

Rotura por localización en geomateriales

I. Aspectos físicos y experimentales

MANUEL PASTOR PEREZ (*)

RESUMEN. En el proyecto de una determinada estructura o cimentación tiene importancia la predicción de las condiciones en que tendrá lugar la rotura, de forma que sea posible conocer su seguridad. En muchas ocasiones, aparecen superficies o líneas de rotura claramente definidas donde se concentra el daño. Este tipo de rotura se denomina rotura por la localización, y se puede observar tanto en estructuras reales como en probetas ensayadas en laboratorio. Para simular estos fenómenos se emplean programas de cálculo y modelos constitutivos que se calibran con datos experimentales. El propósito de este artículo, primero de una serie que tratará el problema de la rotura por localización en geomateriales, es describir los aspectos físicos y experimentales básicos del problema.

LOCALIZATION FAILURE IN GEOMATERIALS. I. PHYSICAL AND EXPERIMENTAL ASPECTS

ABSTRACT. Prediction of conditions under which failure of engineering structures will take place is of paramount importance to evaluate their factor of safety. Failure mechanism often consists on clearly defined surfaces or lines of failure where the damage is concentrated. This type of failure, referred to as failure by localization of shear strain, can be observed both in structures and in laboratory specimens. Numerical models and constitutive equations calibrated with experimental models are used to simulate these phenomena. The aim of this paper, the first of a series dealing with the problem of localization failure in geomaterials, is to describe the basic experimental and physical aspects of the problem.

1. INTRODUCCION

Los ingenieros que proyectan estructuras donde intervienen los geomateriales se encuentran a menudo con el problema de tener que predecir su comportamiento bajo las acciones de cálculo y las condiciones en las que tendrá lugar la rotura. La predicción correcta del mecanismo de rotura reviste una particular importancia ya que permitirá modificar el proyecto o bien reforzar las zonas más débiles.

La clase de rotura dependerá del tipo de material considerado, así como del nivel de tensiones y temperatura a que esté sometido. En general, existen dos grandes patrones de comportamiento que son el frágil y el dúctil. En el primer caso, el proceso de rotura consiste en la aparición de una serie de fisuras que se agrupan concentrándose en algunas zonas del material, produciendo un efecto de degradación de sus propiedades mecánicas. Este es el caso del hormigón y de las rocas a

presiones de confinamiento bajas, como las que aparecen en las obras superficiales.

Por el contrario, los materiales granulares y algunos materiales cohesivos, como por ejemplo las arcillas, presentan un tipo de rotura dúctil, caracterizada frecuentemente por la concentración de la deformación plástica en bandas de pequeño espesor, que se denominan bandas de cortante (shear bands), a partir de las cuales se forman las superficies de rotura. En estos casos, el mecanismo de rotura consiste en una superficie a lo largo de la cual desliza una masa de material. La deformación se concentra en esta superficie de rotura, siendo menos importante en otras zonas. Dependiendo de la naturaleza del material y de sus condiciones tensionales, la rotura puede llegar a ser de tipo catastrófico, presentando la curva «carga global»-«desplazamiento» un pico más allá del cual no es posible el equilibrio si se intenta mantener la carga.

Este es el caso de aquellos suelos que presentan un pico en su resistencia al esfuerzo cortante, como ocurre por ejemplo en las arenas densas bajo condiciones drenadas o en las muy sueltas cuando la velocidad de aplicación de la carga es tal que no tiene lugar el drenaje del agua intersticial. La forma en la que se produce la rotura de la estructura está, pues, relacionada con el tipo de comportamiento del material, y especialmente con la existencia de reblandecimiento en el mismo.

(*) Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Jefe del Sector de Ingeniería Computacional del Centro de Estudios de Técnicas Aplicadas del CEDEX (IMCFT). Profesor Titular de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid.

Desde un punto de vista físico, la localización de la deformación plástica o del daño tiene lugar inicialmente en zonas donde aparece una concentración de tensiones o donde el material es más débil, y es a partir de estos núcleos desde donde se desarrollan las bandas de cortante y las superficies de rotura.

De la misma manera que se producen bandas de cortante y superficies de rotura en estructuras, la rotura de una probeta en una máquina de ensayo tiene muchas veces lugar mediante el mismo mecanismo.

Las máquinas de ensayo están diseñadas de manera que el campo de tensiones a que se somete la probeta sea homogéneo, de forma que el comportamiento observado corresponda a la respuesta del material bajo el estado tensional o los recorridos tensionales que interesa estudiar.

Sin embargo, estas condiciones ideales son difíciles de alcanzar en la práctica, de forma que no hay homogeneidad en el campo de tensiones aplicado ni en el material. Por ello, al aumentar gradualmente la carga, se llega a rotura antes en algunas zonas que en otras. Si el material ensayado es un material que presenta reblandecimiento, la deformación y el daño tenderán a concentrarse en estas zonas, lo cual originará la aparición en ellas de bandas de cortante que se propagarán hacia otras zonas.

Hay que hacer notar aquí que, una vez que la banda de cortante ha comenzado a desarrollarse, las deformaciones en la probeta dejan de ser homogéneas, y los resultados globales obtenidos corresponden al conjunto de la banda y el material exterior a la misma, no correspondiendo al comportamiento real del material.

Como consecuencia inmediata de este problema, es sumamente difícil interpretar los resultados de los ensayos a partir del momento en que aparece la banda, encontrándose incluso diferentes curvas tensión-deformación para diferentes tamaños de probeta.

Una segunda consecuencia es la dificultad de desarrollar una ecuación constitutiva que sea válida en el régimen post-pico, ya que, como se ha indicado, no se conoce la respuesta real del material.

Respecto del cálculo de mecanismo de rotura, existen métodos simplificados basados en el análisis límite, pero tan sólo son válidos para materiales que no reblandezcan, y presentan el inconveniente de no conocer la posición y forma de la o las superficies de rotura. Por otra parte, es práctica común en los análisis de estabilidad el emplear los valores de la resistencia residual, como por ejemplo se hace en Mecánica del Suelo, dependiendo este parámetro tanto de la geometría y tamaño de la probeta como del tipo de ensayo donde se ha obtenido.

El método de los elementos finitos es una de las herramientas más potentes con que cuentan hoy en día los ingenieros para realizar este tipo de predicciones. Sin embargo, existen tres problemas fundamentales que complican extraordinariamente la obtención de las condiciones de rotura, y que son:

- (1) Difusión de la superficie de rotura en la malla, de forma que la deformación se distribuye en una banda cuya anchura es de tres elementos aproximadamente.
- (2) Dependencia de los resultados obtenidos del tamaño de la malla, siendo tanto más frágil el comportamiento global cuanto más fina sea aquella.
- (3) Dependencia de la orientación de la malla, que puede llevar a la predicción de un mecanismo incorrecto de rotura.

Estos problemas están relacionados con las características del sistema de ecuaciones en derivadas parciales que rigen el fenómeno, que cambian de naturaleza cuando aparece una banda de cortante de elípticas a hiperbólicas, o viceversa, con la consecuencia de resultar un problema mal planteado desde el punto de vista matemático, para el cual pueden existir infinitas soluciones.

Por estos motivos, tanto desde el punto de vista experimental y constitutivo como del numérico, es fundamental el llegar a entender los procesos de localización de la deformación en bandas de cortante.

Este trabajo tiene por objeto el presentar una serie de técnicas que permiten mejorar la calidad de los cálculos mediante elementos finitos, y está basado en las investigaciones realizadas por el autor en los últimos años en el marco de un proyecto de investigación del grupo europeo EUROGRECO financiado por las Comunidades Europeas [1, 9].

El enfoque general del trabajo se basa, por una parte, en el estudio de los defectos del planteamiento del problema desde el punto de vista matemático, que llevan a una dependencia de los resultados obtenidos de la malla empleada, especialmente de su tamaño y de la alineación de sus elementos, como antes se ha comentado. Esto implica que la posición de la superficie de rotura calculada puede ser incorrecta, con el consiguiente riesgo para la obra analizada.

Las soluciones encontradas hasta el momento permiten:

- (i) Llegar a una independencia del tamaño de la malla, empleando modelos constitutivos denominados no locales, en los cuales los parámetros de daño del material en un punto se hacen depender de lo que ocurre en su entorno.
- (ii) Producir, a partir de los resultados obtenidos en una malla inicial, una malla cuyos elementos se encuentren alineados a lo largo de la superficie de rotura real. Para ello, se emplean técnicas de remallado autoadaptativo puestas a punto en la Universidad de Swansea y en el Imperial College de Londres por J. Peraire [6].

Hay que destacar que la solución se basa en obtener una serie de mallas (dos o tres), mejoras sucesivas de las anteriores.

El motivo de que existan mallas para las cuales el mecanismo de rotura sea incorrecto no es conocido completamente todavía, aunque existen indicios que muestran su relación con las siguientes causas:

(a) Falta de flexibilidad del elemento para representar campos de deformaciones con localización o con cambio de volumen nulo.

(b) Empleo de elementos tipo triángulo de tres nodos.

Se han realizado experiencias para un problema tipo con diferentes tipos de elemento, así como con materiales compresibles o incompresibles, y materiales con o sin reblandecimiento. En todos los casos se ha observado la dependencia de la orientación de la malla, excepto cuando se han empleado elementos con un orden de interpolación alto.

Como posible solución para los elementos tipo triángulo lineal, se ha pensado en una formulación mixta del problema en términos de velocidades de desplazamiento y tensiones, desacoplando los mecanismos de deformación volumétrica y tangencial o desviadora.

2. ASPECTOS FÍSICOS Y EXPERIMENTALES

El primer problema que aparece al tratar de simular o reproducir la rotura de una estructura construida con geomateriales es el de obtener resultados experimentales fiables con los que se puedan desarrollar y calibrar ecuaciones constitutivas para el material. Este problema es especialmente grave en el caso de que exista reblandecimiento del material, y consiste en la pérdida de homogeneidad de los campos de tensiones y de deformaciones en la probeta ensayada. En el caso de los materiales granulares, por ejemplo, pueden aparecer en un momento dado modos de deformación del tipo denominado «difuso», como la deformación en forma de tonel simétrico o en forma de «S», o bien modos localizados como bandas de cortante. La aparición de un tipo de modo depende de la naturaleza del material, de su densidad, de la historia de tensiones, de las condiciones de contorno del ensayo, etc.

Como antes se comentó, una primera consecuencia es la obtención de valores irreales para los parámetros resistentes correspondientes a las condiciones residuales.

Debido a estas causas, es importante la caracterización de los distintos modos no homogéneos de deformación, y en especial de las bandas de cortante, tanto desde el punto de vista global y macroscópico, como desde el punto de vista local.

Respecto de los aspectos macroscópicos, interesa conocer el aspecto de la curva tensión-deformación, el espesor de la banda, su inclinación, las formas de asociación de las bandas, etc.

Sin embargo, magnitudes tales como la deformación dentro de la banda, campo de deformaciones en la probeta o evolución de la densidad dentro de la banda, quedan fuera del alcance de las técnicas de laboratorio empleadas en ensayos de rutina, siendo necesario recurrir a técnicas como la estereofotogrametría, los rayos X o incluso la interferometría láser para caracterizarlos.

Durante los últimos años se ha dedicado un gran

esfuerzo a investigar los fenómenos de localización de la deformación en bandas de cortante, así como a los modos no homogéneos de deformación, habiendo dado ya importantes frutos que han permitido entender mejor este problema. En este aspecto, son de destacar los trabajos de Desrues, quien en la universidad de Grenoble ha puesto a punto técnicas de medida precisas del campo de desplazamientos y deformaciones en probetas ensayadas en el aparato biaxial [7, 9], basadas en el método propuesto por Butterworth [10] para obtener deformaciones de una estructura de materiales sueltos a partir de fotos tomadas en instantes distintos. Si dos fotos consecutivas se analizan mediante técnicas estereofotogramétricas, el falso relieve obtenido corresponde al campo de desplazamientos, a partir del cual es posible obtener las deformaciones.

De esta manera se puede conocer el momento y la forma en que nace la banda, así como su relación con la curva tensión-deformación de la probeta. En la figura 1 se da la evolución de la tensión en un ensayo biaxial realizado en una arena densa [7] junto con los resultados obtenidos por estereofotogrametría.

Esta técnica puede aplicarse también para el análisis de la evolución de las microfisuras en el hormigón, y su posible asociación en bandas de cortante [11]. En la figura 2 se dan los resultados obtenidos por Torrenti en probetas de hormigón aplicando este método.

Son también de destacar los trabajos de Vardoulakis [12, 13], Tatsuoka [14] y Vermeer [15] entre los más representativos realizados en suelos, así como los de Van Mier [16], Shah y Maji [17] y Planas y Elices [18] en hormigón.

Los aspectos fundamentales puestos de manifiesto en los ensayos de laboratorio se describen a continuación.

3. INFLUENCIA DEL TAMAÑO DE LA PROBETA

Los resultados obtenidos en probetas del mismo material, fabricadas y ensayadas en idénticas condiciones, dependen del tamaño de la muestra ensayada, siendo tanto más frágil el comportamiento global cuanto mayor es la probeta. Este problema se ilustra en la figura 3, donde se muestran resultados típicos obtenidos por Van Mier [16] en probetas de hormigón de distintas longitudes ensayadas en compresión uniaxial.

Si se intentase obtener para un modelo de tipo elastoplástico los parámetros materiales que caracterizan el reblandecimiento, éstos dependerían de la probeta en la que se hubieran obtenido.

Este efecto aparece también en ensayos como el de flexotracción de vigas de hormigón, debiendo tenerse en cuenta la hora de interpretar los resultados obtenidos en los ensayos, y debería llevar a los técnicos a emplear fórmulas de cálculo adimensionales con una cierta cautela, ya que aparece en el problema una longitud característica a tener en cuenta, y que es el ancho de la banda de cortante.

Considérese, por ejemplo, una probeta unidimensio-

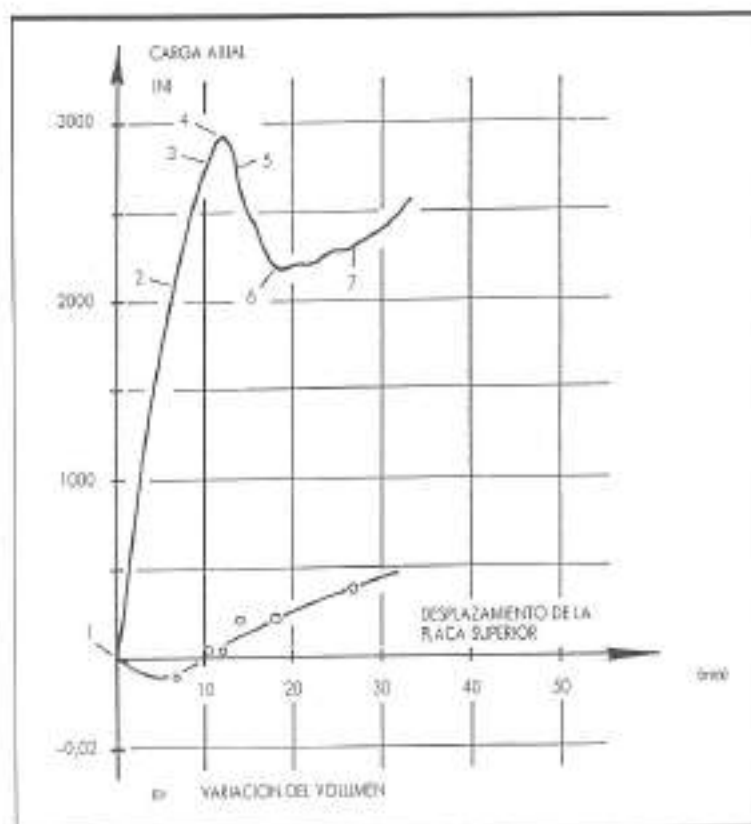


FIGURA 1a. Curva tensión-deformación obtenida en una arena de río en el ensayo biaxial (Desmes, 1987).

nal de longitud L , sometida en sus extremos a una fuerza de extensión F , que causa un desplazamiento U , y supóngase que se trata de un material elastoplástico cuya ley de tensión-deformación es

$$d\sigma = E d\epsilon \quad \epsilon < \frac{\sigma_0}{E} \quad (1)$$

$$d\sigma = \frac{EH}{E+H} d\epsilon \quad \epsilon > \frac{\sigma_0}{E}$$

donde H puede ser negativo para un material que reblandece, siendo σ_0 el límite elástico.

Si la rotura se produce no de forma homogénea en toda la barra, sino por aparición de una banda de cortante (en este caso un segmento de longitud b donde el material alcanza el límite plástico), la deformación global en la barra será la suma de las producidas en la banda y fuera de ella.

$$dU_b = b \cdot d\epsilon_b = b \cdot d\sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right) \quad (2)$$

$$dU_o = (L-b) d\epsilon_o = (L-b) \frac{d\sigma}{E}$$

donde se ha supuesto que el material que está fuera de la banda de cortante se comporta de manera elástica.

Esto es posible por lo siguiente: Cuando en la zona de la banda se alcanza el límite elástico σ_0 , todavía no

se ha llegado a él en los demás puntos. Si la carga se aplica directamente, el ensayo termina aquí porque aparecen unas deformaciones infinitas en la banda. Por el contrario, si se controla el desplazamiento de los extremos, la deformación plástica en la banda hará que la tensión en ella disminuya, y, por lo tanto, la fuerza total aplicada disminuirá también. En el resto del material, donde no se ha llegado al límite elástico, al disminuir la tensión, el material se descargará elásticamente.

El desplazamiento total viene dado por

$$dU = dU_b + dU_o = L \frac{d\sigma}{E} + b \frac{d\sigma}{H} \quad (3)$$

puediéndose definir una deformación media $d\bar{\epsilon}$ como

$$d\bar{\epsilon} = \frac{dU}{L} = \frac{d\sigma}{E} + \frac{b}{L} \frac{d\sigma}{H} \quad (5)$$

$$d\bar{\epsilon} = d\sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{b/L}{H} \right) = d\sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{\beta}{H} \right)$$

donde β es la anchura relativa de la banda, que variará cuando se cambie la longitud de la probeta ensayada ya que la anchura de banda es constante.

La relación «tensión-deformación» es

$$\frac{d\sigma}{d\bar{\epsilon}} = \frac{H}{\beta + H/E} \quad (6)$$

FIGURA 1 b. Campos de desplazamientos y deformación tangencial máxima (Destrua, 1987).

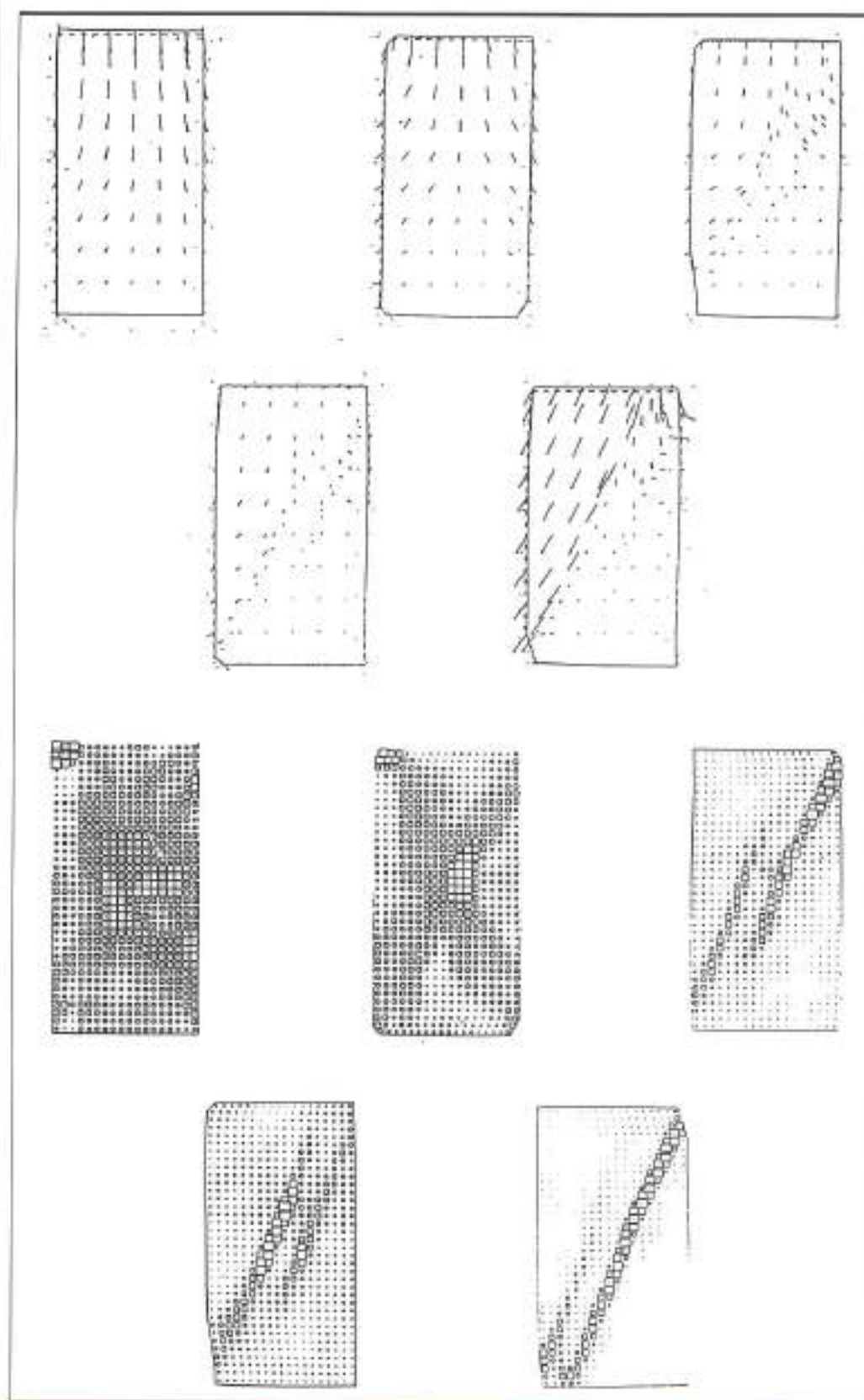
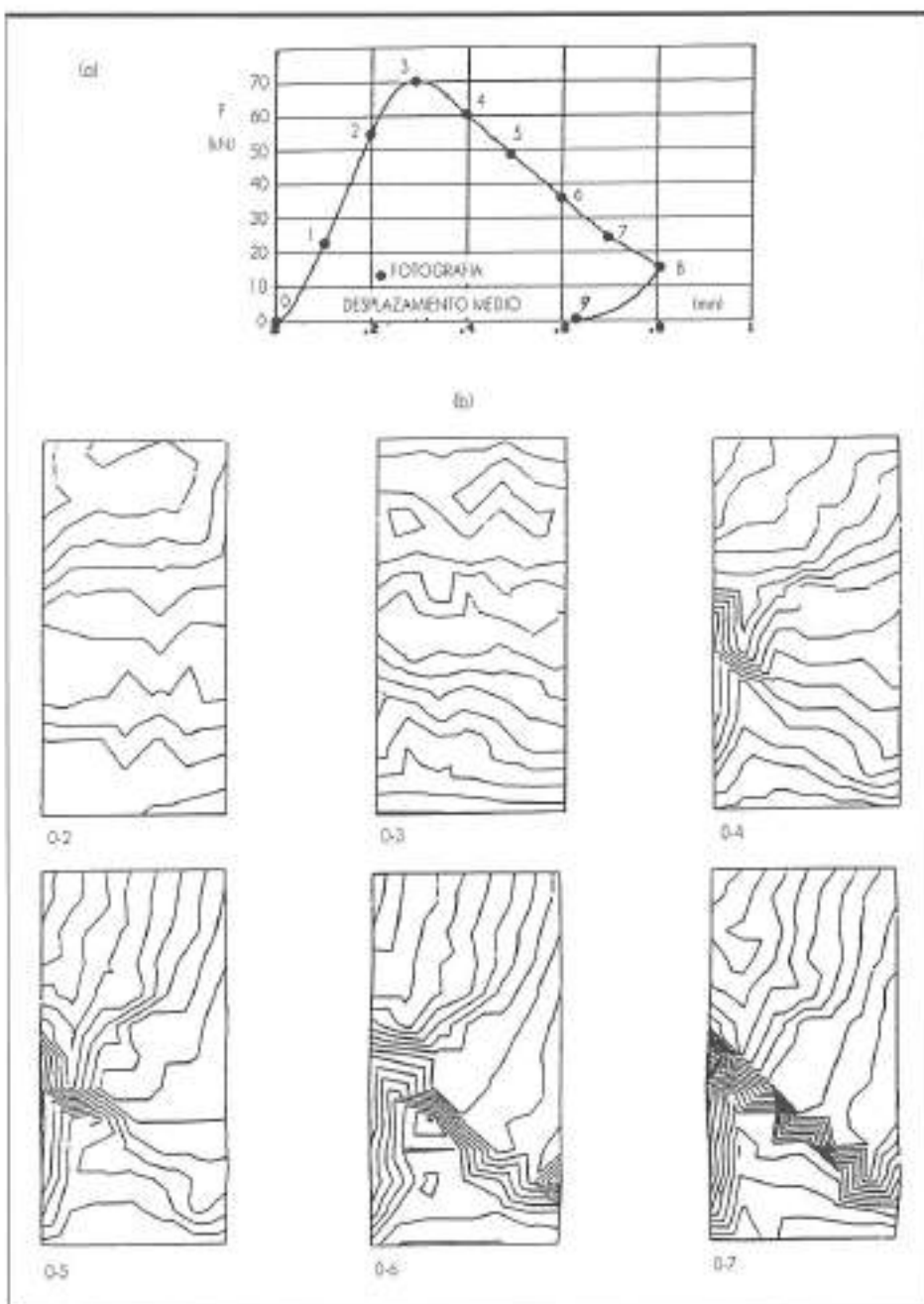


FIGURA 2. (a) Relación fuerza-desplazamiento en una probeta de hormigón, (b) Isolíneas del desplazamiento vertical obtenidas mediante estereofotogrametría (Torres et al., 1989).



donde se puede ver que dependerá de la relación anchura de banda/longitud de la probeta.

En el límite $\beta = 1$, el comportamiento global coincidirá con el teórico del material, cuando la longitud de la barra coincida con la anchura de la banda.

Si ahora se incrementa la longitud de la barra, su comportamiento global variará, haciéndose más frágil. En el caso $\beta = -H/E$, se producirá una caída vertical en la curva tensión-deformación media. Recordemos que esto puede ocurrir sólo si el material reblandece, porque

entonces H será negativo y β positivo. En el límite $\beta = 0$, se producirá una descarga elástica global.

Este ejemplo sencillo permite poner de manifiesto el papel fundamental de la relación entre el ancho de banda, relacionado con la microestructura del material, y una longitud característica del problema considerado, en el caso de materiales con reblandecimiento. Este efecto deberá tenerse en cuenta tanto en fórmulas adimensionales como en ensayos a escala.

A pesar de que a partir de la aparición de la banda

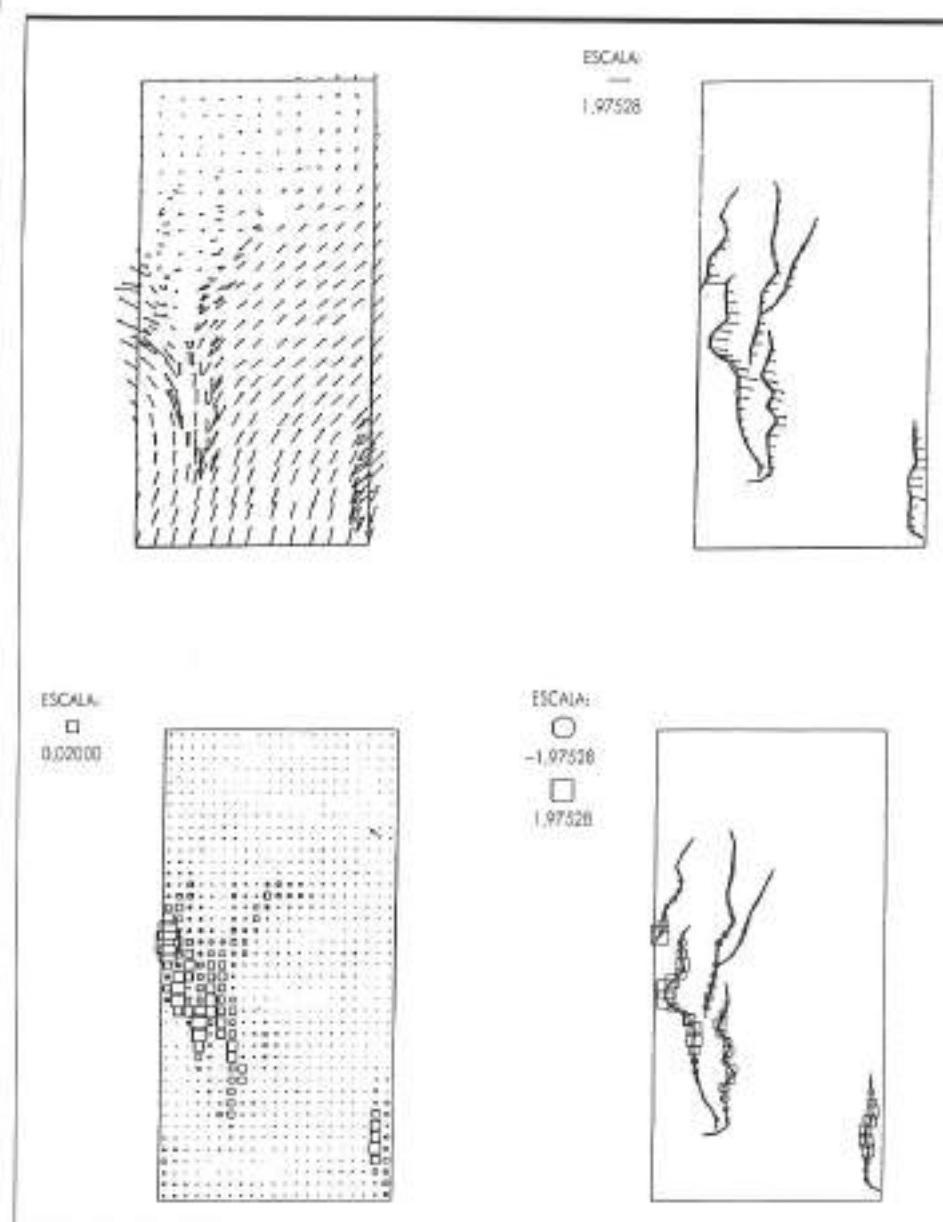


FIGURA 2. (a) Campo de desplazamientos, desplazamiento relativo en las fisuras, deformación tangencial máxima y componente normal del desplazamiento relativo en las fisuras.

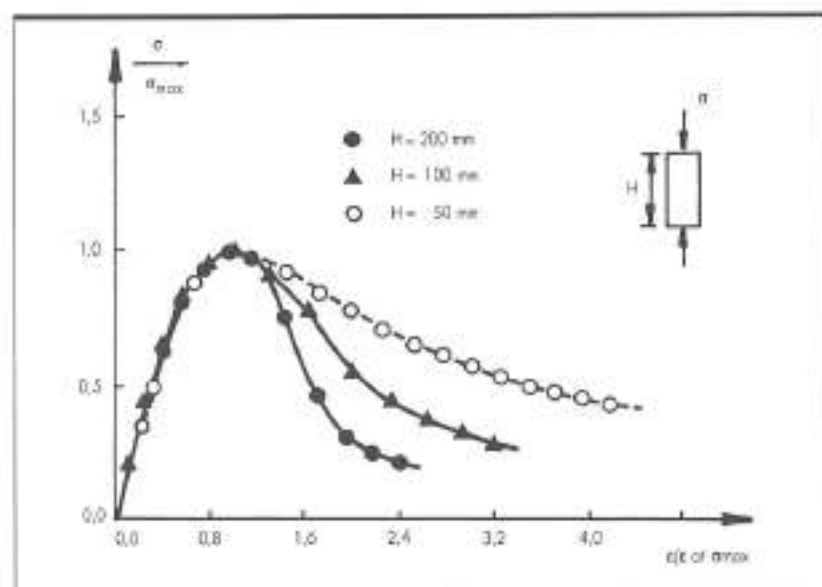
de cortante en un ensayo un poco antes del máximo de la tensión desviadora haya que descartar los resultados obtenidos, desde un punto de vista cualitativo puede afirmarse que existe reblandecimiento en el material. En el caso de los suelos granulares, tan sólo se había podido formular la existencia del estado crítico como una hipótesis debido a estos fenómenos. Sin embargo, experimentos realizados en la universidad de Grenoble [19] han confirmado al menos la existencia de una densidad crítica o índice de hueco crítico que se alcanza dentro de la banda en el régimen post-pico.

4. ORIGEN Y EVOLUCION DE LA BANDA

El nacimiento de la banda de cortante no se puede observar directamente en la probeta, ya que tiene lugar antes de que se manifieste la superficie de rotura de forma clara. En consecuencia, es necesario emplear las técnicas antes mencionadas.

En el caso de suelos granulares, la estereofotogrametría permite estudiar todo el proceso de evolución y, lo que es más importante, relacionarlo con la curva tensión-deformación obtenida en el ensayo. La figura 4

FIGURA 3. Influencia del tamaño de la probeta en su comportamiento mecánico (Van Mier, 1984).



muestra resultados típicos obtenidos por Desrués en el aparato biaxial en una probeta de arena densa. En la curva tensión-deformación se han marcado los puntos en los que se tomaron fotografías, a partir de las cuales, por comparación de pares sucesivos, se obtuvieron los campos de desplazamientos y deformaciones dados en la segunda parte de la figura, que corresponden, pues, a los incrementos 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 y 5-6.

Estudiando el campo de deformaciones tangenciales máximas, se puede observar que en la primera fase del ensayo aparecen concentraciones importantes en la esquina superior izquierda y en la zona central. En la segunda etapa, la deformación se ha concentrado en dos bandas conjugadas simétricas, de las cuales tan sólo evoluciona una de ellas, que es doble, hasta que aparece la superficie final de rotura.

Otro aspecto interesante es la evolución de la deformación volumétrica en la probeta a lo largo del ensayo, observándose que en las bandas de cortante existe una tendencia muy importante del material a dilatar, que decrece progresivamente a lo largo del ensayo, hasta ser prácticamente nula al final del mismo. Este hecho confirma que la rotura del material tiene lugar a volumen constante. Ensayos posteriores realizados por Desrués empleando técnicas de tomografía han permitido realizar medidas de la distribución de la densidad, probando por primera vez que existe una densidad crítica en rotura a la que se llega con independencia de las condiciones iniciales de densidad de la muestra [19].

En el hormigón, la rotura se produce como consecuencia de la propagación de las microfisuras iniciales, a partir de las cuales se forman macrofisuras. En el caso de que se realice un ensayo de compresión simple, el proceso es el esquematizado en la figura 4, tomada de Shah y Maji [17]. Esta figura fue obtenida por estos investigadores empleando técnicas de interferometría

láser, y se han representado en ella las fisuras activas únicamente.

En una primera fase del ensayo, que dura hasta que se alcanza un 30 % de la resistencia de pico, las microfisuras existentes en la interfase entre los granos de árido y el cemento son estables. La segunda fase del ensayo, entre el 30 y el 75 % de la resistencia, corresponde a una propagación estable de las fisuras, que se vuelve inestable para cargas superiores, alcanzándose el pico de resistencia tras el cual ésta decrece rápidamente. La concentración de fisuras hace que las propiedades mecánicas del material varíen, teniendo lugar una degradación de éste.

La figura 3 corresponde a los resultados obtenidos en la probeta de hormigón ensayada a compresión por Torrentí [11]. El objetivo del estudio fue relacionar los campos de fisuras con una posible concentración de la deformación en bandas de cortante. Para ello se emplearon técnicas estereofotométricas, pudiendo verse en la segunda y tercera parte de la figura los resultados obtenidos para los desplazamientos en los bordes de las figuras, así como las isolíneas de las deformaciones verticales. Aquí se observa una concentración importante de las isolíneas en la zona inferior, que corresponden a una banda de cortante.

Como resumen, se puede concluir que la rotura de los geomateriales (suelos, hormigones y rocas) observada en laboratorio se caracteriza por una pérdida de la homogeneidad en un determinado momento del ensayo. Esta pérdida de homogeneidad puede tener distintas formas dependiendo del tipo de material, así como de las condiciones del ensayo. La localización de la deformación en banda de cortante es un problema común encontrado en estos materiales, y presenta problemas importantes en la interpretación de los resultados obtenidos.

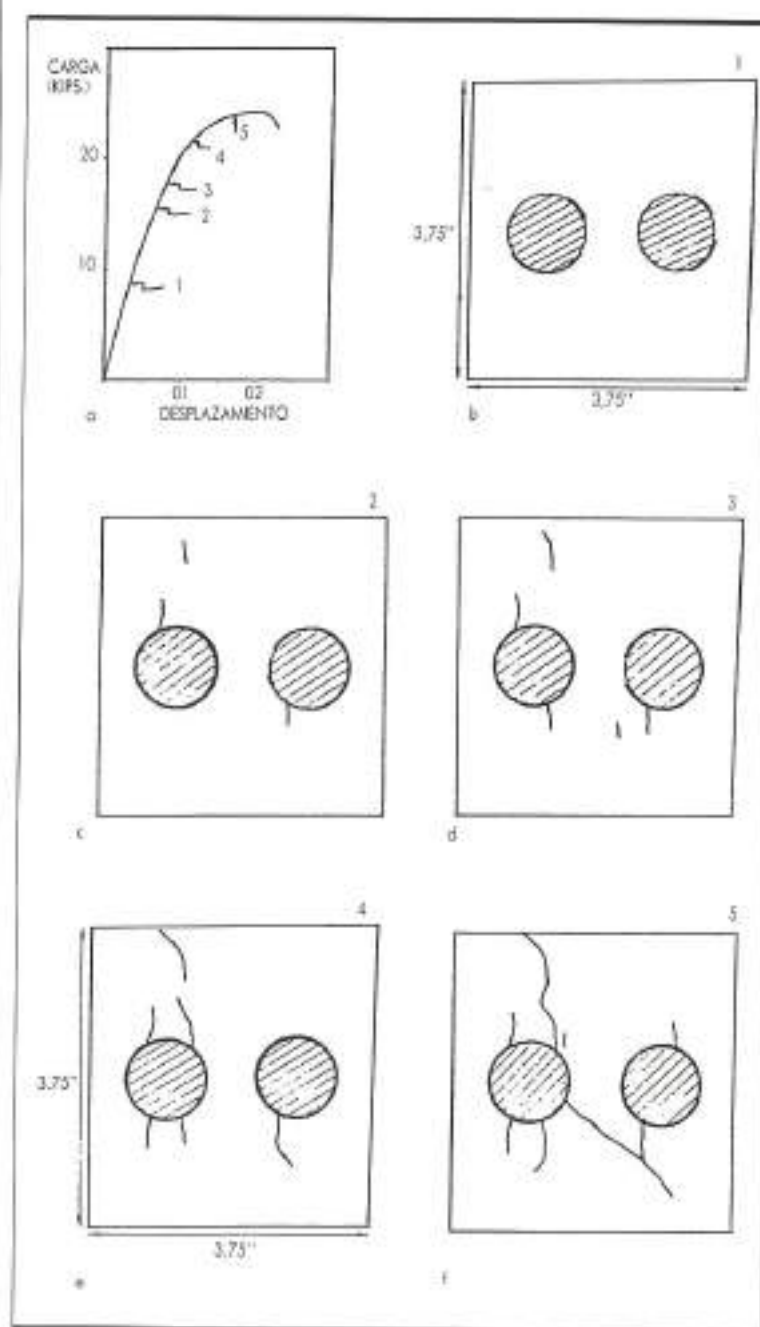


FIGURA 4. Evolución de las fisuras en una probeta de hormigón ensayada a compresión [Shah y Maj, 1989].

5. CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES

Las características más importantes de las bandas de cortante son su orientación y su espesor. Respecto de éste, hay que destacar que el comportamiento global observado tras el pico depende de la relación entre el espesor de la banda y una dimensión característica de la probeta, como antes se ilustró con un ejemplo unidimensional. En el caso de suelos granulares, el espesor de la banda ha sido investigado por Desrués [7, 8], Hamad [9], Vardoulakis [12, 13] y Tatsuoka [14].

En general, los espesores obtenidos corresponden a veinte o treinta diámetros medios, dependiendo de la presión de confinamiento de forma que un aumento de ésta causa una disminución del espesor.

Respecto de la orientación de las bandas, juega un papel fundamental ya que permite verificar la validez de los modelos constitutivos. Para ello, se emplea una condición de aparición de la banda consistente en la posibilidad de que existan discontinuidades en los campos gradiente del desplazamiento o de la deformación.

Existen teorías simplificadas que relacionan la dirección de la banda de cortante con la del plano de rotura en el caso de materiales friccionales, obteniéndose así una inclinación θ_c denominada de Coulomb, dada por:

$$\theta_c = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad (7)$$

En análisis límite, y a partir de consideraciones de tipo cinemático, el ángulo que se predice es el denominado de Rankine, dado por:

$$\theta_r = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \quad (8)$$

donde ψ es el ángulo de dilatación definido por:

$$\tan \psi = \frac{d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p}{d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p} \quad (9)$$

Las inclinaciones obtenidas en ensayos biaxiales por distintos autores no permiten llegar a un acuerdo definitivo respecto de un criterio u otro. Así, por ejemplo, Desrues [8] ha obtenido valores próximos a los del ángulo de Coulomb, mientras que los medidos por Vardoulakis [12] corresponden a un valor intermedio entre ambos.

Si se introduce una inclinación relativa $\bar{\theta}$ definida por:

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_c}{\theta_r - \theta_c} \quad (10)$$

se ha observado que ésta depende del tamaño de los granos, de la densidad relativa y de la presión de confinamiento [7, 9, 12]. De hecho, un aumento de la presión de confinamiento o una disminución de la densidad relativa hacen que la inclinación aumente. Respecto de la granulometría, Vermeer [15] ha encontrado inclinaciones en arenas finas menores que en arenas gruesas.

6. REFERENCIAS

- PASTOR, M., y PERAIRE, J. (1989). «Capturing shear bands via adaptive remeshing techniques». *Europeck Colloquium*, 248: *Non-linear soil-structure interaction*, Saint Hughes de Riviers, France.
- PASTOR, M.; PERAIRE, J., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1991). «Adaptive remeshing for shear band localization problems». *Archive of Applied Mechanics*, 61, 30-39.
- PASTOR, M.; PERAIRE, J.; VILOTTE, J. P.; ZIENKIEWICZ, O. C.; RUBIO, C., y MIRA, P. (1992). «Numerical analysis of localization». *Numerical models in geomechanics*. G. N. Pande y S. Pietruszczak (eds.), 339-348 Balkema.
- PASTOR, M.; PERAIRE, J.; VILOTTE, J. P.; ZIENKIEWICZ, O. C.; MIRA, P., y RUBIO, C. (1992). «Numerical modelling of localization problems in soil structures and foundations». *Geotechnique and Computers*. Presses de l'École des Ponts y Chaussées, Paris.
- PASTOR, M.; VILOTTE, J. P.; ZIENKIEWICZ, O. C.; PERAIRE, J., y DAUDRE, B. (1992). «Failure and localization in soils». *Computational Methods in Plasticity*. E. Oñate, D. R. Owen and E. Hinton (eds.), Pineridge Press.
- PERAIRE, J.; VAHDATI, M.; MORGAN, K., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1987). «Adaptive remeshing for compressible flow computations». *J. Comp. Phys.*, 72, pp. 449-466.
- DESRUES, J. (1984). *Localisations de la déformation dans les matériaux granulaires*. Tesis, USMG Grenoble.
- DESRUES, J. (1987). «Naissance des bandes de cisaillement dans les milieux granulaires: Expériences et théories». *Manuel de rhologie des géomatériaux*, F. Darve (ed.), Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
- HAMAD, W. (1982). *Modélisation non linéaire et étude expérimentale de la localisation dans les sables*. Tesis, UJF-INPG Grenoble.
- BUTTERFIELD, R.; HARKNESS, R. M., y ANDRAWES, K. Z. (1970). «A stereophotogrammetric method for measuring displacement fields». *Géotechnique*, 20, 308-314.
- TORRENTI, J. M.; DESRUES, J.; ACKER, P., y BOULAY, C. (1987). «Application of stereophotogrammetry to the strain localization in concrete compressions». *Cracking and Damage: strain localization and size effect*. J. Mazars y Z. P. Bazant (eds.), Elsevier.
- VARDOULAKIS, I. (1980). «Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests». *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 4, pp. 103-119.
- DRESHER, A., y VARDOULAKIS, I. (1982). «Geometric softening in triaxial tests on granular materials». *Géotechnique*, 32, 291-303.
- TATSUOKA, F.; SAKAMOTO, M.; KAWAMURA, T., y FUKUSHIMA, S. (1986). «Strength and deformation characteristics of sand in plane strain compression at extremely low pressures». *Soils and Foundations*, 26, 65-84.
- VERMEER, P. (1990). «The orientation of shear bands in biaxial tests». *Géotechnique*, 40, pp. 223-236.
- VAN MIER, J. G. M. (1984). «Complete stress-strain behaviour and damaging status of concrete under multiaxial conditions». *RILEM-CEB-CNRS Int. Conf. Concrete under multiaxial conditions*, 1, 75-85, Presses de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France.
- SHAH, S. P., y MAJI, A. (1987). «Experimental observations of cracking and damages». *Cracking and Damage: strain localization and size effect*. J. Mazars y Z. P. Bazant (eds.), Elsevier.
- PLANAS, J., y ELICES, M. (1987). «Size-effect in concrete structures: mathematical approximations and experimental validations». *Cracking and Damage: strain localization and size effect*. J. Mazars y Z. P. Bazant (eds.), Elsevier.
- DESRUES, J.; KOKNI, M., y MAZEROLLES, P. (1991). «L'état critique est-il atteint dans les bandes de cisaillement? Résultats nouveaux par tomographie». *Reunion GRECO-GEOMATERIAUX*, Aussois (France).