

Rotura por localización en geomateriales. II. Aspectos matemáticos

M. PASTOR (*)

RESUMEN. En el proyecto de una determinada estructura o cimentación tiene importancia la predicción de las condiciones en que tendrá lugar la rotura, de forma que sea posible conocer su seguridad. En muchas ocasiones aparecen superficies o líneas de rotura claramente definidas donde se concentra el daño. Este tipo de rotura se denomina rotura por localización, y se puede observar tanto en estructuras reales como en probetas ensayadas en laboratorio. Para simular estos fenómenos se emplean programas de cálculo y modelos constitutivos que se calibran con datos experimentales. El propósito de este artículo es describir los aspectos matemáticos básicos del problema.

LOCALIZATION FAILURE IN GEOMATERIALS. II. MATHEMATICAL ASPECTS

ABSTRACT. Prediction of conditions under which failure of engineering structures will take place is of paramount importance to evaluate their factor of safety. Failure mechanism often consists on clearly defined surfaces or lines of failure where the damage is concentrated. This type of failure, referred to as failure by localization of shear strain, can be observed both in structures and in laboratory specimens. Numerical models and constitutive equations calibrated with experimental models are used to simulate these phenomena. This paper, the second of a series dealing with the problem of localized failure in geomaterials, aims to describe the basic mathematical aspects of the problem.

1. INTRODUCCION

Desde un punto de vista matemático, las bandas de cortante son zonas donde las derivadas temporales de la deformación y del gradiente del campo de desplazamientos presentan una discontinuidad. Se trata, pues, de la existencia de un «modo localizado» que puede aparecer en un momento dado y superponerse a la solución «homogénea» del problema que se analiza.

En el caso de que el comportamiento del material esté descrito mediante una ley de tipo elastoplástico, y como consecuencia de la aparición de la banda de cortante, la naturaleza matemática del conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que describen el problema cambia, pasando en el caso cuasi-estático de elíptica a hiperbólica y en el caso dinámico de hiperbólica a elíptica. El problema deja entonces de estar bien planteado localmente, y esto se traduce en la existencia de un número infinito de soluciones, que conlleva una dependencia del tamaño de la malla de la solución obtenida mediante elementos finitos.

El análisis clásico de las condiciones que hacen posible la existencia de un modo localizado en banda de

cortante se ha realizado mediante dos enfoques, estático y dinámico, que llevan a una misma condición para la aparición de la banda. Los primeros trabajos publicados en la aproximación dinámica han sido los de Hadamard [1], Thomas [2], Hill [3] y Mandel [4]. Respecto de la aproximación estática, los primeros investigadores en abordar el problema fueron Rice y Rudnicki [5-7] y Hill [8]. Hay que mencionar asimismo los trabajos de Serrano [9] quien estudió el problema de la localización dinámica en suelos.

El objetivo de este artículo es el de presentar, dentro del marco de las teorías de bifurcación clásicas, las condiciones necesarias para la aparición de una banda de cortante, mostrando cómo el problema cambia de naturaleza, y describiendo las técnicas que permiten evitar los problemas que aparecen como consecuencia de aquél.

2. ANALISIS CLASICO DE BIFURCACION: APROXIMACION ESTATICA

El análisis que se describe en este apartado corresponde a las condiciones de formación de un modo localizado en banda de cortante, no considerándose modos de tipo difuso como el simétrico en barril o el antisimétrico en «S». Por otra parte, se trata de un análisis de tipo local en el cual se considera tan solo un elemento diferencial

(*) Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, Centro de Estudios de Técnicas Aplicadas (IMOPT).

de sólido, o bien un sólido de dimensiones infinitas bajo condiciones homogéneas de tensión, sin considerar, por tanto, condiciones de contorno de ningún tipo.

Sin embargo, el análisis clásico de bifurcación permite predecir, para ensayos homogéneos, y una determinada ecuación constitutiva, el momento en el que se formará la banda, así como su inclinación. Comparando estos valores con los observados en el laboratorio, se podrá verificar la bondad y el grado de ajuste a la realidad de la ley constitutiva empleada.

En la figura 1 se da un esquema de los sistemas de coordenadas locales y globales que se emplearán en este estudio. Hay que destacar en primer lugar que las magnitudes que se empleen para caracterizar el material dentro de la banda no deben variar según los ejes locales X_2^* y X_3^* debido a que las dimensiones correspondientes son infinitamente grandes.

Por ello, la derivada temporal del tensor gradiente de desplazamiento se expresará como:

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial x_j} \quad [1]$$

ya que las derivadas respecto de x_1^* y x_3^* son nulas por la hipótesis hecha.

En la expresión anterior el tensor gradiente de la velocidad puede expresarse como producto tensorial de los vectores de polarización g y normal a la banda n :

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = g_i \cdot n_j \quad [2]$$

siendo:

$$g_i = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_2^*} \quad [3]$$

$$n_j = \frac{\partial x_2^*}{\partial x_j}$$

La deformación del sólido antes de producirse la banda estará caracterizada por un campo homogéneo del gradiente de las velocidades. Un instante después de formarse la banda, la solución consistirá en la superposición del campo global homogéneo y del campo localizado en la banda, de forma que si se introduce el superíndice h para el primero, se tendrá:

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right)^h \quad (\text{exterior})$$

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right)^h + g_i n_j \quad (\text{interior}) \quad [4]$$

El campo de tensiones en la interfase entre la banda y el exterior deberá ser tal que el vector tensión en aquella sea continuo, de forma que exista equilibrio:

$$\sigma_{ij}^{(b)} \cdot n_j = \sigma_{ij}^{(h)} \cdot n_j \quad [5]$$

donde se ha introducido el superíndice b para la banda. Se admite, por tanto, que el campo de tensiones es discontinuo. Si ahora se sustituye en la expresión anterior el valor de la velocidad de variación del tensor de tensiones, se tendrá:

$$n_j \cdot D_{ijkl}^{(b)} \cdot \dot{\epsilon}_{kl}^{(b)} = n_j \cdot D_{ijkl}^{(h)} \cdot \dot{\epsilon}_{kl}^{(h)} \quad [6]$$

La velocidad de deformación en la banda y el exterior pueden relacionarse fácilmente entre sí empleando [4]

$$\dot{\epsilon}_{kl}^{(b)} = \dot{\epsilon}_{kl}^{(h)} + \frac{1}{2} (g_k n_l + g_l n_k) \quad [7]$$

Si ahora se sustituye esta expresión en [6], resulta:

$$n_j \cdot D_{ijkl}^{(b)} \cdot \dot{\epsilon}_{kl}^{(h)} = n_j \cdot D_{ijkl}^{(h)} \cdot \left\{ \dot{\epsilon}_{kl}^{(h)} + \frac{1}{2} (g_k n_l + g_l n_k) \right\} \quad [8]$$

de donde:

$$n_j \cdot \left(D_{ijkl}^{(b)} - D_{ijkl}^{(h)} \right) \cdot \dot{\epsilon}_{kl}^{(h)} = n_j \cdot D_{ijkl}^{(b)} \cdot n_k g_l \quad [9]$$

que es la condición más general que debe cumplirse para que se produzca la banda de cortante. Un caso particular de esta condición es la denominada por Rice [2] «bifurcación continua», en la que se supone que el comportamiento del material dentro y fuera de la banda está descrito por el mismo tensor constitutivo, resultando:

$$n_j \cdot D_{ijkl} \cdot n_k g_l = 0 \quad [10]$$

Esta condición de localización puede escribirse en función del denominado tensor acústico A :

$$A_{ij} = n_j \cdot D_{ijkl} \cdot n_k \quad [11]$$

como

$$A_{ij} \cdot g_i = 0 \quad [12]$$

Además de la solución correspondiente a $g = 0$, que corresponde a deformación homogénea, el sistema anterior tiene solución siempre que se cumpla la condición de que el determinante del tensor acústico se anule.

$$\det (n_j \cdot D_{ijkl} \cdot n_k) = 0 \quad [13]$$

En consecuencia, la condición anterior permite predecir el momento en el que aparecerá una o varias bandas de cortante, así como sus orientaciones, para una ley constitutiva determinada. Más adelante se describirán las orientaciones y condiciones para modelos constitutivos sencillos, como por ejemplo, los de Von Mises o Mohr-Coulomb.

Es interesante analizar el salto de deformación producido en la banda por diferentes vectores de polarización g . En el caso de que éste tenga la misma dirección que la normal, se tendrá, para el sistema local de coordenadas definido en la figura 1:

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} = K \cdot n_i n_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [14]$$

donde se puede ver que tan sólo la deformación según la normal a la banda es diferente de cero. Se trata, pues, del caso de apertura de una fisura en el material.

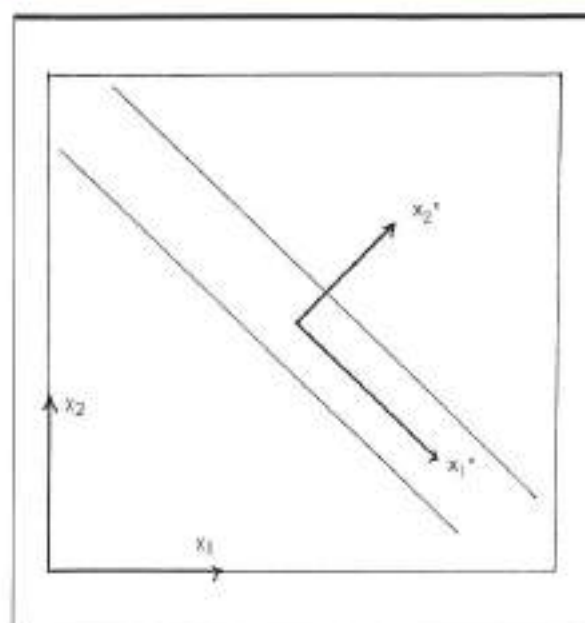


FIGURA 1. Banda de cortante: sistemas de coordenadas local y global.

Si el vector de polarización es ortogonal a la normal $\mathbf{n}$, se tendrá:

$$\Delta \hat{\epsilon}_{ij} = K \cdot \frac{1}{2} \left(n_i n_j + n_j n_i \right) = \frac{1}{2} K \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [15]$$

que corresponde a un estado de deformación cortante pura.

3. ANALISIS CLASICO DE BIFURCACION: APROXIMACION DINAMICA

Se presentará aquí el enfoque dinámico, en el que se verá cómo un problema que admite como soluciones elementales ondas que se propagan, y que, por tanto, es hiperbólico, se transforma en un problema elíptico caracterizado por la existencia de velocidades imaginarias de propagación.

En el caso de un material de tipo elastoplástico, la ecuación de propagación de ondas de cortante puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -E_T \\ -1/\rho & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [16]$$

donde v es la velocidad de las partículas, ρ la densidad del material y E_T el módulo tangente de deformación, coincidente con la pendiente de la curva tensión-deformación del material.

Las velocidades de propagación corresponden a los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema [16], que valen

$$C = \pm \sqrt{E_T/\rho} \quad [17]$$

y que corresponden —siempre que E_T sea positivo— a dos ondas que se propagan en sentidos opuestos.

En el caso de que el material esté descrito por una ley de tipo elastoplástico con reblandecimiento, para el cual E_T es negativo, las velocidades de propagación son imaginarias, correspondiendo a un problema localmente elíptico y por tanto mal planteado desde el punto de vista matemático, ya que las condiciones de contorno impuestas corresponden a un problema hiperbólico.

En el caso tridimensional, las ecuaciones de balance de momento y constitutiva son:

$$\dot{\sigma}_{ij} - \rho \dot{U}_{i,j} = 0 \quad [18]$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

donde las velocidades de variación del tensor de tensiones se obtendrán de forma objetiva, empleando, por ejemplo, las fórmulas de Jaumann. En el caso de pequeñas deformaciones esta corrección puede despreciarse.

Si se intentan buscar soluciones de tipo onda plana al problema descrito en [18],

$$\dot{U}(\mathbf{r}, t) = C_1 \mathbf{l} f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad [19]$$

donde $\mathbf{l}$ es un vector unitario de polarización que da la dirección de la oscilación de las partículas materiales, $\mathbf{n}$ la normal al frente de onda y v la velocidad de propagación, se obtiene, tras sustituir en [18]:

$$\dot{\sigma}_{ij} - \rho \dot{U}_{i,j} = \dot{\sigma}_{ij} - \rho C_1 l_i v^2 f'' \quad [20]$$

Por otra parte,

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = D_{ijkl} \dot{U}_{k,l} \quad [21]$$

y

$$\dot{\sigma}_{ij,l} = D_{ijkl} \dot{U}_{k,lj} \quad [22]$$

donde, una vez sustituido el valor de $\dot{U}_{k,lj}$ empleando [19], resulta

$$\dot{\sigma}_{ij,l} = D_{ijkl} C_1 l_k n_j f'' \quad [23]$$

Finalmente, de [20] y [23] resulta

$$D_{ijkl} C_1 l_k n_j f'' - \rho C_1 l_i v^2 f'' = 0 \quad [24]$$

y de aquí

$$n_j D_{ijkl} n_k l_i - \rho v^2 l_j = 0 \quad [25]$$

que se puede escribir, de una forma más compacta,

$$[A_{ij} - \rho v^2 \delta_{ij}] l_j = 0 \quad [26]$$

donde Q_{ij} son las componentes del tensor acústico obtenido en el apartado anterior.

$$A_{ij} = n_j D_{ijkl} n_k \quad [27]$$

Aparecen velocidades de propagación nulas en el caso en que se cumpla la condición

$$\det |A| = 0 \quad [28]$$

que es la condición clásica de aparición de discontinuidades en el sólido analizado obtenida en el caso estático.

Respecto del modo de deformación correspondiente a las condiciones de aparición de la discontinuidad o banda de cortante, es interesante hacer notar que la segunda derivada de la disipación de energía mecánica es nula, ya que

$$\delta^2 W = \dot{\sigma} : \dot{\epsilon} \, dt^2 = 0 \quad [29]$$

Esta condición corresponde a una pérdida local de estabilidad de las ecuaciones que gobiernan el problema, y que está relacionada con la pérdida de unidad del problema global.

4. ORIENTACION DE LA BANDA

Una vez obtenida la condición de nacimiento de una banda de cortante, se estudiará cuál es su orientación en el caso de materiales que se puedan describir mediante una ley constitutiva de tipo elastoplástico con un único potencial. El análisis se realizará en el marco de la teoría de pequeñas deformaciones, suponiendo que las tensiones son pequeñas en comparación con el módulo de elasticidad. Esta hipótesis simplifica notablemente los cálculos, ya que se puede suponer despreciable la influencia de los términos rotacionales en la velocidad de variación del tensor de tensiones. El esquema seguido es análogo al descrito por Rice [6] para grandes deformaciones.

La expresión de la ley constitutiva es:

$$\dot{\sigma} = \left(E - \frac{1}{h + Q : E : P} (E : P) (Q : E) \right) : \dot{\epsilon} \quad [30]$$

siendo, por tanto, el tensor constitutivo:

$$D = E - \frac{1}{h + Q : E : P} (E : P) (Q : E) \quad [31]$$

En las expresiones anteriores se han introducido la notación siguiente:

- E Tensor constitutivo elástico.
- P Dirección de flujo plástico normalizada.
- Q Gradiente a la superficie de fluencia normalizado.
- h Módulo plástico.
- $A : B$ Producto doblemente contraído.

La condición de localización [12] resulta así:

$$\left(n \cdot E \cdot n - \frac{(n \cdot E : P) (Q : E \cdot n)}{h + Q : E : P} \right) \cdot g = 0 \quad [32]$$

De la expresión anterior, y teniendo en cuenta que la matriz del tensor acústico de un material elástico no es singular, se puede obtener g como:

$$g = \left(n \cdot E \cdot n \right)^{-1} \cdot \frac{(n \cdot E : P) (Q : E \cdot n)}{h + Q : E : P} \cdot g \quad [33]$$

Si el material que se considera es isotrópico, el tensor acústico correspondiente al comportamiento elástico es:

$$Q^{(e)} = n \cdot E \cdot n = (\lambda + G) n \otimes n + G I \quad [34]$$

donde λ y G son las constantes elásticas de Lamé, viniendo dada su inversa por:

$$\left(n \cdot E \cdot n \right)^{-1} = - \frac{\lambda + G}{G (\lambda + 2G)} n \otimes n + \frac{1}{G} I \quad [35]$$

que se obtiene como una combinación lineal de $n \otimes n$ con el tensor identidad.

La expresión obtenida para g es de la forma:

$$g = \frac{1}{C} a (b \cdot g) \quad [36]$$

siendo:

$$\begin{aligned} C &= h + Q : E : P \\ a &= (n \cdot E \cdot n)^{-1} \cdot (n \cdot E : P) \\ b &= (Q : E \cdot n) \end{aligned} \quad [37]$$

Por inspección, se obtiene como solución trivial:

$$h = - Q : E : P + (Q : E \cdot n) (n \cdot E \cdot n)^{-1} (n \cdot E : P) \quad [38]$$

El valor del módulo plástico h para el cual puede aparecer una banda de cortante dependerá de la dirección de ésta. Si se supone que en un proceso de carga el módulo plástico decrece continuamente, el caso crítico corresponderá a un valor de n para el cual el módulo plástico h es máximo.

En el caso de que el material sea isotrópico, las expresiones anteriores, tras desarrollarlas, resultan:

$$\begin{aligned} \frac{h}{G} &= 4 n \cdot P \cdot Q \cdot n - 2 (n \cdot P \cdot n) (n \cdot Q \cdot n) - 2 P : Q - \\ &- \frac{2\lambda}{\lambda + 2G} \left\{ \left(n \cdot P \cdot n - \text{tr}(P) \right) \left(n \cdot P \cdot n - \text{tr}(P) \right) \right\} \quad [39] \\ g &\propto 2 P \cdot n - \frac{1}{\lambda + 2G} \left\{ 2(\lambda + G) (n \cdot P \cdot n) - \lambda \text{tr}(P) \right\} n \end{aligned}$$

Para la obtención de la primera se han tenido en cuenta los siguientes resultados parciales:

$$\begin{aligned} Q : E : P &= \lambda \text{tr}(P) \text{tr}(Q) + 2G (P : Q) \\ Q : E \cdot n &= \lambda \text{tr}(Q) n + 2G (Q \cdot n) \\ n \cdot E : P &= \lambda \text{tr}(P) n + 2G (P \cdot n) \end{aligned} \quad [40]$$

Como alternativa al método presentado, se puede partir de la expresión general de la condición de localización [13] e imponer directamente la condición de que el determinante del tensor acústico sea nulo. Este método es particularmente útil cuando el problema analizado es bidimensional, ya que entonces, suponiendo que la orientación local de la banda está dada por el vector n de componentes $(n_1, n_2, 0)$, se obtiene una ecuación de cuarto grado que se puede resolver analíticamente.

Si además se supone que el material tiene al menos simetría ortótropa, las componentes del tensor acústico son:

$$\begin{aligned} A_{11} &= n_1 D_{1111} n_1 + n_2 D_{2112} n_2 \\ A_{12} &= n_1 D_{1122} n_2 + n_2 D_{2121} n_1 \\ A_{21} &= n_1 D_{1212} n_2 + n_2 D_{2211} n_1 \\ A_{22} &= n_2 D_{2222} n_2 + n_1 D_{1221} n_1 \end{aligned} \quad [41]$$

viniedo dado su determinante por:

$$\det(A) = a_0 n_1^3 + a_1 n_1^2 n_2 + a_2 n_1 n_2^2 + a_3 n_2^3 \quad [42]$$

donde:

$$\begin{aligned} a_0 &= D_{1111} D_{1221} \\ a_1 &= D_{1111} D_{2222} + D_{2112} D_{1221} - D_{1122} D_{2211} \\ &\quad - D_{1122} D_{2112} - D_{2121} D_{2211} - D_{2121} D_{1212} \\ a_2 &= D_{2222} D_{2112} \end{aligned} \quad [43]$$

El determinante del tensor acústico para un proceso de carga determinado será una función de n , teniendo un valor mínimo para dos orientaciones conjugadas. Este mínimo variará a su vez con la tensión, disminuyendo hasta alcanzar el valor cero. En este momento pueden aparecer dos bandas conjugadas cuyas orientaciones estarán dadas por las direcciones para las cuales el determinante se anula. Una vez obtenidas éstas, el valor del vector de polarización g vendrá dado por las expresiones generales antes deducidas.

Comparando las dos alternativas presentadas en [40] y en [42], la primera puede emplearse con ventaja en el caso de que se emplee un sistema de referencia que coincida con los ejes principales del tensor de tensiones, ya que entonces los tensores P y Q tienen como expresión una matriz diagonal. Este será el método que se empleará en el apartado siguiente para obtener las condiciones de localización en banda de cortante para algunas leyes constitutivas sencillas.

En el caso general, sin embargo, es preferible emplear el segundo método.

5. APLICACIONES

Las expresiones dadas en [39] permiten obtener para diferentes modelos de material el valor crítico del módulo plástico para el cual puede aparecer una banda de cortante y su orientación. Se analizarán aquí dos casos sencillos, para materiales elastoplásticos cuyos criterios de fluencia sean los de Tresca y Mohr-Coulomb. En este último caso se considerarán leyes de flujo asociado y no asociado.

Para el primer caso, la superficie de fluencia viene dada por:

$$f(\sigma, k) = \sigma_1 - \sigma_2 - k \quad [44]$$

de forma que los tensores P y Q coinciden al ser una ley de tipo asociado,

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [45]$$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si la dirección del vector unitario normal a la banda es:

$$n^T = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad [46]$$

resulta:

$$\begin{aligned} n \cdot P \cdot Q \cdot n &= 1/2 \\ n \cdot P \cdot n &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ P \cdot Q &= 1 \end{aligned} \quad [47]$$

y, tras sustituir en la expresión que da el módulo plástico:

$$\frac{h}{G} = - \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \right) (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad [48]$$

En esta expresión se puede ver cómo, al ser el miembro de la derecha negativo o nulo, la condición crítica se alcanzará cuando el módulo plástico se anule, viniendo dadas las orientaciones posibles por los valores de θ que hacen que se anule el miembro derecho:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{4} \quad [49]$$

No es posible la localización, pues, para este modelo constitutivo en régimen de endurecimiento.

Respecto del vector de polarización, su utilidad reside en proporcionar información sobre el tipo de mecanismo de rotura en la banda. En este caso se trata de un mecanismo de deformación cortante pura.

La dirección del vector polarización viene dada por [39], expresión que se puede simplificar teniendo en cuenta que la traza del tensor P es nula:

$$g \propto 2 P \cdot n - \frac{1}{\lambda + 2G} 2(\lambda + G) (n \cdot P \cdot n) n \quad [50]$$

En la expresión anterior, el término $n \cdot P \cdot n$ es:

$$(n \cdot P \cdot n) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad [51]$$

que se anula al ser θ igual a $\pm \pi/4$.

El vector g es, pues, paralelo a $P \cdot n$,

$$P \cdot n = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) n \quad [52]$$

y, por tanto, ortogonal a n . Se trata, por tanto, del caso descrito en [5, 25] de deformación de cortante pura en la banda.

Para un material de Mohr-Coulomb, la superficie de fluencia es:

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \tan \phi \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \frac{c}{\tan \phi} \right) \quad [53a]$$

viniendo dado el potencial plástico por

$$g(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \operatorname{sen} \psi \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \frac{c^*}{\operatorname{tg} \psi} \right) \quad [53b]$$

Se ha supuesto, por tanto, que se trata en principio de una ley de flujo no-asociada, siendo diferentes los ángulos de rozamiento interno ψ y de dilatación ϕ .

Los tensores P y Q , expresados en ejes principales y suponiendo deformación plana en X_1X_2 , tienen como componentes distintas de cero las siguientes:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \psi}{\sqrt{2(1 + \operatorname{sen}^2 \psi)}} \right) & Q_1 &= \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{2(1 + \operatorname{sen}^2 \phi)}} \right) \\ P_2 &= \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \psi}{\sqrt{2(1 + \operatorname{sen}^2 \psi)}} \right) & Q_2 &= \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{2(1 + \operatorname{sen}^2 \phi)}} \right) \end{aligned} \quad [54]$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} n \cdot P \cdot Q \cdot n &= (P_1 Q_1 - P_2 Q_2) \operatorname{sen}^2 \theta + P_2 Q_2 \\ n \cdot P \cdot n &= (P_1 - P_2) \operatorname{sen}^2 \theta + P_2 \\ n \cdot Q \cdot n &= (Q_1 - Q_2) \operatorname{sen}^2 \theta + Q_2 \\ P : Q &= P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \end{aligned} \quad [55]$$

legándose a la expresión siguiente que da el módulo plástico:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2G} (1 - \nu) &= - (P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2) \operatorname{sen}^4 \theta \\ &+ (P_1(Q_1 - Q_2) + Q_1(P_1 - P_2)) \operatorname{sen}^2 \theta \\ &- P_1 Q_1 \end{aligned} \quad [56]$$

Los valores de θ que hacen máximo el módulo plástico se obtienen derivando la expresión anterior, obteniéndose:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{(1 - \operatorname{sen} \phi)}{4} + \frac{(1 - \operatorname{sen} \psi)}{4} \quad [57]$$

de donde:

$$\cos 2\theta = \operatorname{sen} \left(\frac{\phi + \psi}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi - \psi}{2} \right) \quad [58]$$

Esta expresión puede simplificarse para ángulos de dilatación que difieran poco del de fricción, llegándose a:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \mp \frac{\phi + \psi}{4} \quad [59]$$

que es un valor intermedio entre los denominados de Coulomb y de Rankine.

El valor del módulo plástico correspondiente es mayor que cero, viéndose cómo se puede desarrollar una banda de cortante antes de alcanzar la resistencia de pico.

En el caso de que la regla de flujo sea asociada, la orientación obtenida corresponde a la de Coulomb, siendo cero el módulo plástico correspondiente.

6. REFERENCIAS

- HADAMARD, J. (1903). *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Hermann, París.
- THOMAS, T. Y. (1961). *Plastic flow and fracture in solids*. Academic Press, New York.
- HILL, R. (1962). «Acceleration waves in solids». *J. Mech. Phys. Solids* 10, pp. 1-16.
- MANDEL, J. (1966). «Conditions de stabilité et postulat de Drucker». *Rheology and Soil Mechanics*, pp. 58-68, J. Kravtchenko and P. M. Sirieys (Eds.) Springer, Berlin-Heidelberg-New York.
- RUDNICKI, J. W., y RICE, J. R. (1975). «Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials». *J. Mech. Phys. Solids* 23, pp. 371-394.
- RICE, J. R. (1977). «The localization of plastic deformations». *Theoretical and applied mechanics*, pp. 207-220, W. T. Koiter (Ed.), North-Holland, Amsterdam.
- RICE, J. R., y RUDNICKI, J. W. (1980). «A note of some features of the theory of localization of deformation». *Int. J. Sol. Struct.* 16, pp. 597-605.
- HILL, R., y HUTCHINSON, J. W. (1975). «Bifurcation phenomena in the plane tension test». *J. Mech. Phys. Solids* 23, pp. 239-264.
- SERRANO, A. «Generalización del Método de los Campos Asociados», 5.º Congreso Europeo de Mecánica del Suelo y Cimentaciones, Madrid 1972, Vol. II, pp. 63-67.