

Rotura por localización en geomateriales

III. Aspectos numéricos

MANUEL PASTOR PEREZ (*)
CARLOS RUBIO AREVALO (**)
PABLO MIRA McWILLIAMS (***)

RESUMEN. En el proyecto de una determinada estructura o cimentación tiene importancia la predicción de las condiciones en que tendría lugar la rotura, de forma que sea posible conocer su seguridad. En muchas ocasiones aparecen superficies o líneas de rotura claramente definidas donde se concentra el daño. Este tipo de rotura se denomina rotura por localización y se puede observar tanto en estructuras reales como en probetas ensayadas en laboratorio. Para simular estos fenómenos se emplean programas de cálculo y modelos constitutivos que se calibran con datos experimentales. El propósito de este artículo, tercero de una serie que ha tratado el problema de la rotura por localización en geomateriales, es describir los problemas más importantes que aparecen en la modelación numérica así como dar una serie de posibles soluciones.

LOCALIZED FAILURE IN GEOMATERIALS: NUMERICAL ASPECTS

ABSTRACT. Prediction of conditions under which failure of engineering structures will take place is of paramount importance to evaluate their factor of safety. Failure mechanisms often consist on clearly defined surfaces or lines of failure where the damage is concentrated. This type of failure, referred to as failure by localization of shear strain, can be observed both in structures and in laboratory specimens. Numerical and constitutive models calibrated with experimental data are used to simulate these phenomena. The aim of this paper, third of a series dealing with the problem of localization in geomaterials is to describe the problems which appear in numerical computations, together with the proposed solutions.

Palabras clave: Modelo matemático; Rotura; Localización; Geomaterial; Malla; Método de elementos finitos.

1. INTRODUCCION

El cálculo de cargas y mecanismos de rotura ha atraído la atención de los ingenieros e investigadores desde el momento en que comenzó el desarrollo de las teorías de plasticidad capaces de describir las condiciones en que la rotura tendría lugar en un material. Durante un primer período, se propusieron teorías simplificadas, basadas en suponer conocida la superficie de rotura, en las que se aplicaban los denominados teoremas de máximo y mínimo del colapso plástico, consiguiéndose de esta manera acotar la carga que producía la rotura de la estructura analizada. Estos métodos, denominados de equilibrio límite, son empleados aún hoy en día ya que, de una manera relativamente sencilla, permiten estimar las condiciones de rotura, y se hallan descritos detalladamente en textos (1, 2).

El problema que se plantea al emplear los métodos de equilibrio límite es, en primer lugar, que la forma y situación de la superficie de rotura no es conocida, siendo por tanto necesario emplear una familia de superficies que normalmente se suponen pertenecientes a una misma familia. Por otra parte, no es posible una descripción detallada del comportamiento del material, debiéndose emplear modelos simplificados de tipo rígido-plástico. No son válidos, pues, para

condiciones generales de carga, sino tan sólo para carga de tipo monótono.

La aplicación de programas de elementos finitos no lineales, que permiten introducir ecuaciones constitutivas avanzadas para describir el comportamiento del material, mejora la calidad de las predicciones notablemente, habiendo sido empleados tanto para carga estática como para carga dinámica. Sin embargo, la metodología empleada hoy en día presenta una serie importante de dificultades que puede llevar a errores tanto en el cálculo de la carga de rotura y residual como en la determinación del mecanismo de rotura real.

El objetivo de este trabajo es describir las tres clases más importantes de dificultades que surgen en la modelación de estos problemas, analizar sus causas y proponer soluciones que mejoran la calidad de los cálculos.

Los problemas que se analizarán son los siguientes:

- a) Suavizado de la superficie de rotura sobre una banda cuya anchura corresponde, aproximadamente, a tres o cuatro elementos.
- b) El mecanismo de rotura obtenido depende de la alineación de la malla, pudiendo llegarse a mecanismos incorrectos.
- c) Las soluciones obtenidas dependen del tamaño de los elementos empleados en el análisis.

2. SUAVIZADO DE LA SUPERFICIE DE ROTURA

Este problema es similar a la difusión numérica que se presenta en problemas de propagación cuando se emplean méto-

(*) Dr. Ingeniero Caminos, Canales y Puertos.

(**) Ingeniero Caminos, Canales y Puertos.

(***) Ingeniero Caminos, Canales y Puertos.

dos como el de los elementos finitos o las diferencias finitas. Básicamente, consisten en la dificultad de representar zonas donde se producen altos gradientes en las variables del campo, de forma que una discontinuidad en la función se traduce en una rampa en la solución numérica.

En el caso de las superficies de rotura y bandas de cortante, los espesores observados en el laboratorio o en casos reales, vienen dadas por la estructura del material principalmente, mientras que las obtenidas en los cálculos se difunden sobre varios elementos. Por tanto, una malla más fina dará lugar a una superficie de rotura de menor espesor que la obtenida con una malla más gruesa. En el caso de que el material presente reblandecimiento, el problema se agrava, siendo similar al tratado al describir el efecto del tamaño de la probeta en su resistencia. En este caso, los resultados obtenidos quedan del lado de la inseguridad, ya que tanto la carga máxima como la residual crecen con la anchura relativa de la banda. (Se define como tal el cociente entre su espesor y una dimensión característica del problema.)

Este fenómeno se ilustra en la figura 1, donde el problema estudiado corresponde a un talud vertical al que se aplica una carga puntual a través de una zapata rígida. El material es de tipo elastoplástico con reblandecimiento dependiente de la deformación plástica, con una superficie de fluencia de tipo Tresca, para el que se han supuesto las propiedades siguientes:

Módulo de elasticidad E :	10^5 N/m^2
Módulo de Poisson:	0,35
Tensión de fluencia:	100 N/m^2
Módulo plástico:	-5.000 N/m^2

El lado del cuadrado es de diez metros, y el espesor de la zapata, cuya rigidez se ha supuesto mil veces mayor que la del material del talud, un metro.

Como condiciones de contorno se ha prescrito un desplazamiento vertical nulo en el borde inferior y un desplazamiento horizontal nulo en el borde derecho.

Los resultados mostrados en la figura 1 son las isóneas de la deformación plástica equivalente, que han sido obtenidas mediante técnicas de recuperación variacional.

Como se puede observar, no existe una superficie de rotura claramente definida, difuminándose la deformación plástica en una banda de espesor considerable. Es curioso observar que la forma del mecanismo de rotura muestra una curvatura similar a la que se puede observar en probetas de materiales dúctiles como los suelos cohesivos en ensayos triaxiales o de compresión simple, en los que el mecanismo de rotura es de tipo difuso.

La solución a este problema es refinar la malla, pero no en todas partes por igual, sino tan sólo en aquellas donde vaya a aparecer la banda de cortante. Interesan también elementos peraltados a lo largo de la dirección de la banda, de manera que la «difusión numérica» producida por ésta sea lo menor posible. La malla óptima sería, pues, aquella cuyos elementos en la zona de la banda estuvieran alineados según ella y tuvieran el menor espesor posible, pero empleando elementos de mayor tamaño en las zonas alejadas de la banda. El problema es que se desconoce a priori la posición de la banda, pero esta dificultad puede soslayarse si se emplean técnicas de remallaje autoadaptativo (3-9).

Como alternativa a estos métodos y buscando siempre el conseguir una mayor definición de la banda de cortante, Or-

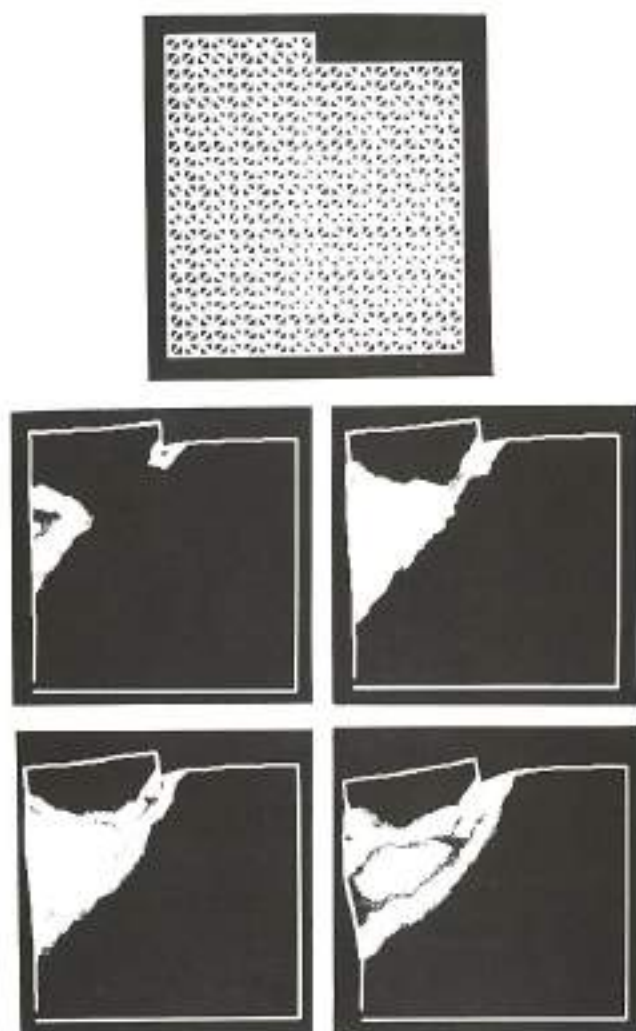


FIGURA 1. Difusión de la banda de cortante en una malla isotrópica.

tiz, Leroy y Needleman (10) propusieron unas funciones de forma adicionales dentro de los elementos en los que se había detectado que cumplían la condición de localización al ser nulo para dos direcciones conjugadas el determinante del tensor acústico. Este método, sin embargo, plantea problemas cuando se emplea con técnicas de regularización como las que se describen más adelante.

Otra alternativa interesante es la propuesta por Belytschko, que introduce un campo localizado de deformación en el interior de los elementos que contienen a la banda (11), o los basados en introducir elementos de tipo junta en la región de la banda (12, 13).

Sin embargo, el método del refinamiento autoadaptativo, aplicado por primera vez a problemas de localización por Pastor, Peraire y Zienkiewicz (3, 4, 6), presenta una serie importante de ventajas frente a los otros métodos (14).

2.1. REMALLAJE AUTOADAPTATIVO

El objetivo buscado en las técnicas de remallaje autoadaptativo es el de producir, para un determinado problema del cual no se conoce la solución, una malla óptima de elementos finitos. El criterio de optimización dependerá del propósito

del analista. En ocasiones, interesará encontrar una distribución del tamaño de los elementos tal que el error esté uniformemente distribuido en la malla. Para ello, es necesario definir una función que permita estimar el error cometido en el resultado obtenido mediante un cálculo en elementos finitos, como por ejemplo la propuesta por Zienkiewicz (7). En otros casos, tales como los que aparecen en dinámica de fluidos, el analista estará interesado en obtener con la mayor precisión posible las líneas o superficies de choque, en las que el gradiente de las variables de campo es muy elevado (5).

El problema que se busca resolver aquí es el de encontrar mallas que proporcionen una resolución suficiente en las bandas de cortante, evitando en lo posible los efectos de dispersión numérica antes comentados y que se ilustraron en la figura 1.

La posición de la banda no es conocida antes de realizar el análisis, por lo cual se parte de una malla inicial para la que se calcula una primera solución, la cual se emplea para obtener una segunda malla en la que la banda quede mejor caracterizada. Esta malla es empleada, a su vez para obtener una solución mejorada, continuándose el proceso hasta obtener la precisión deseada. El método que se propone es de tipo iterativo y consta de dos pasos básicos.

La primera etapa de la iteración j -ésima tiene por objeto resolver el problema en esta malla, la cual está caracterizada por un conjunto de parámetros $P^{(j)}$ que describirán en cada elemento su tamaño, orientación y peralte. Una vez obtenida la solución del problema, es posible obtener un nuevo conjunto de parámetros $P^{(j+1)}$ que defina la geometría de la nueva malla ($j+1$). El cálculo de estos parámetros depende, como antes se ha comentado, del objetivo buscado. Si éste consiste en hallar una malla tal que el error en todos los elementos sea el mismo, se podrá aplicar el método propuesto en (7). En el caso en que interese refinar la malla en las zonas donde se producen gradientes altos, el método sería el propuesto en (5).

El problema a resolver en este caso guarda una cierta similitud con el de la obtención de ondas de choque en fluidos, ya que existe una discontinuidad en las derivadas de las variables de campo, en este caso la deformación.

En el caso de un problema unidimensional la malla queda definida por el espaciamiento δ en el dominio estudiado, el cual puede definirse como:

$$\delta^2 \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right| = C_1 \quad [1]$$

donde ξ es un funcional de las variables de campo y de sus derivadas, y C_1 una constante que define el grado de refinamiento, y que puede obtenerse en función del tamaño mínimo de malla $\delta_{\min}$ que se desee obtener, obteniendo entonces la constante C_1 por:

$$\delta_{\min}^2 \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right|_{\max} = C_1 \quad [2]$$

de donde el espaciamiento se obtiene como:

$$\delta^2 = \delta_{\min}^2 \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right|_{\max} \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right|^{-1} \quad [3]$$

El problema a resolver es, para un determinado funcional ξ , la obtención del valor del espaciamiento δ en la región analizada. Un posible método a seguir en el caso de que los

valores de ξ se hayan obtenido en los puntos de integración es el de obtener los correspondientes valores nodales mediante técnicas de recuperación variacional, basadas en hacer ortogonal el error cometido en la aproximación al subespacio donde se aproxima el funcional.

En el caso de problemas en dos dimensiones, el método a seguir es similar, debiendo obtener ahora las derivadas segundas de ξ .

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} \quad [4]$$

Una vez obtenidas éstas, se obtienen las direcciones principales correspondientes X_1 y X_2 , definiendo λ_1 y λ_2 como las derivadas segundas con respecto a los ejes X_1 y X_2 , respectivamente.

$$\lambda_1 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial X_1^2} \quad \lambda_2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial X_2^2} \quad [5]$$

en donde se supondrá que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Siguiendo el procedimiento descrito para el caso unidimensional, se definirán los espaciamientos según las direcciones principales como:

$$\delta_1^2 = \frac{|\lambda_1|_{\max}}{|\lambda_1|} \delta_{\min}^2 \quad \delta_2^2 = \frac{|\lambda_1|_{\max}}{|\lambda_2|} \delta_{\min}^2 \quad [6]$$

El peralte del elemento queda entonces definido por:

$$s = \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad [7]$$

siendo también necesario guardar la dirección según la cual el elemento está peraltado α .

De esta manera se puede definir un nuevo conjunto de parámetros $P^{(j+1)}$ (δ_1 , s , α) en los nodos de la malla antigua a partir de los valores del funcional ξ en los elementos. Una vez obtenida esta información, se puede pasar a la segunda etapa del algoritmo en la que se obtiene una nueva malla a partir de $P^{(j+1)}$.

El procedimiento a seguir está descrito detalladamente en el trabajo de Peraire, Morgan, Vahdati y Zienkiewicz (5), y consiste básicamente en generar los nuevos nodos a partir del contorno, empleando en cada momento un frente de generación con la lista de los nodos activos. Los nuevos nodos y elementos se construyen a partir de los nodos del frente activo, generando para cada par de ellos un nuevo nodo tal que el elemento generado está definido por los parámetros de la malla correspondientes.

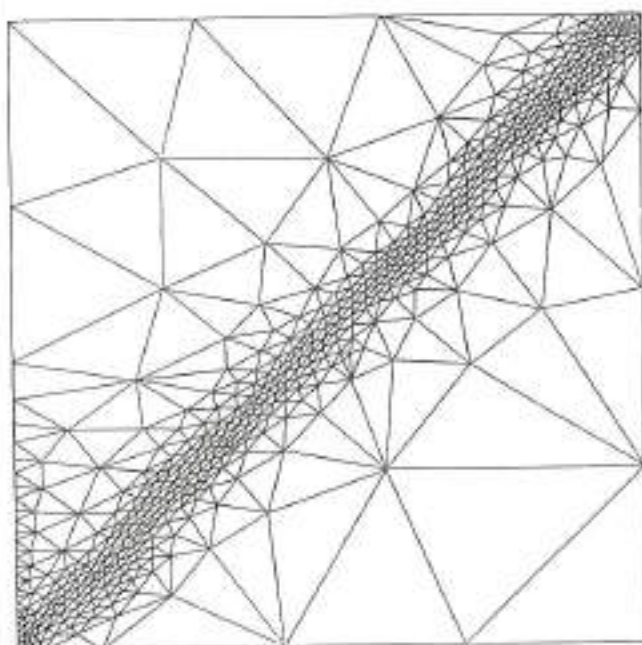
2.2. FUNCIONALES DE REFINAMIENTO ALTERNATIVOS

Para mostrar la capacidad del algoritmo para producir mallas que permitan capturar adecuadamente una discontinuidad, se da en la figura 2 la malla que se obtendría mediante este procedimiento para una discontinuidad existente en una región cuadrada de lado unidad definida como:

$$\xi = 1 \quad \text{para} \quad x - y \leq 0 \\ \xi = 0 \quad \text{para} \quad x - y \geq 0 \quad [8]$$

En la figura se puede observar cómo los elementos generados en las proximidades de la discontinuidad tienen un tamaño menor que en el resto de la malla, estando alineados según la discontinuidad.

En el algoritmo de generación de la malla se ha tenido en


 FIGURA 2. Captura de una discontinuidad en $x = y$.

cuenta también la posibilidad de dar unos valores máximos para el peralte del elemento y el espaciado máximo, siendo posible asimismo limitar el mínimo tamaño de elemento a generar. Esta posibilidad es sumamente interesante, y puede emplearse como alternativa a los limitadores de localización que se describirán más adelante.

Una pieza clave en el proceso de remallaje autoadaptativo es la selección de un funcional de refinamiento adecuado. Existen varias alternativas que han sido experimentadas por los autores (3, 4), entre las que se pueden mencionar:

a) Deformación plástica acumulada:

$$\xi_1 = \int \left(\frac{1}{2} de_{ij}^p de_{ij}^p \right)^{1/2} \quad [9a]$$

donde de_{ij}^p es el incremento del tensor desviador de deformaciones:

$$de_{ij}^p = de_{ij}^e - \frac{1}{2} tr(de^e) \delta_{ij} \quad [9b]$$

b) Mínimo del determinante del tensor acústico:

$$\xi_2 = \min \left(\det(n_i D_{ijk}(u_i)) \right) \quad [9c]$$

c) Módulo del campo de desplazamientos totales.

$$\xi_3 = abs(u) \quad [9d]$$

En general, todas ellas están basadas en funcionales cuyo valor presenta un gradiente grande en la banda de cortante, aunque el basado en el tensor acústico carece de sentido en problemas en los que no hay cambio de naturaleza matemática de elíptica a hiperbólica o viceversa como, por ejemplo, ocurre cuando se emplea una ley viscoplastica tipo Perzyna para caracterizar el material.

2.3. APLICACIONES

Como ejemplo de aplicación de la primera alternativa, se da en la figura 3 a) y b) el proceso de remallaje para una probeta

de material ensayado en el aparato biaxial (deformación plana), descrito por una ley elastoplástico perfecto de tipo Tresca. La tensión equivalente de fluencia empleada es igual a una milésima parte del módulo elástico E , y el módulo de Poisson se ha supuesto igual a 0,35.

Los ensayos de laboratorio se intentan hacer en condiciones de tensión tan homogéneas como sea posible, evitando concentraciones de inclusiones de mayor o menor resistencia. Esto no es siempre posible, y aparecen zonas más débiles a partir de las cuales se forma la banda de cortante y la superficie de rotura. Hay que hacer notar que no siempre se observa el modo localizado de deformación, existiendo en ocasio-

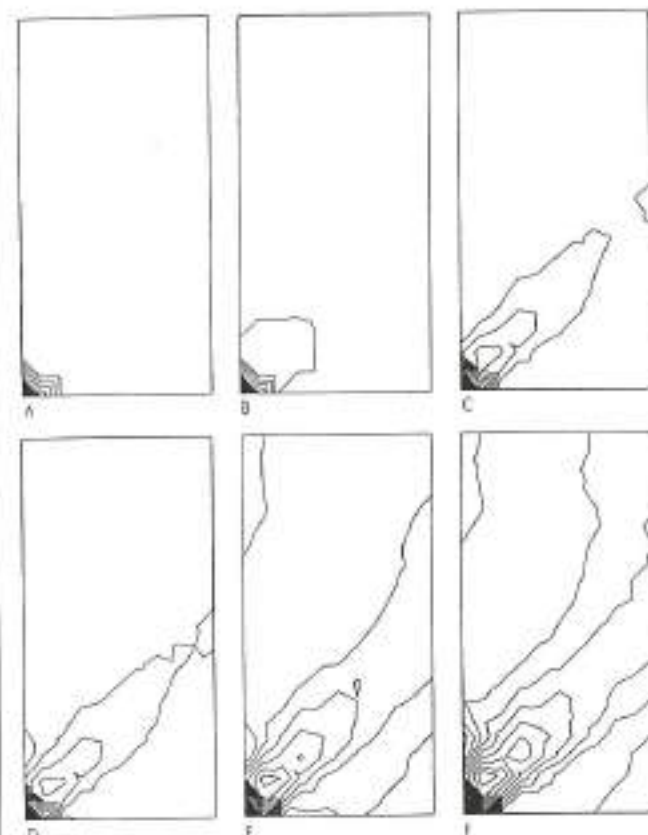
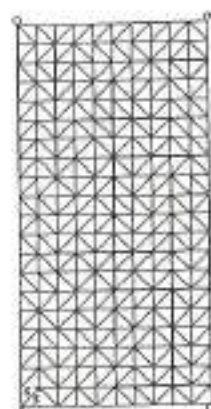


FIGURA 3a. Malla inicial e isóneas de deformación para una probeta con una inclusión.

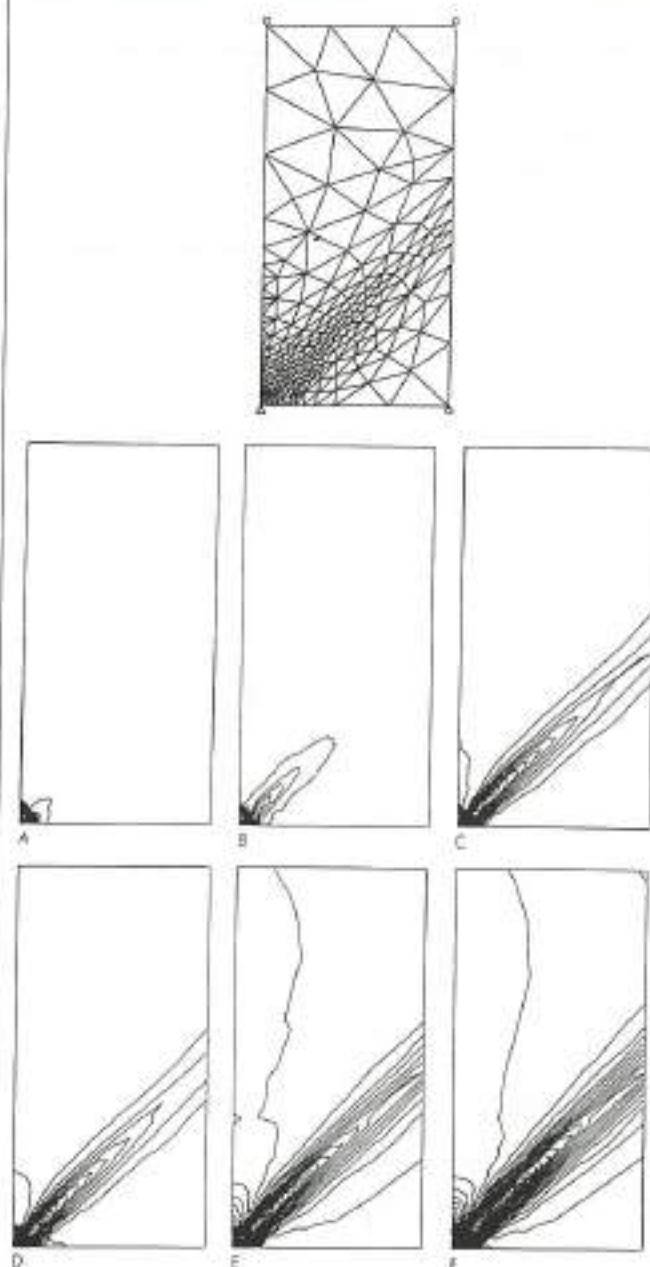


FIGURA 3b. Malla refinada e isóneas de deformación para una probeta con una inclusión.

nes modos difusos que dan a la probeta un aspecto de pequeño barril.

El que el modo final de deformación sea uno u otro depende no sólo de las características del material, sino también de las condiciones de contorno impuestas en el ensayo, del recorrido de tensiones, de la historia pasada del material, y de la presencia de inclusiones en éste. En el ensayo triaxial en suelos de tipo cohesivo, se puede observar en ocasiones que, probetas cuya rotura en compresión tiene lugar según un modo difuso, rompen en modo localizado si el recorrido de tensiones consiste en un ciclo de extensión seguido por uno de compresión hasta rotura.

Para simular la formación de un modo localizado, se ha supuesto aquí que existe una inclusión en la probeta que se ha supuesto en el vértice inferior izquierdo de la malla, y cuyo radio es la décima parte de la anchura de la probeta. Esta inclusión está caracterizada por una tensión equivalente de rotura que es igual a la cuarta parte de la del material que la rodea.

La carga se ha aplicado a través de un cabezal sin rozamiento, controlando su desplazamiento vertical en los cálculos, dándose en la figura las isóneas de la deformación plástica de cortante en distintos momentos del proceso de carga. En la primera parte de la figura, se observa cómo la banda se propaga hasta emerger por el extremo opuesto de la probeta. La segunda parte de la figura muestra la malla obtenida por refinamiento a partir de los resultados obtenidos, empleando como funcional de refinamiento la deformación de cortante plástica equivalente, así como los resultados obtenidos en ésta. Los contornos de igual deformación plástica muestran cómo la banda obtenida en la nueva malla tiene una mayor definición.

El espesor de la banda obtenido en este tipo de simulaciones, depende del tamaño de la malla en la zona donde la banda se propaga así como del tamaño de la inclusión, siendo del orden del mínimo de éstas. Por otra parte, depende también del tipo de material empleado en la simulación, siendo también en materiales con reblandecimiento.

La descripción del material empleada aquí (elastoplástico perfecto) no incorpora ninguna longitud interna que fije el espesor de la banda, siendo una limitación importante de este tipo de modelos. Empleando descripciones del continuo más avanzadas, tales como los medios polares, no es necesario introducir ninguna imperfección para simular el desarrollo de la banda (15).

El segundo ejemplo de aplicación que se considerará es el del talud vertical descrito en la figura 1, dándose en la figura 5 las isóneas de deformaciones y desplazamientos totales correspondientes a dos mallas, la segunda de las cuales ha sido obtenida mediante remallaje autoadaptativo. El refinamiento se ha llevado a cabo empleando los funcionales ξ_1 y ξ_3 conjuntamente.

Para ello, se obtuvo un primer conjunto de parámetros (δ , α) empleando la deformación plástica, y un segundo conjunto a partir del módulo del campo de velocidades. Los valores seleccionados en cada punto fueron los correspondientes al conjunto para el cual el espaciamiento δ fuera el menor.

La ventaja de este procedimiento, como se describirá en el apartado siguiente, es que permite realizar refinamientos previos en el rango elástico que eliminan la influencia de una malla mal orientada.

Comparando los resultados obtenidos en ambas mallas, se observa una mayor definición de la banda de cortante así como una descripción precisa del mecanismo según el cual tiene lugar la rotura, y que consiste en un plano inclinado 45° .

3. ORIENTACION DE LA MALLA

La orientación de la malla influye en el mecanismo de rotura obtenido, habiendo sido descrito este efecto en trabajos publicados en los últimos años (8, 12, 15-17). En los trabajos de Larsson (12) y Bicanic (8), se compararon los resultados obtenidos en mallas que no presentaban una alineación particular de sus elementos con los objetivos en mallas alineadas

según la forma estimada del mecanismo de rotura. En el segundo caso, ambos investigadores coincidieron en que el mecanismo de rotura quedaba mejor caracterizado.

Por otra parte, de Borst y Sluys (15, 18) han estudiado el efecto de la alineación de la malla empleando modelos elasto-plásticos de tipo Van Mises con reblandecimiento, de Cosserat y de tipo viscoplastico. Las conclusiones obtenidas por ambos apuntan a que el efecto de la alineación de la malla está relacionado con el mal planteamiento del problema cuando aparece localización de la deformación en banda constante. Sin embargo, no parece ser la única causa, ya que en el modelo basado en la teoría del continuo de Cosserat empleado por de Borst y Sluys existe una diferencia considerable entre los resultados obtenidos en dos mallas alineadas de forma diferente.

Experimentos numéricos realizados por el autor en dos mallas con alineaciones diferentes (Fig. 4a), han dado como resultado diferentes mecanismos de rotura a pesar de haber empleado técnicas de regularización de tipo no-local que serán descritas más adelante.

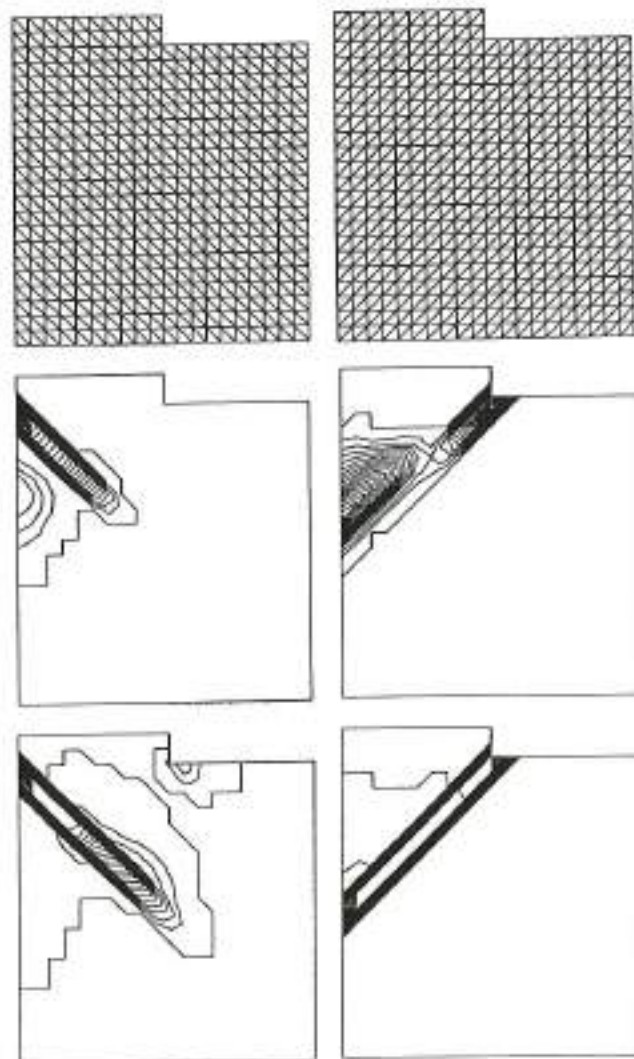


FIGURA 4. Efecto de la orientación de la malla en el mecanismo de rotura. a) Mallas empleadas, b) isóneas de la deformación plástica equivalente.

El problema de la dependencia de la orientación de la malla está ligado al carácter incompresible de una ley de flujo plástico de tipo Tresca o Von Mises, ya que una vez alcanzada la superficie de rotura, una gran proporción del incremento de deformación es de tipo plástico.

La influencia de la incompatibilidad en plasticidad fue estudiada por Nagtegaal (19), quien propuso un método para estimar el grado en que los cálculos efectuados con un tipo particular de elemento están afectados por este problema. Posteriormente, Zienkiewicz (20) y Hughes (21) han recogido y mejorado este criterio, según el cual, la relación entre el número de grados de libertad en una malla y el de restricciones impuestas por la condición de incompresibilidad debe ser lo más próxima posible a 2. Valores de este cociente inferiores a la unidad, causan la aparición de una rigidez artificial en la malla muy grande, mientras que valores superiores a dos implican que la condición de incompresibilidad no está suficientemente bien impuesta en la malla. El valor óptimo de dos corresponde al cociente entre el número de ecuaciones de equilibrio en un problema bidimensional (2) y el número

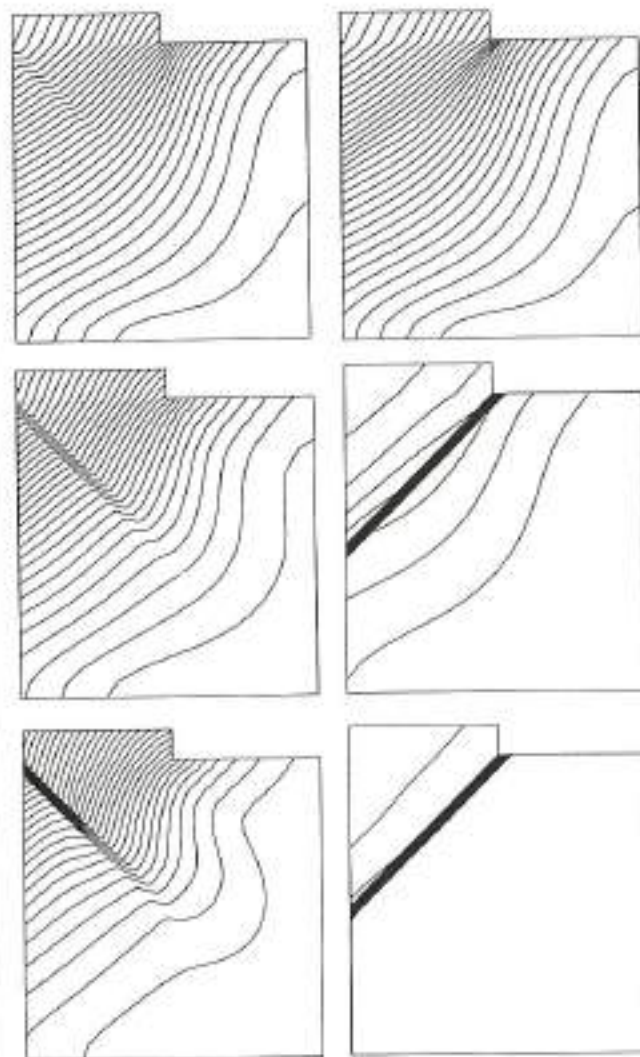


FIGURA 4. Efecto de la orientación de la malla en el mecanismo de rotura. a) Mallas empleadas, b) isóneas del módulo del desplazamiento.

de ecuaciones de coacción para la deformación volumétrica (1).

Para el cálculo del número de restricciones impuestas en el modelo numérico se tienen en cuenta el número de monomios independientes en las derivadas de las funciones de forma y el número de puntos de integración, tomándose el menor de ambos. Los valores obtenidos para triángulos de tres, seis y quince nodos son, respectivamente, 1, 4/3 y 1,6, por lo cual el comportamiento será mejor para los terceros que para los segundos, y mejor para éstos que para los primeros.

Otra alternativa es el emplear elementos de tipo mixto desplazamiento-presión, para los que se obtienen relaciones óptimas de dos para los casos de elementos triangulares de siete nodos de desplazamiento y tres nodos internos de presión, y de tres nodos de desplazamiento y tres de presión. El primer caso corresponde a una representación discontinua del campo de presiones, siendo continua la del segundo caso.

Los cálculos hechos por el autor empleando elementos de tres, seis y quince nodos, así como los elementos mixtos de

siete nodos confirman la influencia de la incompresibilidad en la orientación de la malla, que fue máxima para el primer caso ($r = 1$) y mínima para el último ($r = 2$).

A pesar del mejor rendimiento de los elementos más complejo, en los problemas donde aparecen zonas de gradientes fuertes en las variables del campo o sus derivadas, o incluso discontinuidades, es más conveniente emplear elementos del menor orden posible, ya que se puede definir de una manera más precisa y sin que aparezcan oscilaciones la discontinuidad.

Para ello, se ha investigado sobre cómo sería posible evitar los efectos de una alineación incorrecta de la malla empleando elementos de tipo triangular de deformación constante, los cuales son los más afectados por este problema. La solución que aquí se propone es el emplear técnicas de remallado autoadaptativo que permitan evitar la aparición de mecanismos incorrectos de rotura debido a una alineación incorrecta de la malla.

El ejemplo que se ha estudiado es el del talud vertical antes descrito, dándose en la figura 4 dos mallas en las cuales la orientación de los elementos ha sido elegida de tal forma que den lugar a dos mecanismos absolutamente diferentes de rotura. En la segunda parte de la figura se dan las isólinas de la deformación plástica equivalente obtenida, pudiendo verse cómo en el caso de la izquierda (malla SQLM), el mecanismo obtenido es incorrecto, obteniéndose el real con una definición suficientemente buena de la banda a pesar del tamaño de elemento empleado en el caso de la derecha (malla SQRM).

Es también importante ver en la parte (d) de la figura, donde se ha representado el valor de la fuerza vertical aplicada en la zapata en función del desplazamiento vertical impuesto en el centro de ésta para los dos casos estudiados, que el valor máximo de la carga es aproximadamente el mismo, difiriendo en el comportamiento post-pico.

A partir de los resultados incorrectos obtenidos en la ma-

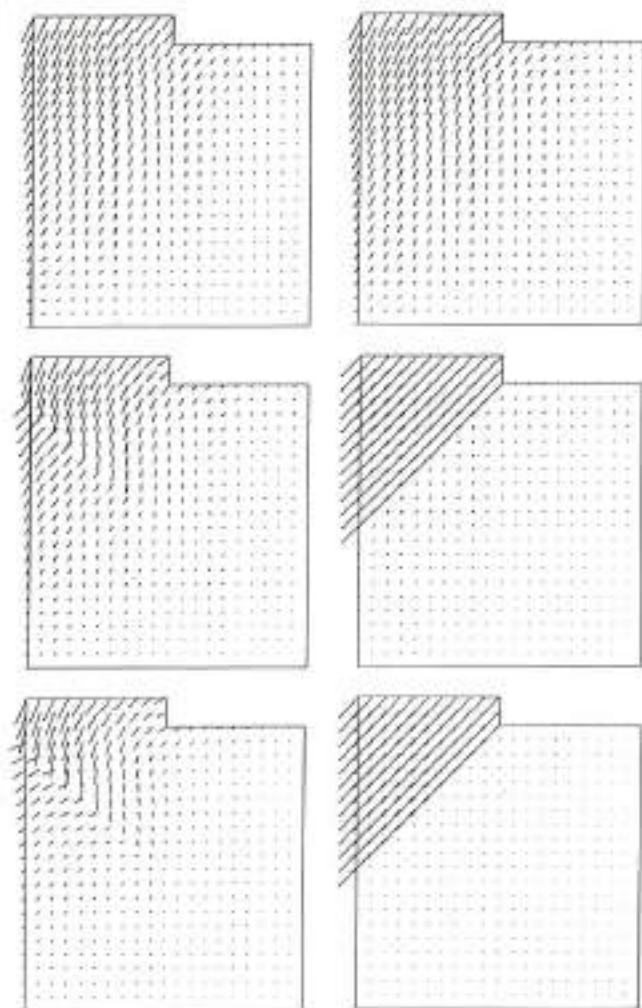


FIGURA 4. Efecto de la orientación de la malla en el mecanismo de rotura. a) Campo de velocidades.

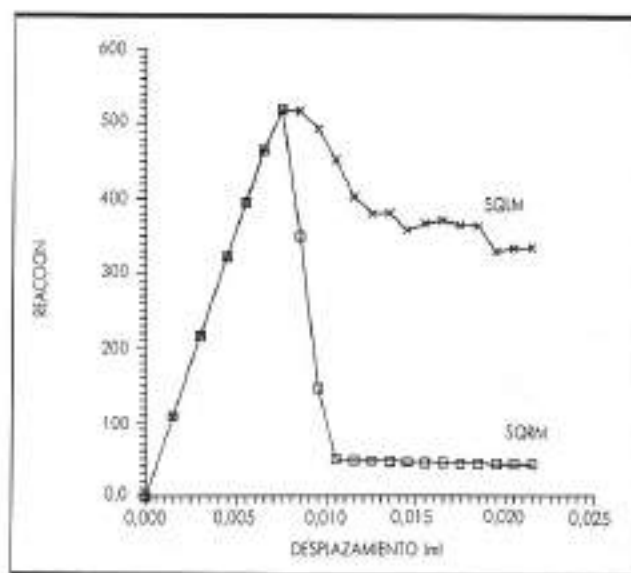


FIGURA 4. Efecto de la orientación de la malla en el mecanismo de rotura. b) Reacciones.

la SQLM, se ha obtenido la malla SQLM10 dada en la figura 5a, habiéndose empleado el procedimiento mixto de refinamiento basado en los funcionales ξ_1 y ξ_2 antes definidos. El refinamiento se llevó a cabo con los resultados obtenidos en un escalón de carga para el que aún no se había producido plastificación, por lo cual el método empleado es equivalente a un único ciclo de refinamiento empleado ξ_3 .

Finalmente, un segundo remallaje llevado a cabo una vez desarrollada por completo la banda de cortante ha permitido obtener la malla SQLM20 mostrada en la parte derecha de la serie de figuras, donde se puede apreciar una definición óptima de la banda, así como el mecanismo de rotura que corresponde al deslizamiento del bloque superior a lo largo del plano inclinado a $\pi/4$. Los resultados obtenidos son satisfactorios, no continuándose el proceso de remallaje. Hay que destacar que la precisión con que se ha obtenido la banda ha sido posible debido al pequeño tamaño de los elementos en la banda, así como a su alineación según ella.

Comparando los resultados obtenidos en las figuras 1 y 4, se puede ver cómo el espesor de la banda disminuye sucesivamente. Las curvas carga-desplazamiento dadas en la figu-

ra 6 muestran cómo el comportamiento obtenido va siendo cada vez más frágil, evitando así el error de las mallas gruesas en las que no se puede obtener una posible rotura de tipo catastrófico en una estructura.

El problema que aparece aquí es el de evitar que un tamaño inadecuadamente pequeño de los elementos empleados dé lugar a un comportamiento más frágil que el real. Esta situación puede ser evitada en el proceso de cálculo sin mayor dificultad, ya que el generador de malla permite establecer un tamaño mínimo de elemento, que se puede hacer corresponder con el espesor de la banda que corresponda al material analizado.

Sin embargo, esta táctica no evitaría que el problema analizado estuviera mal planteado. Para conseguir que no se produzca el cambio de naturaleza matemática del problema es necesario emplear bien una descripción del comportamiento del material diferente de la elastoplástica, bien una descripción más compleja del continuo. Estas técnicas, cuyo efecto fundamental es el de introducir una longitud interna característica del material, que fija el espesor de la banda de cortante, se denominan «Técnicas de regularización», y se describen a continuación.

4. TÉCNICAS DE REGULARIZACIÓN

El cálculo mediante elementos finitos de las condiciones en que tendrá lugar la rotura de una estructura y del mecanis-

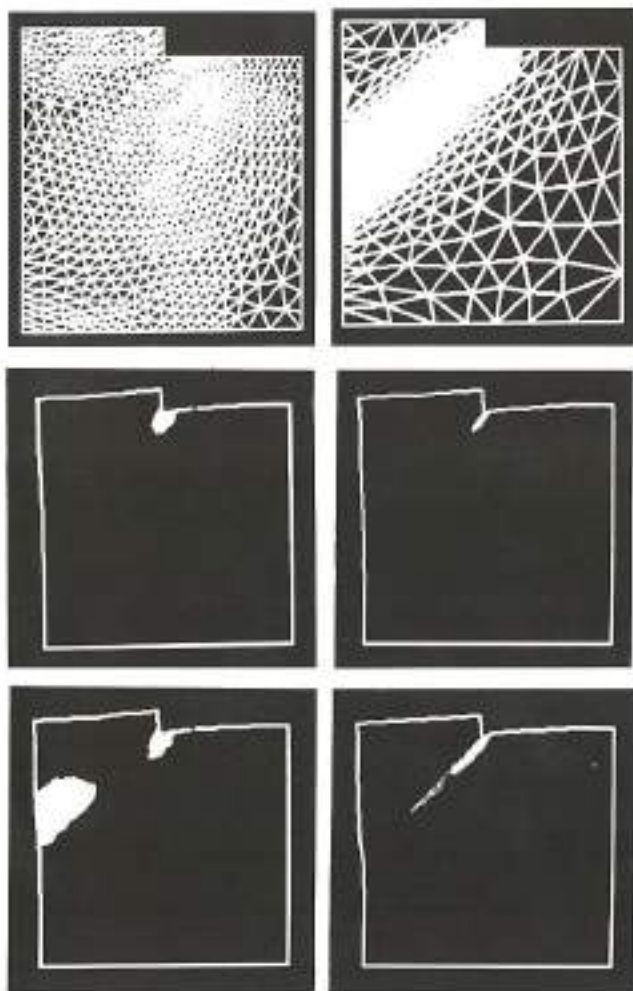


FIGURA 5. Efecto de la orientación de la malla en el mecanismo de rotura. a) Mallas obtenidas por refinamiento autoadaptativo a partir de la malla que causaba el mecanismo incorrecto, b) líneas de la deformación plástica.

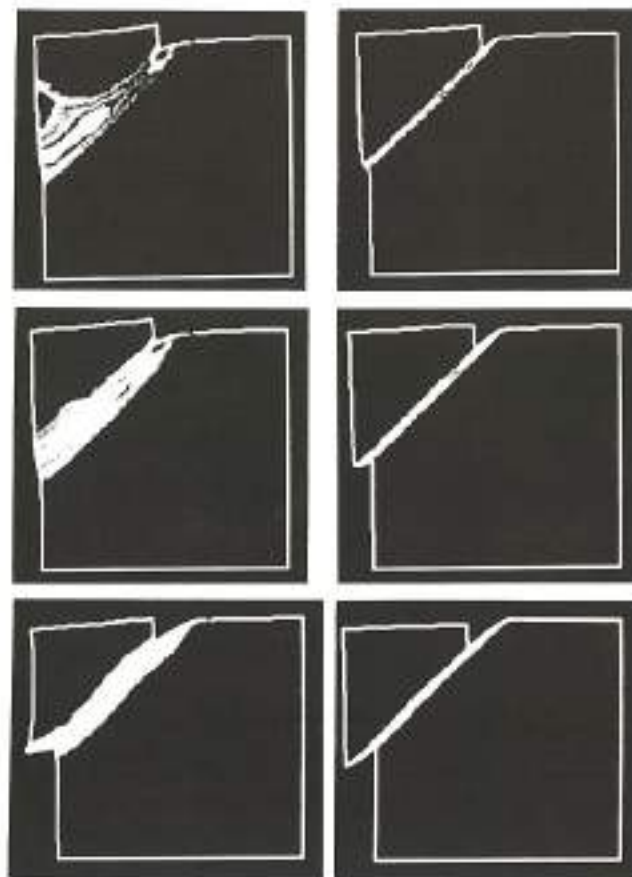


FIGURA 5. Efecto de la orientación de la malla en el mecanismo de rotura. b) líneas de la deformación plástica (cont.).

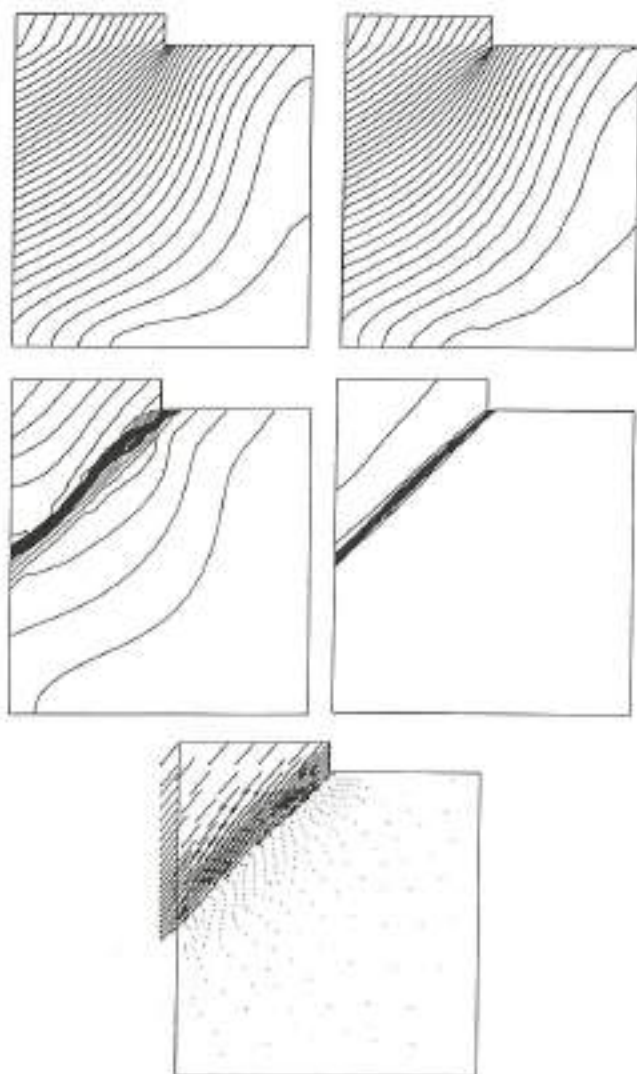


FIGURA 5. Efecto de la orientación de la malla en el mecanismo de rotura. a) Isolinias del módulo de los desplazamientos, b) Campo de velocidades.

mo según el cual se producirá presenta una serie importante de inconvenientes, debidos en parte al cambio de naturaleza del problema, que pasa de ser elíptico a hiperbólico o viceversa. Esto ocurre en el caso de que el comportamiento del material se describa mediante un modelo de tipo elastoplástico, y se debe a la ausencia de una longitud característica del material en sus ecuaciones constitutivas.

En el caso dinámico el problema consiste en que la velocidad de propagación de las ondas se hace imaginaria, quedando atrapada en la zona donde se produce la banda de cortante, desde la cual no puede propagarse información al exterior. En el límite, la extensión de esta zona es cero, y no se disipa energía en ella.

En el caso estático, se produce una concentración de la deformación plástica o del daño en una zona cuya extensión no está definida, lo cual se traduce en los cálculos en una anchura de la banda de cortante proporcional al tamaño de la malla. Por tanto, al disminuir ésta, disminuye también la

anchura de la banda que se predice, obteniéndose una respuesta global fuerza-desplazamiento diferente. Un tamaño de malla infinitamente pequeño daría lugar a una banda de anchura nula en la que no se disiparía energía, con una respuesta global que consistiría en una descarga elástica.

Para evitar estos problemas, asociados a un problema matemático mal planteado y al problema físico de no existir una dimensión característica o una longitud interna del material que fije la anchura de la banda, se han propuesto soluciones con las que se consigue que la naturaleza del problema no cambie, de manera que continúe estando bien planteado siempre. Estas soluciones consisten en introducir los denominados «limitadores de localización», denominándose técnicas de regularización, que se pueden clasificar en tres grandes grupos:

1. Enriquecimiento de la descripción del continuo mediante la introducción de micromomentos, propuesta por Cosserat a principios de siglo (22), y empleada por Mühlhaus, de Borst y Vardoulakis para el estudio de problemas de localización en geomateriales (23-26).
2. Introducción de una dependencia de las variables internas del material en un punto del estado del material en sus proximidades. Esta dependencia puede ser de tipo integral, en la que la variable interna en un punto depende de un promedio ponderado en una región próxima a él (limitadores de tipo integral) (27-33), o bien de sus derivadas (limitadores diferenciales) (34-38).
3. Introducción en la ley constitutiva del efecto de la velocidad de carga (39-43). En este caso, como se describirá más adelante, la naturaleza del problema es siempre hiperbólica en el caso dinámico, teniendo la disipación de energía carácter de «sumidero».

Se describen a continuación las características generales de estos modelos, indicándose las ventajas e inconvenientes que plantean.

4.1. CONTINUO DE COSSERAT

La diferencia fundamental que presenta el continuo de Cosserat es la introducción de tres grados de libertad adicionales, que corresponden a las componentes de una rotación a nivel elemental que se une a la componente rotacional del gradiente de deformación.

Si el tensor rotación es:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad [10]$$

y se introduce la rotación de Cosserat ω_k^i tal que:

$$\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k^i \quad [11]$$

para cuantificar la deformación del sólido en un punto será necesario definir la deformación y una curvatura como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \omega_{ij} - w_{ij}^c \quad [12]$$

$$\kappa_{ij} = t\omega_{ij}^c$$

Una vez introducida la micro-curvatura κ como una medida de la deformación, se debe definir una magnitud conjugada para caracterizar su contribución a la energía de deformación o a su disipación, que es un micro-momento m_{ij}^c , que se define como el momento que actúa sobre la cara frontal

perpendicular al eje X_i de un elemento diferencial de volumen, según el eje X_k .

Esto hace que la ecuación de equilibrio de momentos deba ser modificada, resultando, en el caso dinámico (26):

$$\frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} - (\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) = \Theta_z \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} \quad [13]$$

donde Θ es el momento de inercia por unidad de volumen, pudiendo observarse que el tensor de tensiones ya no es simétrico.

Las componentes de la deformación, a efectos de cálculo, se pueden ensamblar en un vector de deformaciones dado por:

$$\xi = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}, \kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}, \kappa_{xy}, \kappa_{yz}, \kappa_{zx})^T \quad [14]$$

donde se ha introducido el nuevo parámetro l que corresponde a una longitud interna del material.

El vector de tensiones conjugado es:

$$\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, m_{xx}/l, m_{yy}/l)^T \quad [15]$$

Una vez definidas las tensiones y las deformaciones, el siguiente paso es establecer la relación entre sus incrementos en el caso elástico y en el plástico. Para el primero, la matriz constitutiva es de la forma:

$$D_e = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+\mu_c & \mu-\mu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-\mu_c & \mu+\mu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad [16]$$

donde, además de las constantes de Lamé λ y μ aparecen la longitud característica l y μ_c .

Para introducir deformaciones de tipo plástico, es necesario definir una superficie de fluencia en función de los invariantes de los tensores definidos. Una posibilidad es la propuesta por de Borst (26), similar a la más general de Muhlhaus y Vardoulakis (33), donde se define en primer lugar una deformación equivalente así como su correspondiente tensión efectiva conjugada, las cuales se emplean directamente en una ley elastoplástica de tipo J_2 , como por ejemplo la de Von Mises.

La medida general del incremento de la deformación plástica equivalente es:

$$d\bar{\epsilon} = (a_1 d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p + a_2 d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{kl}^p + a_3 d\kappa_{ij}^p d\kappa_{ij}^p) \quad [17]$$

a la que corresponde la tensión efectiva:

$$\bar{\sigma} = (3 J_2)^{1/2} \quad [18]$$

En las expresiones anteriores se debe cumplir que la suma de a_1 y a_2 debe ser igual a $1/2$, y la de b_1 y b_2 $2/3$, para recuperar las expresiones clásicas cuando la influencia de los micromomentos sea nula.

Las experiencias de De Borst y Sluys (26, 40), así como el análisis de bifurcación realizado por Salem y Vardoulakis confirman que el continuo de Cosserat, al introducir una longitud característica, evita los problemas antes mencionados relativos al efecto de la anchura de la banda de cortante y a

las velocidades imaginarias de propagación de ondas, radicando en esto sus principales ventajas.

4.2. UN MODELO DE PLASTICIDAD GENERALIZADA MICROPOLAR

Los modelos constitutivos propuestos hasta ahora en el marco del continuo de Cosserat han sido modelos muy sencillos, y por tanto, de aplicaciones prácticas muy restringidas. La teoría generalizada de la plasticidad permite simplificar la formulación de los modelos de tipo elastoplástico, ya que no es necesario introducir ninguna condición de consistencia para obtener el módulo plástico, el cual se da directamente mediante una ley teórica.

Los elementos que se deben definir son dos direcciones n y ng y una función escalar H , viniendo dado el incremento de deformación plástica por:

$$d\bar{\epsilon}^p = \frac{1}{H} \eta_g (n^T \cdot d\sigma) \quad [19]$$

Para definir las direcciones se pueden emplear los invariantes I_1 y J_2 clásicos, junto con el invariante modificado J_2 antes definido.

Para el módulo plástico, en el caso de materiales friccionales como los suelos, hay que introducir el efecto de las microcurvaturas κ , que son responsables de un reblandecimiento adicional del material. La ley que se propone es:

$$H = H_0 I_1 \cdot H_f \left(\frac{\eta}{\eta_f} \right) \cdot \left\{ H_r \left(\frac{\eta}{M} \right) + H_s(\xi) + H_w(\bar{\kappa}) \right\} \quad [20]$$

donde se ha introducido la resistencia friccional movilizada η

$$\eta = \frac{(3J_2)^{1/2}}{I_1/3} \quad [21]$$

La evolución del módulo plástico está controlada por las cuatro funciones H_0 , H_r , H_s y H_w . Las dos primeras son dos funciones que decrecen con η , de forma que la rotura tenga lugar en la superficie correspondiente a las condiciones residuales, definida por $\eta = M$.

El papel de la segunda función es el de introducir un endurecimiento dependiente de la deformación plástica acumulada, de tal forma que exista saturación con respecto a la distorsión plástica acumulada. La ley que se propone es:

$$H_s(\xi) = \beta_0 \exp(-\beta_1 \xi) \quad [22]$$

donde ξ es una medida de la distorsión plástica acumulada.

Finalmente, la función H_w tiene por objeto introducir un reblandecimiento que depende de la curvatura irreversible que se ha producido en el punto considerado:

$$H_w(\bar{\kappa}^p) = -\gamma_0 \exp(-\gamma_1 \bar{\kappa}^p) \quad [23]$$

De esta manera se tiene en cuenta el efecto de las rotaciones que se producen en las bandas de cortante, que causan un reblandecimiento adicional del material.

Como principales inconvenientes del continuo de Cosserat cabe mencionar en primer lugar la necesidad de obtener parámetros como μ_c que no se pueden medir en ensayos de laboratorio en este momento, debiendo estimarse. Aquí se puede introducir un error importante, ya que las predicciones del modelo dependen de estos parámetros.

En segundo lugar, se deben imponer en el contorno condiciones para la rotación de Cosserat o su derivada normal.

Esto es aún más peligroso, ya que en la gran mayoría de los problemas de tipo práctico, se trata de contornos artificiales.

Finalmente, los modelos de tipo Cosserat no permiten evitar los problemas de dependencia del tamaño de la malla en el caso de condiciones de tensión uniaxiales, ya que no aparecen rotaciones en este caso, presentando asimismo problemas de dependencia de la alineación de la malla, aunque no tan severos como los obtenidos en los modelos elastoplásticos clásicos.

4.3. MODELOS NO-LOCALES Y DEPENDIENTES DEL GRADIENTE

Los modelos denominados de tipo no-local o integral, así como los dependientes del gradiente de las variables internas, introducen en la respuesta del modelo una dependencia del valor de aquéllas en el entorno del punto considerado.

En el primer caso, un material de tipo elastoplástico con un mecanismo de deformación tendría una superficie de fluencia que vendría dada por (28-33):

$$f(\sigma, \kappa) = 0 \quad (24)$$

donde las variables internas κ que caracterizaban el tamaño, posición y orientación de la superficie de fluencia han sido sustituidas por valores promediados en el sólido:

$$\bar{\kappa} = \frac{\int_{\Omega} \omega(r-r_0) \cdot \kappa(r) \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} \omega(r-r_0) \cdot d\Omega} \quad (25a)$$

siendo la función ω una función de peso definida como:

$$\omega(r-r_0) = \exp\left(-\frac{s^2}{2\lambda^2}\right) \quad (26a)$$

donde la variable s viene dada por:

$$s = |r - r_0| \quad (26c)$$

Los modelos denominados «dependientes del gradiente» a pesar de que realmente dependen del laplaciano y no del gradiente, se basan en suponer que la geometría de la superficie de fluencia depende no sólo de las variables internas, sino del laplaciano de éstas:

$$f(\sigma, \alpha_i, \nabla^2 \alpha_i) = 0 \quad (27)$$

donde se ha supuesto que existen (m) variables internas.

La justificación física de introducir términos de mayor grado en la descripción del continuo o la naturaleza no-local de la respuesta del material está motivada por la interacción de microfisuras y de fisuras con heterogeneidades del material (28).

Los efectos más importantes de ambos métodos son los siguientes:

1. Se consigue una regularización del problema matemático, evitándose el cambio de naturaleza elíptica a hiperbólica o viceversa.
2. Se introduce una longitud característica del material en la descripción del continuo.
3. Como consecuencia de lo anterior, se limita la posibilidad de que al refinar la malla sucesivamente, tendiendo a cero su espaciamiento, se obtengan soluciones donde se disipe energía ya que el espesor de la banda tienda a cero. Debido a ello, se suelen hablar, al referirse a estos modelos, de que se ha introducido un limitador de localización de tipo integral o diferencial. El espesor de la banda queda, pues, limitado in-

teriormente en función de la longitud característica del material.

El efecto del tamaño de la malla queda, pues, en parte, resuelto. Hay que destacar, sin embargo, que para una adecuada caracterización de la banda es necesario emplear una malla que proporcione una resolución suficiente en la zona de la banda, ya que, en caso contrario, el espesor será mayor que el real, y la respuesta del material menos frágil como ya se describió en apartados anteriores, errores ambos que hacen que el cálculo quede del lado de la inseguridad. Para llevar esto a cabo de una forma económica, las técnicas de remallaje autoadaptativo proporcionan al analista una herramienta única.

Es interesante el hecho de que ambos modelos están relacionados entre sí, como ha sido puesto de manifiesto por Lasry y Belytschko (37) o Pijaudier-Cabot y Huerta (33).

En el caso de una barra de material sometida a extensión, si la tensión de fluencia puede expresarse como:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + h \cdot \bar{\varepsilon}^p \quad (28)$$

donde h es el módulo plástico, el cual puede tomar valores negativos cuando existe reblandecimiento.

La deformación plástica no local es:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^p &= \int_{-L/2}^{+L/2} w(s) \varepsilon^p(x+s) ds \\ &= \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{l^2 s^2}{4}\right) \varepsilon^p(x+s) ds \end{aligned} \quad (29a)$$

Si ahora se desarrolla la expresión anterior en la serie de Taylor, resulta, tras suponer que la longitud característica l es mucho menor que las dimensiones de la zona de integración L ,

$$\bar{\varepsilon}^p = \varepsilon^p + \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} \quad (29b)$$

que corresponde a un limitador de tipo diferencial. Para evitar problemas de inestabilidad en la zona en la que el material endurece, se propuso en (33) la siguiente forma final para la tensión de fluencia:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + h \bar{\varepsilon}^p - \frac{c}{l^2} \frac{d^2 \bar{\varepsilon}^p}{dx^2} \quad (29c)$$

Respecto del carácter bien planteado del problema, ha sido estudiado por De Borst y Sluys (15, 18) para el caso de materiales dependientes del gradiente, pero es inmediato, a la luz del análisis de la equivalencia de ambas formulaciones, la extensión de las conclusiones de estos investigadores a los modelos no-locales.

El modelo constitutivo empleado en este análisis es el descrito por la ecuación (29c), expresando la relación entre los incrementos de tensión y de deformación como:

$$\dot{\sigma} = h \cdot \dot{\varepsilon}^p - \frac{c}{l^2} \frac{d^2 \dot{\varepsilon}^p}{dx^2} \quad (29d)$$

Para el estudio de la naturaleza matemática del problema, se obtuvo la orientación de las líneas características en el plano x - t , encontrándose que su inclinación venía dada por la velocidad de propagación de las ondas en el medio elástico equivalente, no existiendo en consecuencia velocidades de

4.5. APLICACIONES

Finalmente, y como ejemplo de aplicación de cómo la teoría expuesta permite evitar la disminución del espesor de la banda de cortante, el aumento de la fragilidad y la disminución de la energía disipada al disminuir el tamaño de la malla progresivamente hacia cero, se dan en la figura 7 los resultados obtenidos empleando un modelo de tipo no-local para el problema del talud vertical antes descrito.

La primera parte de la figura muestra cómo la respuesta global carga-desplazamiento depende del valor del parámetro l que se ha supuesto para la ley no-local, siendo menos frágil el comportamiento global cuanto mayor sea l . Si el valor de l empleado hubiera sido 0,3, tanto las curvas carga-desplazamiento como las bandas de cortante obtenidas no hubieran disminuido al pasar de la malla SQM10 a la malla SQM20 obtenida a partir de la primera por refinamiento autoadaptativo.

En la segunda y tercera partes de la figura se da la evolución de la banda de cortante a lo largo del proceso de carga para los casos correspondientes a $l = 0,3$ y $l = 1,0$ respectivamente, pudiendo observarse cómo la anchura de la banda aumenta con l .

REFERENCIAS

- CHEN, W. F., y HAN, D. J. (1988). *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag.
- ATKINSON, J. H. (1981). *Foundations and slopes*. McGraw-Hill.
- PASTOR, M., y PERAIRE, J. (1989). «Capturing shear bands via adaptive remeshing techniques». *Environ. Mech. Colloquium 248: Non-linear soil-structure interaction*. Saint Hughes de Biviers, France.
- PASTOR, M.; PERAIRE, J., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1991). «Adaptive remeshing for shear band localization problems». *Archive of Applied Mechanics*, 61: 30-39.
- PERAIRE, J.; VAHDATI, M.; MORGAN, K., y ZIENKIEWICZ, O. C. (1987). «Adaptive remeshing for compressible flow computations». *J. Comp. Phys.*, 72: 449-466.
- ZIENKIEWICZ, O. C., y HUANG, G. C. (1990). «A note on localization phenomena and adaptive finite element analysis in forming processes». *Comm. Appl. Num. Meth.*, 6: 71-76.
- ZIENKIEWICZ, O. C., y ZHU, J. Z. (1987). «A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis». *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24: 449-466.
- BICANIC, N.; SELMAN, A., y XIE, Y. M. (1991). «On mesh dependence of failure mode predictions for dams». *Int. Conf. Dam. Fracture*. Univ. Colorado at Boulder.
- DAUDRE, B. (1990). La localisation de la déformation ductile: contribution à sa caractérisation numérique. Application à la lithosphère continentale. Thèse, Univ. de Montpellier II.
- ORTIZ, M.; LEROY, Y., y NEEDLEMAN, A. (1987). «A finite element method for localized failure analysis». *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 61: 189-214.
- BELYTCHSKO, T., y FISH, J. (1989). «Spectral superposition on finite elements for shear banding problems». *Proc. 5th Int. Symp. Non. Meth. Eng.*, 1: 19-29.
- LARSSON, R., y RUNESSON, K. (1992). «Plastic localization capture by discontinuous displacement approximations». *Computational Plasticity*, 605-616. D. R. J. Owen, E. Onate y E. Hinton (Eds.), Pineridge Press.
- CHARLIER, R., y WANG, X. C. (1992). «Finite element computation of localisation using strain field refinements». *Computational Plasticity*, 617-630. D. R. J. Owen, E. Onate y E. Hinton (Eds.), Pineridge Press.
- ORTIZ, M., y QUIGLEY IV, J. J. (1991). «Adaptive mesh refinement in strain localization problems». *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90: 781-804.
- DE BORST, R., y SLUYS, L. (1991). «Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions». *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90: 805-827.
- PASTOR, M.; PERAIRE, J.; VILOTTE, J. P.; ZIENKIEWICZ, O. C.; RUBIO, C., y MIRA, P. (1992). «Numerical analysis of localizations». *Numerical models in geomechanics*. G. N. Pande y S. Pietruszczak (Eds.), 339-348, Balkema.
- PASTOR, M.; PERAIRE, J.; VILOTTE, J. P.; ZIENKIEWICZ, O. C.; MIRA, P., y RUBIO, C. (1992). «Numerical modelling of localization problems in soil structures and foundations». *Geotechnique and Computers*. Presses de l'École des Ponts y Chaussées, Paris.
- SLUYS, L. J. (1992). *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*. Tesis Doctoral, Univ. Técnica de Delft.
- NAGTEGAAL, J. C.; PARKS, D. M., y RICE, J. R. (1974). «On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic ranges». *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 4: 153-177.
- ZIENKIEWICZ, O. C., y TAYLOR, R. L. (1989). *The Finite Element Method*, Vol. 1, McGraw-Hill.
- HUGHES, T. J. R. (1987). *The Finite Element Method*. Prentice-Hall.
- COSSERAT, E., y COSSERAT, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Herman et fils, Paris.
- MÜHLHAUS, H. B., y VARDOLAKIS, I. (1987). «The thickness of shear bands in granular materials». *Geotechnique*, 37: 271-283.
- SULEM, J., y VARDOLAKIS, I. (1989). «Bifurcation analysis of the triaxial test on rock specimens». *Cracking and Damage: Strain localization and size effect*, 295-307. J. Mazars y Z. P. Bazant (Eds.), Elsevier.
- MÜHLHAUS, H. B.; DE BORST, R., y AIFANTIS, E. C. (1991). «Constitutive models and numerical analysis for inelastic materials with microstructures». *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, 377-385. Boer, Booker y Carter (Eds.), Balkema, Rotterdam.
- DE BORST, R. (1992). «Simulation of strain localisations: a reappraisal of the Cosserat continuum». *Engineering Computations*, 8: 317-332.
- BAZANT, Z. P.; BELYTCHKO, T. B., y CHANG, T. P. (1984). «Continuum theory for strain-softening». *J. Eng. Mech. ASCE*, 110: 1666-1692.
- BAZANT, Z. P.; PAN, J. Y., y PIJAUDIER-CABOT, G. «Strain softening in reinforced concrete beams». *J. Struct. Engng. ASCE*, 113: 2333-2347.
- PIJAUDIER-CABOT, G., y BAZANT, Z. P. (1987). «Non-local damage theory». *J. Eng. Mech. ASCE*, 113: 1512-1533.
- PIJAUDIER-CABOT, G.; BAZANT, Z. P., y TABBARA, M. (1988). «Comparison of various models for strain-softening». *Engng. Computations*, 5: 141-150.
- BAZANT, Z. P., y PIJAUDIER-CABOT, G. (1988). «Non-local continuum damage, localization instability and convergence». *J. Appl. Mech. ASME*, 55: 283-293.
- BAZANT, Z. P., y PIJAUDIER-CABOT, G. (1989). «Measurement of the characteristic length of non-local continuum». *J. Eng. Mech. ASCE*, 115: 757-767.
- PIJAUDIER-CABOT, G., y HUERTA, A. (1991). «Finite Element analysis of bifurcation in non-local strain-softening solids». *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 90: 905-919.
- AIFANTIS, E. C. (1984). «On the microstructural origin of certain inelastic models». *J. Engng. Mat. Tech.*, 106: 326-330.

35. AIFANTIS, E. C. (1987). «The physics of plastic deformation». *Int. J. Plasticity*, 3: 211-247.
36. TRIANTAFYLIDIS, N., y AIFANTIS, E. C. (1986). «A gradient approach to localization and deformation. I. Hyperelastic materials». *J. Elasticity*, 16: 225-238.
37. LASRY, D., y BELYTCHSKO, T. (1988). «Localization limiters in transient problems». *Int. J. Solids Structures*, 24: 581-597.
38. VARDOULAKIS, I., y AIFANTIS, E. C. (1989). «Gradient dependent dilatancy and its implications in shear bandings». *Ingenieur Archiv*, 59: 197-208.
39. MUHLHAUS, H. B.; DE BORST, R., y AIFANTIS, E. C. (1991). «Constitutive models and numerical analyses for inelastic materials with microstructures». *Comp. Meth. and Advances in Geomechanics*, 377-385. Beer, Booker y Carter (Eds.), Balkema.
40. NEEDLEMAN, A. (1988). «Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems». *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 67: 69-86.
41. SLUYS, L. J.; BOLEK, J., y DE BORST, R. (1992). «Wave propagation and localization in viscoplastic media». *Computational Methods in Plasticity*. E. Oñate, D. R. Owen y E. Hinton (Eds.), Pineridge Press.
42. LORET, B., y PREVOST, J. H. (1983). «Dynamic strain localization in elasto-visco-plastic solids. Part I. General formulation and one-dimensional examples». *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 33: 247-273.
43. PREVOST, J. H., y LORET, B. (1983). «Dynamic strain localization in elasto-visco-plastic solids. Part II. Plane strain examples». *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 33: 275-294.
44. PASTOR, M.; ZIENKIEWICZ, O. C., y CHAN, A. H. C. (1990). «Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour». *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 14: 151-190.