

Análisis de la influencia de los enlaces en la estabilidad de elementos de sección variable

MANUEL YAZQUEZ FERNANDEZ (*)

RESUMEN. Es frecuente la utilización de elementos estructurales solicitados a compresión que son de sección variable por razones de funcionalidad, estética o economía. Ello sucede en numerosas piezas de cualquier máquina y, más concretamente, en los soportes de gran longitud como los que se emplean habitualmente en las naves industriales. En este artículo se estudia la estabilidad de tales elementos unidos en sus extremos por cualquier tipo de enlaces y se representan y analizan las curvas que determinan sus cargas críticas.

ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF END-FIXITY CONDITIONS ON THE STABILITY OF ELEMENTS WITH NON-UNIFORM SECTIONS

ABSTRACT. Aesthetics, economics or functionality are reasons for structural elements in compression being frequently used with non-uniform sections. This is the case for many components of a machine and, more specifically, in the long columns which are often used in the construction of industrial buildings. This article studies the stability of those members with different end-fixity conditions, and the buckling curves are shown and analysed.

1. INTRODUCCION

A pesar de ser muy numerosa la bibliografía referente al pandeo de elementos de sección variable, ésta se reduce considerablemente cuando se consideran también las diferentes condiciones de sustentación y se trata de determinar la carga crítica del elemento y analizar su estabilidad.

En el artículo *Pandeo de soportes de sección variable con un extremo empotrado y el otro apoyado* el autor estudiaba estos problemas en un caso particular, que generaliza en el trabajo actual considerando otros tipos de enlaces y representando las curvas que determinan las cargas críticas correspondientes. Del análisis de estas curvas se deduce la existencia de zonas en las que se satura total o parcialmente la estabilidad del elemento. Esta saturación se manifiesta en que al incrementar la sección de uno de los tramos disminuye o se anula el incremento de carga crítica del elemento de sección variable, ya esté isostática o hiperestáticamente apoyado.

2. CARGAS CRITICAS

En la figura 1 se representan cuatro elementos de sección variable formados por dos tramos de momentos de inercia I_1 , I_2 y longitudes L_1 y L_2 . Estos elementos

están unidos en sus extremos por diferentes tipos de enlaces. A partir de las ecuaciones diferenciales de la elástica de cada tramo y teniendo en cuenta las condiciones de continuidad y de contorno, se hallan las cargas de pandeo de los diferentes elementos

$$P_{cr} = \frac{a^2 EI_1}{L^2} \quad [1]$$

donde los coeficientes a están definidos en función de $\mu = L_1/L_2$ y $\gamma = \sqrt{I_1/I_2}$ por las expresiones:

Elemento libre-empotrado (Fig. 1a)

$$\gamma \tan a\mu = \frac{1}{\tan a\gamma(1-\mu)} \quad [2a]$$

Elemento apoyado-apoyado (Fig. 1b)

$$\gamma \tan a\mu = -\tan a\gamma(1-\mu) \quad [2b]$$

Elemento apoyado-empotrado (Fig. 1c)

$$\gamma \tan a\mu = \frac{a\gamma - \tan a\gamma(1-\mu)}{1 + a\gamma \tan a\gamma(1-\mu)} \quad [2c]$$

Elemento empotrado-empotrado (Fig. 1d)

$$\gamma \tan a\mu = \frac{\frac{2}{a\gamma \cos a\mu \cos a\gamma(1-\mu)} - \frac{2}{a\gamma} - \tan a\gamma(1-\mu)}{\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1+\gamma^2}{a\gamma^3} \tan a\gamma(1-\mu)} \quad [2d]$$

(*) Doctor Ingeniero Aeronáutico, Colegiado de la EUIT de Obras Públicas de Madrid.

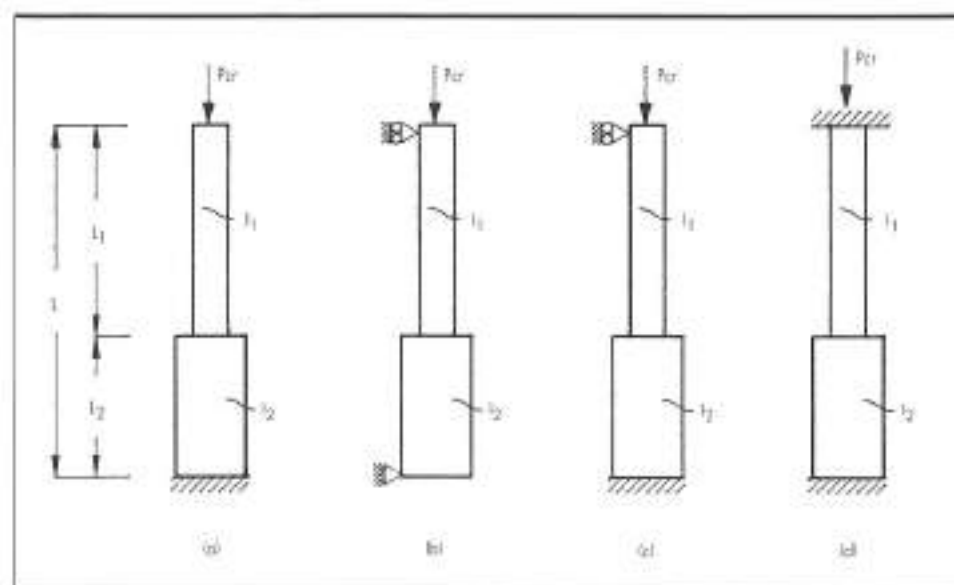


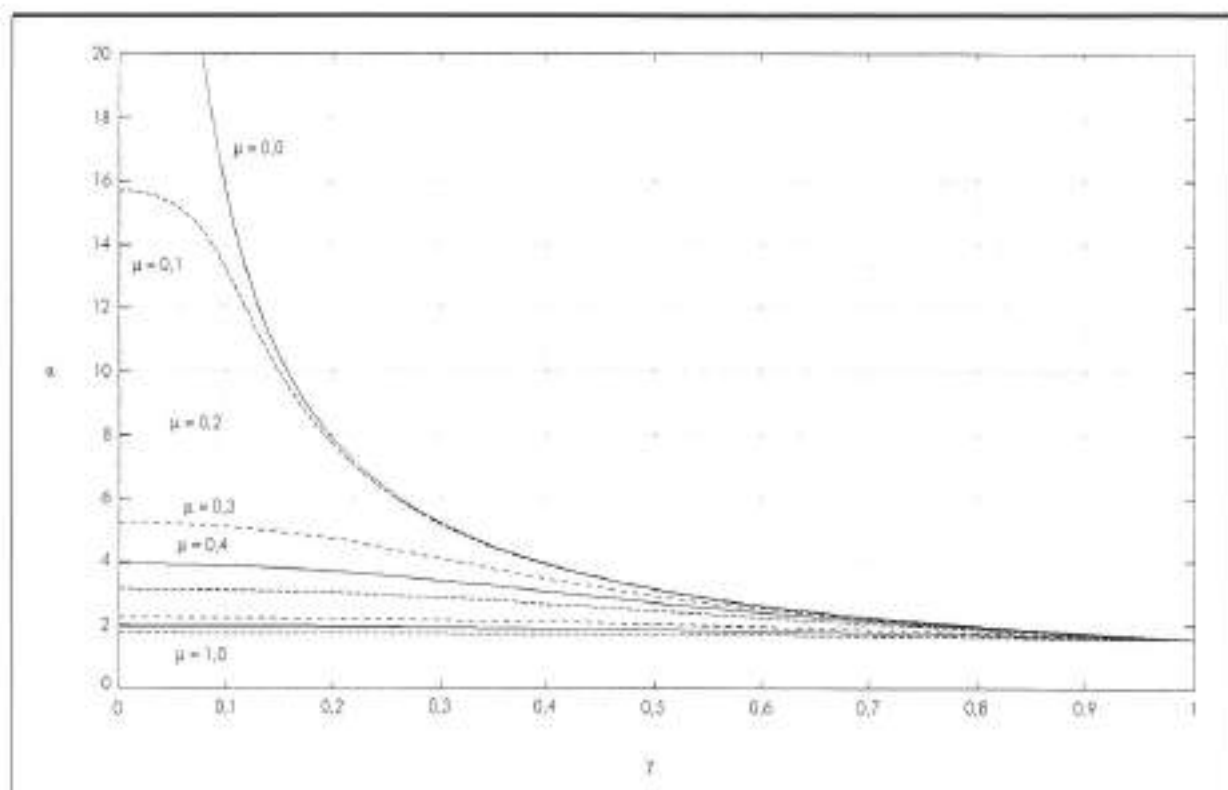
FIGURA 1.

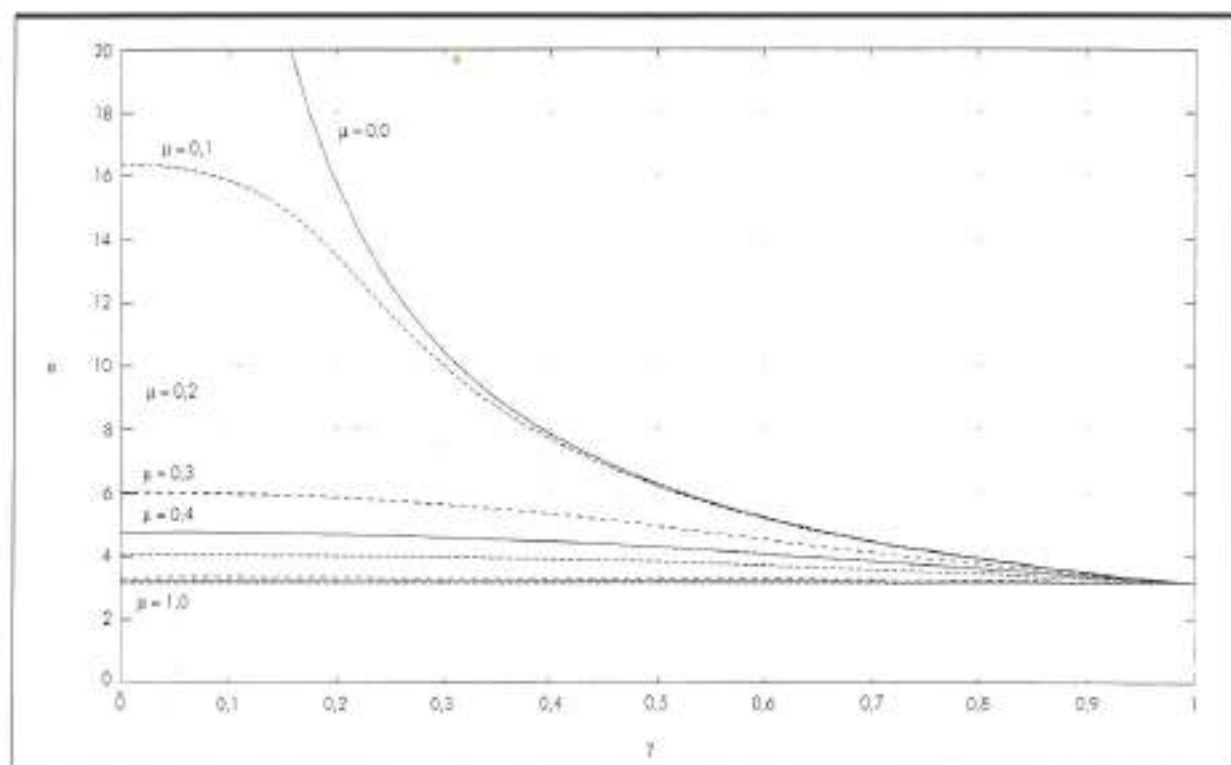
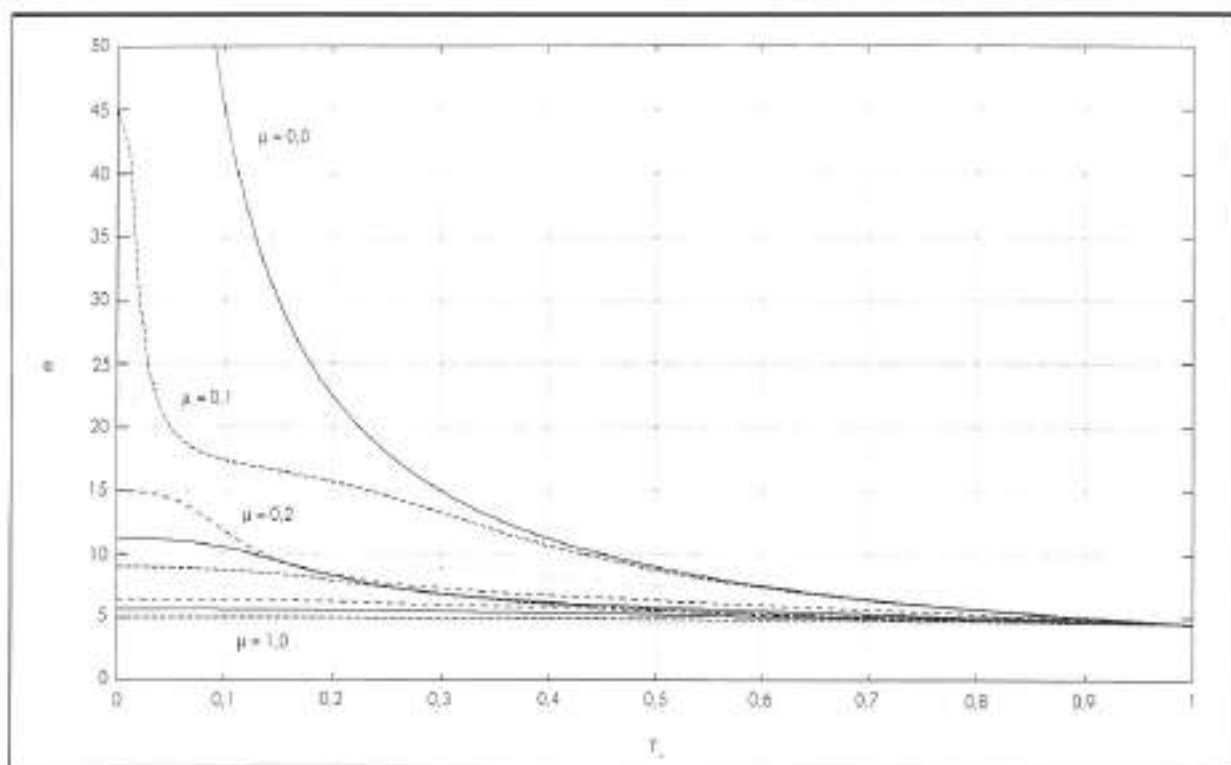
3. COEFICIENTES α

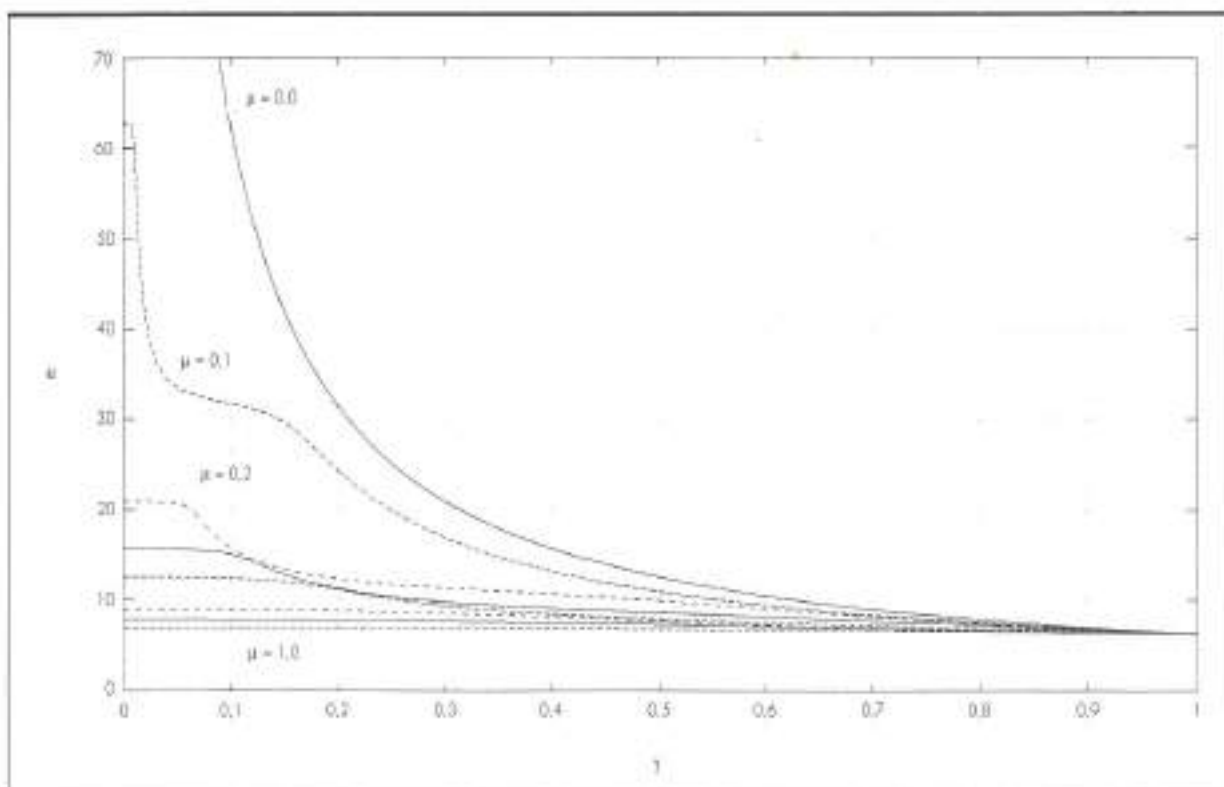
En la figura 2 se representan los coeficientes α expresados por las ecuaciones [2a], [2b], [2c] y [2d]. Estas curvas determinan en función de μ y γ los coeficientes α

y, por consiguiente, las cargas críticas de los elementos de sección variable cualesquiera que sean sus enlaces.

Al analizar estas curvas se observa la existencia de puntos de inflexión y de puntos de pendiente casi nula.

FIGURA 2a. Coeficientes α de un elemento libre-empotrado.

FIGURA 2b. Coeficientes α de un elemento apoyado-apoyado.FIGURA 2c. Coeficientes α de un elemento apoyado-empotrado.

FIGURA 2d. Coeficientes α de un elemento empotrado-empotrado.

Los puntos de inflexión definen las dimensiones de unos elementos que disminuyen su gradiente de estabilidad, lo que significa que el incremento de sección de uno de los tramos lleva consigo la disminución del incremento de la carga crítica. Estos puntos significan el comienzo de la *zona de saturación parcial*. Los puntos de pendiente casi nula indican que para determinadas dimensiones del elemento su carga crítica no se incrementa al incrementarse la sección de uno de los tramos. Estos puntos definen la *zona de saturación total*.

Los elementos apoyado-empotrado y empotrado-empotrado, es decir, los elementos hiperestáticos, tienen un comportamiento muy diferente de los elementos isostáticos, en cuanto a la saturación parcial que experimentan, únicamente para $\mu = 0,1$. Se observa que el gradiente de su estabilidad disminuye de forma importante al disminuir γ y que, a continuación, aumenta rápidamente, de tal modo que parece como si el elemento tratase de recuperar la pérdida de estabilidad.

Cuando los elementos de sección variable son soportes de gran longitud, normalmente los valores de γ son inferiores a 0,1. Atendiendo a la precisión en el cálculo de la carga crítica, interesa que en este caso los valores de α en función de μ y γ estén determinados y, por ello, figuran en las tablas 1.

4. CONCLUSIONES

1. Las curvas de la figura 2 determinan los coeficientes α y con ello las cargas críticas de elementos de sección variable con cualquier tipo de sustentación.
2. Al estudiar las curvas de coeficientes α se observa la existencia de zonas de estabilidad saturada, total o parcialmente. Estas zonas permiten determinar los valores μ y γ que definen los elementos de sección variable agotados y óptimos desde el punto de vista de su estabilidad.
3. En estas curvas $\alpha(\gamma, \mu)$ se observa también que el comportamiento de los elementos hiperestáticos es muy diferente del de los elementos isostáticos únicamente para $\mu = 0,1$, en que para determinados valores de γ disminuye de forma importante el gradiente de su estabilidad al disminuir γ para, a continuación, recuperarse rápidamente.
4. En las tablas 1 figuran los valores de α correspondientes a valores de μ comprendidos entre 0 y 1 y a valores de γ inferiores a 0,1. Este último requisito lo cumplen la mayoría de los soportes de gran longitud, por lo que las tablas 1 serán de gran utilidad para determinar su carga crítica.

μ/γ	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0	∞	157.080	78.540	52.360	39.270	31.416	26.180	22.440	19.635	17.453	15.708
0,1	15.708	15.694	15.650	15.574	15.459	15.297	15.074	14.771	14.370	13.858	13.246
0,2	7.854	7.851	7.841	7.825	7.803	7.774	7.737	7.693	7.641	7.581	7.512
0,3	5.236	5.235	5.231	5.225	5.216	5.205	5.192	5.176	5.157	5.135	5.111
0,4	3.927	3.926	3.925	3.922	3.918	3.912	3.906	3.898	3.889	3.879	3.868
0,5	3.142	3.141	3.140	3.139	3.137	3.134	3.130	3.126	3.122	3.116	3.110
0,6	2.618	2.618	2.617	2.616	2.615	2.614	2.612	2.609	2.607	2.604	2.601
0,7	2.244	2.244	2.244	2.243	2.242	2.242	2.241	2.239	2.238	2.236	2.234
0,8	1.963	1.963	1.963	1.963	1.963	1.962	1.962	1.961	1.960	1.960	1.959
0,9	1.745	1.745	1.745	1.745	1.745	1.745	1.745	1.744	1.744	1.744	1.743
1,0	1.571	1.571	1.571	1.571	1.571	1.571	1.571	1.571	1.571	1.571	1.571

TABLA 1a. Coeficientes α de un elemento libre-empotrado.

μ/γ	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0	∞	314.159	157.080	104.720	78.540	62.832	52.360	44.880	39.270	34.907	31.416
0,1	16.385	16.380	16.366	16.342	16.308	16.264	16.208	16.141	16.060	15.964	15.853
0,2	8.578	8.577	8.573	8.568	8.561	8.552	8.540	8.526	8.510	8.492	8.472
0,3	6.013	6.013	6.012	6.010	6.007	6.004	5.999	5.994	5.988	5.981	5.974
0,4	4.768	4.768	4.767	4.766	4.765	4.763	4.761	4.759	4.756	4.753	4.749
0,5	4.058	4.057	4.057	4.057	4.056	4.055	4.054	4.053	4.052	4.050	4.048
0,6	3.624	3.624	3.624	3.624	3.624	3.623	3.623	3.622	3.621	3.621	3.620
0,7	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.359	3.359	3.359	3.358
0,8	3.213	3.213	3.213	3.213	3.213	3.213	3.213	3.213	3.213	3.213	3.212
0,9	3.151	3.151	3.151	3.151	3.151	3.151	3.151	3.151	3.151	3.151	3.151
1,0	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142

TABLA 1b. Coeficientes α de un elemento apoyado-apoyado.

μ/γ	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0	∞	449.341	224.670	149.780	112.335	89.868	74.890	64.192	56.168	49.927	44.934
0,1	44.934	42.373	30.606	24.275	21.400	19.882	18.983	18.399	17.990	17.683	17.439
0,2	22.467	22.370	22.016	21.169	19.524	17.504	15.772	14.447	13.449	12.689	12.099
0,3	14.978	14.960	14.903	14.801	14.639	14.398	14.053	13.588	13.021	12.404	11.795
0,4	11.234	11.228	11.211	11.183	11.142	11.086	11.015	10.925	10.815	10.681	10.522
0,5	8.987	8.985	8.978	8.968	8.953	8.933	8.909	8.880	8.845	8.805	8.759
0,6	7.489	7.488	7.483	7.481	7.474	7.466	7.456	7.444	7.430	7.414	7.396
0,7	6.419	6.419	6.418	6.415	6.413	6.409	6.404	6.399	6.393	6.386	6.378
0,8	5.617	5.617	5.616	5.615	5.614	5.612	5.610	5.608	5.605	5.602	5.599
0,9	4.993	4.993	4.992	4.992	4.992	4.991	4.990	4.990	4.989	4.988	4.987
1,0	4.493	4.493	4.493	4.493	4.493	4.493	4.493	4.493	4.493	4.493	4.493

TABLA 1c. Coeficientes α de un elemento apoyado-empotrado.

μ/γ	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
0	∞	628.319	314.159	209.440	157.080	125.664	104.720	89.760	78.540	69.813	62.832
0,1	62.832	60.725	41.626	36.535	34.529	33.527	32.935	32.534	32.226	31.963	31.711
0,2	31.416	31.402	31.336	30.531	28.176	23.217	21.360	20.131	19.278	18.660	18.195
0,3	20.944	20.939	20.923	20.890	20.826	20.679	20.205	19.027	17.730	16.654	15.794
0,4	15.708	15.706	15.698	15.686	15.666	15.638	15.598	15.539	15.451	15.309	15.076
0,5	12.566	12.565	12.561	12.555	12.546	12.533	12.517	12.497	12.473	12.442	12.405
0,6	10.472	10.471	10.469	10.466	10.461	10.454	10.446	10.436	10.425	10.411	10.396
0,7	8.976	8.976	8.974	8.973	8.970	8.966	8.962	8.957	8.951	8.944	8.936
0,8	7.854	7.854	7.853	7.852	7.851	7.849	7.847	7.844	7.841	7.838	7.834
0,9	6.981	6.981	6.981	6.981	6.980	6.979	6.979	6.978	6.976	6.975	6.974
1,0	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283

TABLA 1d. Coeficientes α de un elemento empotrado-empotrado.

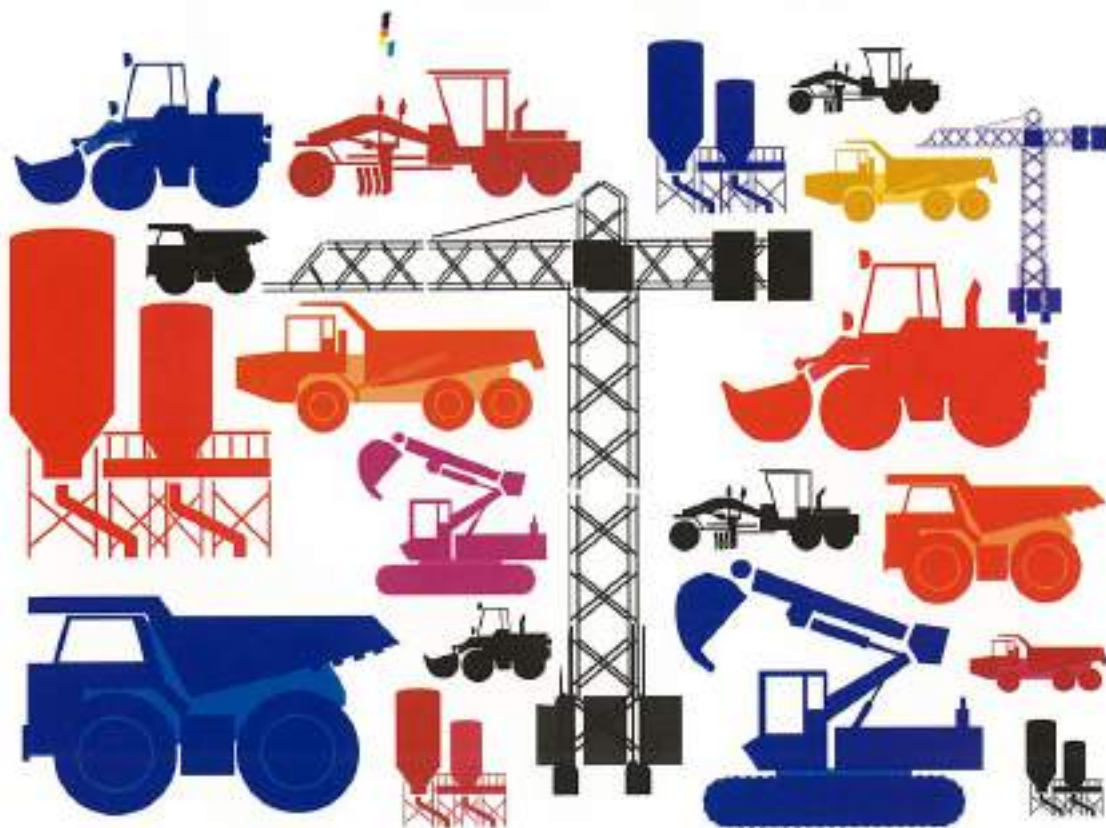
5. BIBLIOGRAFIA

1. ARGÜELLES ALVAREZ, R. (1987). «Cálculo de estructuras». ETSIM.
2. DOMÍNGUEZ ABASCAL, J. (1990). «Elementos para el cálculo de estructuras metálicas». ETSIIS.
3. EUROCODIGO 3 (Jornadas) (1990). «Proyecto de estructuras de acero».
4. GHALL, A., y NEVILLE, A. (1983). «Análisis estructural». Editorial Diana, México.

5. HARRISON (1977). «Large deformation analysis of elastic columns and frames». Asce, NY.
6. LAROZE, S. (1988). «Mécanique des structures». Editorial Eyrolles, Francia.
7. VAZQUEZ FERNANDEZ, M. (1982). «Pandeo de soportes de sección variable con un extremo empotrado y el otro apoyado». *Rev. Ingeniería Aeroespacial y Astronáutica*.

SMOPYC '94

Una exposición para grandes obras



Del 18 al 22 de Febrero descubra, en Zaragoza, el único Salón Internacional en España para la Maquinaria de Obras Públicas.

La gran exposición de técnicas y tendencias con los más avanzados equipos y novedades, a nivel mundial, para los profesionales de la Obra Civil y Minería. Las soluciones más sofisticadas y modernas para aumentar la calidad en el trabajo y el rendimiento de las empresas.

SMOPYC '94: Descubra una gran exposición de obras.



ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE
FABRICANTES EXPORTADORES
DE MAQUINARIA PARA OBRAS
PÚBLICAS Y CONSTRUCCIÓN



COMITÉ EUROPEO
DE MAQUINARIA
DE CONSTRUCCIÓN
Y OBRAS PÚBLICAS



IBERIA
LÍNEAS AÉREAS DE ESPAÑA
AIRLINES OF SPAIN



INSTITUTO ESPAÑOL
DE COMERCIO EXTERIOR



FERIA DE ZARAGOZA
Carretera N-II, Km. 511
E 50012 ZARAGOZA
Tel.: (976) 63 44 20
Telex: 58185 FEMU E
Fax: (976) 33 06 49
Apdo. de Correos 106 E
ZARAGOZA (España)