAUDAL (m^3/seg)
0,00	0,000
0,05	0,025
0,10	0,095
0,15	0,206
0,20	0,358
0,25	0,562
0,30	0,832
0,35	1,168
0,40	1,569
0,45	2,036
0,50	2,568
0,55	3,166
0,60	3,830
0,65	4,560
0,70	5,355
0,75	6,215
0,80	7,141
0,85	8,133
0,90	9,191
0,95	10,314
1,00	11,503

EJEMPLO 1. Tabla de gastos.

NIVEL (m)	CAUDAL (m^3/seg)
0,10	0,000
0,15	0,141
0,20	0,351
0,25	0,599
0,30	0,875
0,35	1,174
0,40	1,517
0,45	1,932
0,50	2,432
0,55	3,026
0,60	3,727
0,65	4,548
0,70	5,503
0,75	6,607
0,80	7,876
0,85	9,327
0,90	10,977
0,95	12,845
1,00	14,952
1,05	17,317
1,10	19,964
1,15	22,914
1,20	26,193
1,25	29,825
1,30	33,836
1,35	38,255
1,40	43,109
1,45	48,428
1,50	54,244
1,55	60,558
1,60	67,353
1,65	74,628
1,70	82,383
1,75	90,619
1,80	99,334
1,85	108,530
1,90	118,206
1,95	128,362
2,00	138,998

EJEMPLO 2. Tabla de gastos.

IV JORNADAS ESPAÑOLAS DE PRESAS

MURCIA, 4 y 5 de MAYO de 1993

INVITACION. El Comité Nacional Español de Grandes Presas invita a todas las personas interesadas en la temática de grandes presas a las IV Jornadas Españolas de Grandes Presas que se van a celebrar en Murcia durante los días 4 y 5 de mayo de 1993.

Se han propuesto dos temas de la máxima actualidad para debatir en estas Jornadas: cimentación de presas y las presas y la planificación hidrológica.

Las Jornadas serán eficaces si hay una masiva participación de los especialistas en presas y de las personas dedicadas a la planificación hidrológica.

Este Comité espera una acogida entusiasta a las cuestiones propuestas, que, sin duda, contribuirán a aumentar el bien ganado prestigio español.

Se espera contar con la colaboración de destacados ponentes nacionales e internacionales.

La elección de Murcia como sede para estas Jornadas responde a la ingente tarea que se desarrolla en la Confederación Hidrográfica del Segura con motivo del Plan de Defensa de Avenidas, que ha propiciado la construcción de 13 nuevas presas en un corto espacio de tiempo.

LOCALIZACION. Las Jornadas se desarrollarán durante los días 4 y 5 de mayo de 1993 en Murcia, en el local que oportunamente se fije.

Toda la documentación e información referente a las Jornadas deberán remitirse a la Secretaría de las mismas.

CUESTIONES DE LAS IV JORNADAS ESPAÑOLAS DE GRANDES PRESAS. Las Jornadas Españolas de Presas se articulan a través de dos temas principales: uno técnico y otro denominado de fomento. Para estas IV Jornadas el Comité Nacional Español de Grandes Presas ha elegido para su debate las siguiente cuestiones:

Tema técnico: cimentación de presas

— Influencia del cimiento en la selección del tipo de presa.
— Métodos tradicionales y nuevas técnicas de tratamiento de cimentaciones, con especial referencia a cimientos difíciles.
— Comportamiento no satisfactorio de cimentaciones: medidas correctoras.
— Nuevas técnicas de investigación de cimentaciones de presas.
— Caracterización de las propiedades dinámicas del cimiento.
— Auscultación de cimientos de presas.

Tema de fomento: las presas y la planificación hidrológica

— **La regulación:**
- Criterios generales.
- Sistemas múltiples.
- Gestión integrada.
- Problemas localizados.

— **Las presas y los trasvases:**
- Modulación de caudales.
- Sistemas conjuntos.
- Regulación final.
- Aprovechamientos energéticos.

— **Los efectos sobre los ríos:**
- El entorno del embalse.
- Los cauces aguas abajo.
- Caudales medioambientales.
- El caso de los hiperembalses.

— **Los fenómenos hidráulicos extremos:**
- Inundaciones.
- Sequías.

— **Efectos socio-culturales y económicos:**
- Poblaciones afectadas. Evolución posterior.
- Alteraciones arqueológicas y artísticas.
- Los análisis económicos.
- Otros sectores afectados. Caso de la hidroelectricidad.

PRESENTACION DE COMUNICACIONES. Las Comunicaciones que se quieran presentar a las Jornadas deberán remitirse a la Secretaría de las mismas antes del 28 de febrero de 1993.

Los textos deberán mecanografiarse a doble espacio en hojas tamaño DIN A4, en una sola cara, y con un número máximo de 15 páginas (incluidos gráficos y fotografías). Se recomienda el uso de máquinas eléctricas o impresoras de calidad, ya que los textos se reproducirán directamente de los remitidos por los autores, por lo que también los gráficos y fotografías deben estar bien compaginados y tener una gran claridad.

Los textos de la comunicación deberán iniciarse con el título, autores, centros y domicilios de los autores, a los que seguirá un resumen con un máximo de 200 palabras.

El encuadre de los textos en las hojas DIN A4 se ha normalizado según los modelos que se encuentran en la Secretaría de las Jornadas, en los que se delimitan la primera y restantes páginas de la Comunicación. Las hojas deberán numerarse en el extremo superior derecho.

Las Comunicaciones remitidas a las Jornadas serán revisadas por un Comité Científico que decidirá sobre su aceptación, que será comunicada a los autores antes del 1 de abril de 1993.

Las Comunicaciones aceptadas serán presentadas y discutidas en las distintas sesiones y cada autor dispondrá de unos ocho minutos para su presentación.

SECRETARIA DE LAS JORNADAS
CONFEDERACION HIDROGRAFICA DEL SEGURA
Plaza de Fontes, n.º 1. 3001 MURCIA.
Teléfono: (968) 21 23 55. Fax: (968) 21 18 45.

EDERSA ESCORIAS Y DERIVADOS, S.A.

DOMICILIO SOCIAL Y OFICINAS:
Carretera de Avilés al Faro Peñas, Km. 1,5
Parque de Lobos - Apartado 447 - 33400-Avilés
Teléfonos: (98) 554 09 92 - 554 78 19
Fax: (98) 554 89 45

EMPRESA COMERCIALIZADORA DE LAS ESCORIAS
PROCEDENTES DE HORNOS ALTOS Y LD.

- Escorias clasificadas (cualquier uso).
- Escorias granuladas.
- Mezclas tratadas (escoria-escoria, grava-escoria, escoria-sosa).
- Escorias de Acería LD
  (para mezclas bituminosas y tratamientos superficiales).

CENTROS DE PRODUCCION EN:

- Avilés (Parque de Lobos).
- Gijón (Somonte).

PRINCIPADO DE ASTURIAS

CONSEJERIA DE INFRAESTRUCTURAS
Y VIVIENDA

PLAN REGIONAL DE CARRETERAS

UTILIZACION DE ESCORIAS DE ACERIA COMO ARIDO EN MEZCLAS BITUMINOSAS

UTILIZACION DE ESCORIAS DE ALTO HORNO CRISTALIZADAS COMO ARIDO EN CAPAS DE BASE Y SUB-BASE DE CARRETERAS

UTILIZACION DE ESCORIAS GRANULADAS COMO AGLOMERANTE DE MATERIALES GRANULARES EN FIRMES DE CARRETERAS