Contribución a la calibración indirecta de instrumentos de medida

ANDRES GOMEZ PITARCH (*)

RESUMEN. Como continuación de un artículo anterior en que se hacían unas reflexiones sobre la comparación de los valores medios de las medidas realizadas con instrumentos de la misma marca y modelo, se presentan una serie de consideraciones acerca de la calibración indirecta de instrumentos de medida por lo que se refiere a la distribución óptima de las determinaciones a efectuar, según sea el parámetro previamente fijado.

Asimismo se calculan los valores límite para establecer estos parámetros, con objeto de garantizar una probabilidad dada de no cometer errores del tipo II.

Finalmente, se presenta un ejemplo y se justifica que la calibración indirecta debe tener como finalidad primordial detectar la necesidad de proceder a la calibración directa de los instrumentos.

CONTRIBUTION TO THE INDIRECT CALIBRATION OF MEASURING INSTRUMENTS

ABSTRACT. *This paper is the follow-up to an earlier article which dealt with checking comparisons among the average values of measurements ascertained with instruments of the same make and model. It presents a series of accounts on the indirect calibration of measuring instruments with regard to the optimum distribution of the replication to be made, according to the parameter previously set.*

Likewise, extreme values are calculated to determine these parameters with view to guarantee a given probability against making Type II errors.

Finally, an example is given and the thesis justified that the main purpose of indirect calibration must be to detect the need to proceed to the direct calibration of the instruments.

Palabras clave: Aparatos de medida: Calibración; Distribución (estadístico); Error.

1. INTRODUCCION

En un artículo anterior (1) se comparaban los valores medios de las determinaciones de una magnitud obtenidas con diversos instrumentos, utilizando la misma muestra y el mismo procedimiento de medida, con objeto de averiguar si había diferencias significativas entre dichos valores medios al nivel de significación previamente establecido.

En el ejemplo que considerábamos allí, el test F resultó ser significativo y aplicábamos unos procedimientos que nos permitían conocer cuál, de entre los instrumentos utilizados, era el responsable del rechazo de la hipótesis nula haciendo uso de todas las diferencias posibles entre los valores medios obtenidos.

Hacíamos también referencia al procedimiento que nos permitía optimizar el número de determinaciones a realizar con cada uno de los instrumentos, que era el mismo para todos ellos.

En el presente artículo se hacen unas reflexiones sobre la calibración indirecta de instrumentos de medida, entendiendo por tal la comparación de diversos instrumentos, de la misma marca y modelo, con otro análogo del que se tiene la certeza que está correctamente calibrado. Veamos qué podemos decir, en este caso, del número de determinaciones a realizar con cada uno de los instrumentos.

(*) Licenciado en Ciencias Físicas. Diplomado en Estadística General. Servicio de Tecnología de Carreteras. Dirección General de Carreteras del MOPTMA.

2. CALIBRACION INDIRECTA DE INSTRUMENTOS

¿Qué ocurrirá si uno de los instrumentos que se van a comparar tiene, por principio, más relevancia que los demás, como es el caso de considerarlo como instrumento de control o patrón indirecto?

Ahora, de todas las diferencias posibles entre las medias de las determinaciones únicamente nos interesarán aquéllas en que figure la media $\bar{y}_0$ de las determinaciones del instrumento de control, y no las correspondientes a los restantes instrumentos entre sí. Por consiguiente, parece deseable que el número de determinaciones del instrumento de control tenga que ser distinto que el correspondiente a los otros instrumentos (y el número de determinaciones a realizar con éstos, iguales entre sí). Consideremos los casos que pueden presentarse:

1.º Veamos cuál será, para un número total prefijado de determinaciones N_o, la distribución óptima de N_o entre $(m + 1)$ instrumentos (m instrumentos a comparar con el de control). Demostremos que si c es el número de ellas a realizar con el instrumento de control y r el número correspondiente para cada uno de los m instrumentos restantes, la varianza de θ_i, es mínima cuando $c/r = \sqrt{m}$.

En efecto, si σ^2 es la varianza común de las variables aleatorias Y_j ($j = 0, 1, 2, \ldots m$), tendremos que:

$$\mathrm{Var}\,(\theta_i) = \mathrm{Var}\,(\bar{y}_i - \bar{y}_0) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{r} + \frac{\sigma^2}{c} = \sigma^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{c}\right);\ i = 1, 2, \ldots m$$

y como $N_o = c + mr$,

$$\mathrm{Var}\,(\theta_i) = \sigma^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{N_o - mr} \right)$$

y derivando respecto de r e igualando a cero:

$$\frac{d}{dr}\,[\mathrm{Var}\,(\theta_i)] = \sigma^2 \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{m}{(N_o - mr)^2} \right) = 0$$

con lo que: $c/r = \sqrt{m}$.

Es evidente que se trata efectivamente de un mínimo, ya que:

$$\frac{d^2}{dr^2}\,[\mathrm{Var}\,(\theta_i)] = 2\sigma^2 \left(\frac{m^2}{(N_o - mr)^3} + \frac{1}{r^3} \right) > 0$$

puesto que σ^2, m, c y r son todos ellos positivos. Dados pues m y N_o, obtendremos fácilmente r y c:

$$r = \frac{N_o}{m + \sqrt{m}} \quad ; \quad c = \frac{N_o}{m + \sqrt{m}} \sqrt{m}$$

2.º Supongamos ahora que, en lugar de fijar el número total de determinaciones, fijamos el costo total G_o del experimento, siendo p y p los costos de una determinación realizada con el intrumento de control y con cualquiera de los demás respectivamente.

Minimizando $\mathrm{Var}\,(\theta_i)$ y puesto que $G_o = pc + qmr$, se llega fácilmente a la expresión:

$$\frac{c}{r} = \sqrt{\frac{qm}{p}}$$

siendo los valores óptimos para c y r:

$$c = \frac{G_o}{p + \sqrt{pqm}} \quad ; \quad r = \frac{G_o}{qm + \sqrt{pqm}}$$

3.º Si fijamos la $\mathrm{Var}\,(\theta_i) = v_o^2$, resultará que:

$$\mathrm{Var}\,(\theta_i) = \tau_o^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{c} \right) \; ; \; \frac{1}{c} + \frac{1}{r} = \frac{\tau_o^2}{\sigma^2} = K$$

El número de determinaciones óptimo lo hallaremos derivando e igualando a cero la expresión:

$$N = c + \frac{mc}{Kc - 1}$$

con lo que obtendremos:

$$c_1 = \frac{1}{K}(1 + \sqrt{m}) \quad y \quad c_2 = \frac{1}{K}(1 - \sqrt{m})$$

Como $c_2 < 0$, se desecha y nos queda:

$$c = \frac{1}{K}(1 + \sqrt{m}) \quad ; \quad r = \frac{1}{K}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

y para N:

$$N = \frac{1}{K}(1 + m + 2\sqrt{m})$$

Nótese que, como ocurría en el caso 1.º, $c/r = \sqrt{m}$, como cabía esperar ya que el resultado de minimizar $\mathrm{Var}\,(\theta_i)$ para N_o dado es equivalente al de minimizar N para una $\mathrm{Var}\,(\theta_i) = \tau_o^2$ prefijada, por lo que al cociente c/r se refiere.

4.º Procediendo análogamente para $\mathrm{Var}\,(\theta_i) = \tau_o^2$, considerando ahora:

$$G = pc + qm \frac{c}{Kc - 1}$$

$$\frac{dG}{dc} = p - qm \frac{1}{(kc - 1)^2} = 0$$

y resolviendo la ecuación de 2.º grado en c resultante:

$$c_1 = \frac{1}{K}\left(1 + \sqrt{\frac{qm}{p}}\right) \quad ; \quad C_2 = \frac{1}{K}\left(1 - \sqrt{\frac{qm}{p}}\right)$$

Como en el caso 3.º sólo hay que tomar en consideración c_1, ya que, para c_2, tendríamos que:

$$Si \sqrt{\frac{qm}{p}} = 1 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$Si \sqrt{\frac{qm}{p}} > 1 \Rightarrow c_2 < 0$$

$$Si \sqrt{\frac{qm}{p}} < 1 \Rightarrow r_2 < 0$$

Resulta pues:

$$c = \frac{1}{K}\left(1 + \sqrt{\frac{qm}{p}}\right) \quad ; \quad r = \frac{1}{K}\left(1 + \sqrt{\frac{p}{qm}}\right)$$

siendo el costo total:

$$G = \frac{1}{K}(p + qm + 2\sqrt{pqm})$$

Se comprueba, como era previsible, que el cociente

$$\frac{c}{r} = \sqrt{\frac{qm}{p}}$$

como ocurría en el caso 2.º.

(Tanto en los casos 1.º y 3.º como en el caso 4.º, establecidas las condiciones necesarias de mínimos, es fácil comprobar que se trata efectivamente de mínimos, procediendo como hemos hecho en el caso 1.º).

3. VALORES LIMITE PARA LOS PARAMETROS A FIJAR

Hemos establecido ya comó distribuir, de forma óptima, las determinaciones a realizar entre los $(m + 1)$ instrumentos, bien sea fijando previamente el número total de ellas, el costo total del experimento, o bien la varianza de la variable aleatoria θ_i.

Ahora bien, si el menor de los valores calculados para c o r resulta ser demasiado pequeño podemos cometer un error de tipo II demasiado grande. Significa esto que el valor que vayamos a fijar para N, G o τ^2, según los casos, no puede ser totalmente arbitrario sino que debe estar en consonancia con un valor β que habremos de fijar previamente. El problema resulta muy complicado (si no irresoluble) en el caso, como aquí ocurre, en que $n_i \neq n$, V_i, pero podemos obtener una solución aproximada, y del lado de la seguridad, suponiendo que $c = r$ (aunque esto no es cierto, en general). En estas condiciones, para determinar el valor mínimo para c o r se procede como ya hicimos en (1).

EJEMPLO. Supongamos que $m = 4$ y que, fijado $\alpha = 0{,}05$, deseamos una probabilidad del 80 % de no cometer errores del tipo II, para $\Delta/\sigma \geq 2$.

El gráfico correspondiente de Pearson-Hartley (2) y (3), para $\nu_1 = K - 1 = 4$ y $\nu_2 = \infty$; $\alpha = 0{,}05$ y $K = m + 1 = 5$, nos da una abscisa $\Phi' = 1{,}55$, con lo que:

$$n' = 2K \frac{\Phi'2}{\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)^2} = \frac{2 \times 5 \times 1{,}55^2}{2^2} \simeq 6$$

pero $\nu_2 = K(n' - 1) = 5 \times 5 = 25$ y ahora $\Phi \simeq 1{,}7$. Entonces

$$n = \frac{2 \times 5 \times 1{,}7^2}{2^2} = 7{,}22$$

y tomaremos $n = 8$, que será el valor a asignar al menor de c y r.

Consideremos los cuatro casos estudiados:

1.º Si fijamos $N = N_o$, $c > r$

$$r = 8 \text{ , } c = 16 \text{ , } N_o = 16 + 4{,}8 = 48$$

Quiere esto decir que el valor a fijar para N_o no puede ser menor que 48, por las limitaciones impuestas para los errores tipo II.

2.º Si, por ejemplo, $p = 1.000$ ptas. y $q = 10$ ptas, resultará:

$$\frac{c}{r} = \frac{1}{5}$$

y entonces:

$$c = 8 \qquad r = 40 \qquad \text{y} \qquad G_o = 9.600 \text{ ptas.}$$

No podemos pretender, pues, hastarnos menos de 9.600 ptas. en el experimento si queremos evitar los errores tipo II previamente establecidos.

3.º Si fijamos para Var (θ_i) un valor τ_o^2, y considerando que

$$\frac{c}{r} = \sqrt{4} = 2$$

resultará:

$$r = 8 \qquad c = 16 \qquad \text{y} \qquad N_o = 48$$

y el valor límite para τ_o^2, habida cuenta de las limitaciones establecidas para los errores tipo II, será:

$$K = \frac{\tau_o^2}{\sigma^2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} \quad ; \quad \tau_o^2 = \frac{3}{16}\sigma^2$$

4.º Finalmente, fijado τ_o^2, y considerando

$$\frac{c}{r} = \sqrt{\frac{qm}{p}} = \frac{1}{5}$$

$$c = 8 \qquad r = 40 \qquad G_o = 9.600 \text{ ptas.}$$

$$K = \frac{\tau_o^2}{\sigma^2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{40} \quad ; \quad \tau_o^2 = \frac{3}{20}\sigma^2$$

y éste será el valor límite para τ_o^2, para garantizar la ausencia de errores tipo II mayores que los establecidos previamente, con una probabilidad del 80 %.

4. CONSIDERACIONES FINALES

Completado el estudio del número y distribución de las determinaciones, se procede ahora como indicábamos en (1), es decir, recurriremos a la técnica del análisis de la varianza, y si el «test» F resulta ser no —significativo para el nivel previamente fijado, no hay razón algunas para afirmar que los m instrumentos precisen ser recalibrados. Si, por el contrario, el mencionado «test» resulta ser significativo, habrá que averiguar cuál (o cuáles) es el instrumento que debe ser recalibrado aplicando, para ello, el procedimiento de Scheffé, como ya comentábamos en (1).

Puede desde luego corregirse el valor medio obtenido para cualquiera de los instrumentos considerando como valor exacto de la magnitud el correspondiente a la media de las determinaciones $\bar{y}_o$, realizadas con el instrumento de control, para el nivel de ésta asociado a la muestra utilizada en el experimento; sin embargo, como quiera que $\bar{y}_o$ está, a su vez, sujeto a error, habrá que añadir al error propio del instrumento un error residual (4). Por esta razón, las calibraciones indirectas deberían llevarse a cabo a título provisional, únicamente para detectar la necesidad de proceder a la recalibración directa de un instrumento concreto.

Todo cuando acabamos de decir es válido, únicamente, cuando se pueda asegurar, con una probabilidad alta, que no existen diferencias significativas entre los valores medios de las determinaciones efectuadas en una misma muestra, correspondientes a los diversos instrumentos cuando éstos están correctamente calibrados, cualquiera que sea el valor de la magnitud asociada de la muestra.

Las conclusiones obtenidas son igualmente válidas cuando lo que se pretende es comparar la calidad de varios productos nuevos, o de calidad desconocida, con la del producto que se viene empleando y que, a estos efectos, haría las veces de producto de control.

5. BIBLIOGRAFIA

1. GOMEZ PITARCH, A. (1993). «Comparación de los valores medios de las medidas realizadas con instrumentos de la misma marca y modelo». *Ingeniería Civil*, 90.

2. SCHEFFE (1959). «The Analysis of Variance». John Wiley & Sons.

3. PEARSON & HARTLEY (1954). «Biometrika Tables for Statisticians». Vol. 2, Cambridge University Press.

4. NEUILLY, M. «Erreures de mesure». Techniques de l'Ingenieur; R-280.